Teorema, 2025, 44(2), pp. 1-28
https://doi.org/10.30827/trif.33871

NMATRICES CUÁNTICAS, CUASICONJUNTOS Y EL TEOREMA DE KOCHEN-SPECKER

Juan Pablo Jorge [1] and J. Acacio de Barros [2]

[1]Instituto de Filosofía A. Korn, Universidad de Buenos Aires
[2]San Francisco State University

Abstract: We analyze two fundamental premises of the Kochen-Specker theorem: a) the functionality condition FUNC, which expresses the fact that not all observables are independent, nor are the values assigned to them, and b) the issue of the identity of projectors in different measurement contexts. We show that the non-deterministic semantics of Nmatrices and the theory of qsets $\mathfrak{Q}$ can complement each other by providing an appropriate semantics for the lattice of quantum projectors. Considering valuations that are not homomorphisms and admitting the possibility of having indistinguishable (non-identical) projectors, we establish the basis for a semantics for quantum logic, motivated by an ontology of non-quantum individuals, in which one cannot arrive at the Kochen-Specker paradox.

Keywords: *Nmatrices*, *Quasi-sets*, *Quasets*, *Quantum logic*, *Kochen–Specker theorem*.

Resumen: Analizamos dos presupuestos fundamentales del Teorema de Kochen-Specker: a) la condición de funcionalidad FUNC, que expresa el hecho de que no todos los observables son independientes, como tampoco lo son los valores asignados a ellos, y b) la cuestión de la identidad de los proyectores en diferentes contextos de medición. Mostramos que las semánticas no deterministas de Nmatrices y la teoría de qsets $\mathfrak{Q}$ pueden complementarse brindando una semántica adecuada para el retículo de proyectores cuánticos. Considerando valuaciones que no son homomorfismos y admitiendo la posibilidad de contar con proyectores indiscernibles (no idénticos), establecemos las bases de una semántica para la lógica cuántica, motivada en una ontología de no individuos cuánticos, en la cual no puede arribarse a la paradoja de Kochen-Specker.

Palabras clave: *Nmatrices*, *Quasi-sets*, *Quasets*, *Lógica cuántica*, *Teorema de Kochen-Specker*.

Received: 18 May 2025 **Accepted**: 20 June 2025 **Published**: 19 October 2025

Teorema. Revista Internacional de Filosofía
ISSN/ISSN-e: 1888-1254

* Este trabajo fue parcialmente subsidiado por la Beca Interna de Finalización de Doctorado otorgada por CONICET.

1. Introducción

El teorema de Kochen-Specker (1990) representa una de las piedras angulares de las interpretaciones de la Mecánica cuántica. Este teorema impide (entre otras cosas) que el retículo de proyectores cuánticos (lógica cuántica) admita una semántica veritativo funcional. Este teorema demuestra la imposibilidad de atribuir valores precisos a todos los observables de un sistema cuántico simultáneamente, preservando al mismo tiempo las relaciones funcionales entre observables compatibles: a qué observables se les pueden atribuir valores precisos es algo determinado por el contexto de medición. Lo anterior suele expresarse diciendo que de existir *variables ocultas* en la mecánica cuántica, las mismas deben ser contextuales.

Las teorías de variables ocultas que hoy en día se conocen, como la Mecánica bohmiana, no verifican algunos de los presupuestos del teorema. Existen varias formas de enunciar el teorema de Kochen-Specker: en este trabajo, nos centraremos en analizar dos de estas formulaciones. Consideramos que tal análisis será de interés para los fundamentos de la física cuántica.

Por un lado, uno de los presupuestos que estudiaremos se conoce como condición FUNC. Este presupuesto impide que el retículo cuántico admita valuaciones funcionales. Por lo tanto, una estrategia posible consiste en implementar una semántica no determinista para el retículo de proyectores. Esta línea fue la elegida en (14), permitiendo una caracterización novedosa de los estados cuánticos como valuaciones de una Nmatriz cuántica. Siguiendo por este camino, en (15; 16), se presentó una nueva prueba de imposibilidad de asignar valuaciones funcionales a la lógica cuántica utilizando el concepto de *adecuación* de la semántica de Nmatrices. Completando esta línea de investigación, en (17) se propusieron Nmatrices fundadas en la axiomática de quasets (QST), a la vez que se establecieron fuertes vínculos entre QST y la teoría de Rough Sets (RST). Por lo tanto, la línea desarrollada a partir del presupuesto FUNC no solo articuló campos antes inconexos, sino que abrió nuevas líneas de investigación que hoy se mantienen activas.

Por otro lado, un presupuesto generalmente no tenido en cuenta en la contradicción del teorema de Kochen-Specker (contradicción KS) es *la identidad* de los proyectores en diferentes contextos. Es decir, se presupone que los proyectores son entes con identidad que pueden ser reidentificados en diferentes contextos. Este tema se vincula directamente con el lenguaje lógico que está detrás del formalismo de espacios de Hilbert: la Lógica Clásica de primer orden con identidad (LPO), que provoca que los operadores del Hilbert sean entes con identidad, es decir, individuos. Este camino ha sido tratado en (7).

En el presente artículo, analizamos ambos presupuestos y proponemos una semántica fundada en qsets para evitar la contradicción KS. Abordar estos presupuestos es filosóficamente relevante por varios motivos. La condición FUNC separa aguas en las teorías cuánticas. Como dijimos, la mecánica de David Bohm (Mecánica bohmiana) es una teoría empíricamente equivalente a la Mecánica cuántica tradicional, pero en la cual no se cumple FUNC. Esto es, a través de este presupuesto, queda de manifiesto la subdeterminación teórica por parte de la evidencia empírica (24). Desde el punto de vista de la filosofía de la lógica, FUNC representa el límite entre las valuaciones funcionales y la no veritativo funcionalidad en el marco de las teorías físicas. FUNC nos conduce de forma directa a formalismos como el de las semánticas no deterministas.

Este no determinismo semántico, a su vez, se puede vincular con el indeterminismo ontológico y las discusiones metafísicas de la física cuántica. Por lo tanto, el análisis de FUNC repercute sobre un amplio abanico de temas lógico-filosóficos.

La relevancia que tiene la identidad lógica a nivel metafísico ha quedado explicitada para el caso de la Mecánica cuántica en la extensa bibliografía de Décio Krause (ver citas a lo largo del artículo). En esta dirección, nuestro estudio se centrará en el rol que la identidad tiene en los proyectores de los espacios de Hilbert. Que nos centremos en los proyectores se debe a que los mismos forman el lenguaje proposicional de la lógica cuántica. Es decir, vamos a centrarnos en la importancia que tiene contar con un lenguaje proposicional con variables que realmente sean variables de *individuo* a la hora de llegar a contradicciones que limiten las semánticas para nuestro retículo de proyectores cuánticos.

Hay que alertar al lector que la elección de los proyectores del Hilbert como lenguaje lógico proposicional, aunque representa la elección estándar, no está exenta de dificultades. En un artículo de 1970, Heelan argumenta que la lógica cuántica, entendida como la lógica de las proposiciones experimentales, es errónea (10). Su argumento cuestiona la legitimidad de la identificación inicial de los subespacios (cerrados) del Hilbert con las proposiciones experimentales. El problema radica en que la correspondencia entre proposiciones experimentales y subespacios (cerrados) no es biunívoca. Dado un subespacio S, no existe una única proposición experimental asociada a él, ya que este formalismo no cuenta con una base privilegiada.[1] Es decir, la contextualidad es la responsable de que esta asignación no sea unívoca (recomendamos la última sección de (34) al lector interesado). A pesar de este inconveniente, nuestro trabajo seguirá la línea tradicionalmente elegida.[2]

Históricamente, la indiscernibilidad estuvo asociada a las partículas cuánticas, que respetan estadísticas especiales como las de Bose-Einstein y Fermi-Dirac, en vez de la estadística clásica de Boltzmann. Esta indiscernibilidad entre partículas (substratums) es la que captura el formalismo original de cuasiconjuntos con átomos ($\mathfrak{Q}$). En nuestro caso, hablaremos de indiscernibilidad de los proyectores del Hilbert, que están asociados con proposiciones o propiedades de nuestro sistema. Es por esta razón que nos apoyaremos en una teoría de cuasiconjuntos sin átomos ($\mathfrak{Q}^-$), que captura mejor una ontología de propiedades indistinguibles. En esta ontología, no existe ningún substratum y los sistemas cuánticos están asociados a *Bundles* o paquetes de propiedades. De esta manera, la indistinguibilidad que nos interesa no se relaciona con la peculiaridad de las estadísticas cuánticas, sino con la contextualidad manifestada por el teorema de Kochen-Specker. Por lo tanto, el lector debe prestar atención a tal aplicación de la indiscernibilidad al nivel de los proyectores, en vez de al nivel de partículas.

Las conclusiones a las que arribemos tendrán fuertes implicaciones sobre dominios como, por ejemplo, ontologías de propiedades indiscernibles al estilo Interpretación Modal Hamiltoniana (27), la filosofía de los lenguajes lógicos en general, ya que nuestro trabajo abre las puertas al estudio de lenguajes con variables proposicionales indiscernibles, los formalismos Nmatriciales, brindando nuevas posibilidades semánticas, etc. Uno de los principales aportes de este artículo es brindar argumentos

[1] Esta dificultad podría ser encarada dentro del formalismo de la Interpretación Modal Hamiltoniana, donde existe una base privilegiada asociada al hamiltoniano del sistema cuántico.

[2] Agradezco a uno de los revisores anónimos por sugerir que tal dificultad sea explicitada.

ontológico-matemáticos a favor del uso de lenguajes con variables proposicionales indiscernibles en el marco de la física cuántica. Esta nueva libertad en el lenguaje, apoyada sobre funciones/valuaciones fundadas en la teoría de casi-conjuntos, mostrará un nuevo camino para evitar la paradoja KS. Es decir, contar con variables proposicionales indiscernibles permite utilizar valuaciones (en el marco de $\mathfrak{Q}^-$) que asignen valores de verdad indiscernibles, pero no idénticos. Esto permite evitar la contradicción, que surge por asignar *el mismo* valor de verdad a dos proposiciones cuánticas en diferentes contextos.

2. Fundamentos teóricos: $\mathfrak{Q}^-$ y Nmatrices

En esta sección, presentamos la teoría de casi-conjuntos sin átomos $\mathfrak{Q}^-$y la semántica Nmatricial.[3] Ambas son herramientas de importancia a la hora de tratar los presupuestos nombrados. Los casi-conjuntos nos permiten un acercamiento a la problemática sin el presupuesto de la identidad y las Nmatrices permiten trabajar sin tener en cuenta FUNC. Aunque en el presente trabajo estas herramientas se tratarán de forma separada, nuestro objetivo a medio plazo es contar con Nmatrices fundadas en $\mathfrak{Q}^-$.

2.1 $\mathfrak{Q}^-$: ¿una teoría de cuasiconjuntos sin átomos?

La teoría $\mathfrak{Q}$ (9) encierra dos tipos de átomos: M-átomos y m-átomos. Los M-átomos desempeñan el papel de los urelementos de Zermelo y para ellos vale la teoría usual de la identidad. En la interpretación pretendida, los m-átomos son el correlato formal de los entes cuánticos, bajo la hipótesis de que el concepto usual de *identidad* de la Lógica Clásica no vale para ellos. Los q-conjuntos son aquellas cosas que no son átomos y, entre ellos, existen algunos que validan los axiomas usuales de ZFA; los llamamos *conjuntos*. Así, hay q-conjuntos que son conjuntos y otros que no lo son. Tanto unos como otros *pueden admitir* un cardinal, que llamamos *casi-cardinal* (q-cardinal). Estos q-cardinales, introducidos como una noción primitiva son cardinales construidos por medio de conjuntos (en las versiones anteriores con átomos), y sabemos que la manera usual de definir cardinales es por medio de ordinales (13). Este fue de hecho un inconveniente para $\mathfrak{Q}$ y funcionó como motivación para la nueva teoría sin átomos. La teoría sin átomos viene a solucionar dos críticas realizadas a $\mathfrak{Q}$: a) que necesariamente debe contar con átomos o urelementos para diferenciarse de ZF[4] b) que sus q-cardinales, al ser introducidos de forma primitiva como ordinales de ZF, permitirían discernir los elementos de los qsets a través del orden impuesto por este ordinal límite (ver discusión en (22)).

$\mathfrak{Q}^-$ es una teoría de casi-conjuntos sin átomos (la teoría $\mathfrak{Q}^-$ es $\mathfrak{Q}$ sin los átomos). Para formular la teoría $\mathfrak{Q}^-$, postularemos la existencia de un universo $\mathfrak{B}$ (*Bereich*, según terminología de Zermelo) cuyos elementos son entidades de dos tipos: los *casi-conjuntos*, o *q-conjuntos*, y los *casi-cardinales*, o solamente *q-cardinales*. Los conjuntos son casi-conjuntos particulares para los cuales vale la Teoría Clásica de la Identidad (TCI).

[3] Casi-conjunto es la primera denominación que recibieron los quasi-conjuntos por parte del Profesor Newton da Costa. En honor a él, se denominaron de esa manera al presentar la teoría sin átomos en (22).

[4] Recordemos que la teoría de quaset QST de (6) se separa de ZF sin la necesidad de contar con átomos.

Usaremos dos tipos de variables individuales: $x, y, z, \ldots$ para conjuntos y q-conjuntos, pudiendo utilizarse predicados unarios S y Q para distinguirlos respectivamente, y $m, n, p, \ldots$ para los q-cardinales. Los conjuntos son q-conjuntos, pero no vale la recíproca. Para los q-conjuntos que no son conjuntos, no se aplica la teoría usual de la identidad (TCI), sino una relación más débil, llamada *indiscernibilidad*. Esta noción es representada por un predicado diádico '$\equiv$', que se aplica también a los conjuntos.[5]

Haremos uso de cuantificadores restringidos, así que por ejemplo $\forall_S x\varphi$ abrevia $\forall x(S(x) \to \varphi)$, mientras que $\exists_S x\varphi$ abrevia $\exists x(S(x) \wedge \varphi)$, siendo φ una fórmula cualquiera. Para los q-cardinales, usamos las variables propias de ellos.

Además de los predicados anteriores, entre los símbolos primitivos del lenguaje $\mathcal{L}^-$ de $\mathfrak{Q}^-$, tenemos los predicados diádicos $\in$ (pertenencia), $=$ (identidad), que se aplicará solo a conjuntos y q-cardinales, y $\equiv$ (indiscernibilidad, o indistinguibilidad). El símbolo relacional binario K es también primitivo, indicando q-cardinalidad. Así $K(x, m)$ dice informalmente que el q-conjunto (o conjunto) x tiene q-cardinal m. Sin embargo, tenemos que tener cuidado con los q-cardinales por las razones que serán expuestas a continuación. Cuando tratamos con conjuntos finitos, sus q-cardinales pueden ser pensados como números naturales definidos por medio de conjuntos de la manera usual (cardinales clásicos). Pero si tratamos con q-conjuntos sus q-cardinales no son cardinales en el sentido de ordinales límite.

Vamos a asumir que nuestro lenguaje tiene también los siguientes símbolos específicos: una constante individual $\overline{0}$, un símbolo funcional unario s y dos símbolos funcionales binarios $\otimes$ y $\oplus$. Los *términos* de nuestro lenguaje son las variables individuales $x, y, z, \ldots$ y $m, n, p, \ldots$, la constante $\overline{0}$, las expresiones de la forma $s(t)$, que denotaremos por st solamente, siendo t un término que se obtiene aplicando una cantidad finita de veces la operación s sobre $\overline{0}$ y, si t_1 y t_2 son términos de ese tipo, entonces $t_1 \oplus t_2$ y $t_1 \otimes t_2$ también lo son. Para la definición de fórmula atómica en $\mathfrak{Q}^-$, ver (22).

Los postulados de $\mathfrak{Q}^-$ son divididos en tres grupos: lógicos, relativos a la casi-cardinalidad y los propios de la teoría sin átomos. Presentaremos sólo los más pertinentes de cada grupo (para el conjunto total de axiomas, ver (22).

Grupo I – La lógica Sean α, β y γ son fórmulas y $\neg$, $\to$ y $\forall$ conectivos primitivos:

(1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(2) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$

(3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(4) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\beta)$, donde x no aparece libre en α.

(5) $\forall_S x(x = x)$

(6) $\forall_S x \forall_S y(x = y \to (\alpha(x) \to \alpha(y))$

(7) $\forall m(m = m)$

[5] En $\mathfrak{Q}$ (teoría con átomos) se define la *identidad extensional*, que se aplica a M-átomos y a casi-conjuntos y que tiene las propiedades de la identidad usual. En $\mathfrak{Q}$, solamente los m-átomos no obedecen las propiedades de la identidad clásica.

(8) $\forall m \forall n (m = n \to (\alpha(m) \to \alpha(n))$

Las condiciones (6) y (8) tienen las restricciones usuales.

Para los conjuntos y para los q-cardinales, vale la lógica clásica de primer orden con identidad. Sin embargo, para los q-conjuntos, vale la lógica elemental clásica *sin* identidad. Los demás conectivos proposicionales y el cuantificador existencial son definidos de forma habitual. El carácter "no-reflexivo" de esa lógica está en que la noción usual de identidad no se aplica para todos los objetos de los cuales se puede hablar.

Grupo II - q-cardinales Los axiomas para los q-cardinales se asemejan a los axiomas para la aritmética elemental presentados en (29, Cap.3). Presentamos los respectivos axiomas a continuación recordando que $m, n, p, \ldots$ son variables para q-cardinales. Como es usual, $m \neq n$ abrevia $\neg(m = n)$ y así para otras situaciones similares.

(1) $\forall m (\overline{0} \neq sm)$

(2) $\forall m \forall n (sm = sn \to m = n)$

(3) $\forall m (\overline{0} \oplus m = m)$

(4) $\forall m \forall n (m \oplus sn = s(m \oplus n))$

(5) $\forall m (\overline{0} \otimes m = \overline{0})$

(6) $\forall m \forall n (m \otimes sn = (m \otimes n) \oplus m)$

(7) $\forall m (m^{\overline{0}} = s\overline{0})$

(8) $\forall m \forall n (m^{sn} = m^n \otimes m)$

(9) Si P es una propiedad que se aplica a q-cardinales, entonces

$$P(\overline{0}) \wedge \forall m (P(m) \to P(sm)) \to \forall m P(m).$$

De esos postulados, podemos derivar resultados similares a los que derivan Mendelson *op.cit.* y Franco de Oliveira en (2004), así como definir cosas habituales de la aritmética en términos de q-cardinales, como $(\overline{2})^n$, que serán usados abajo y cuyo sentido se torna bastante obvio.

Definición 1 (q-cardinales) *Denotaremos los q-cardinales de la siguiente manera:*

$\overline{1} := s\overline{0}$

$\overline{2} := s\overline{1}$

etc.

Así, podemos escribir, como hicimos arriba, cosas como $K(x, \overline{1})$, $K(x, \overline{2})$ o, más generalmente, $K(x, s^n\overline{0})$.

Grupo III - conjuntos y q-conjuntos

(1) Los axiomas de ZFC para los conjuntos.

(2) $\forall x(S(x) \to Q(x))$

Debido a (1), podemos definir los *números naturales* en términos de conjuntos de la manera usual (al estilo de von Neumann): $0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$, etc. Sin embargo, los q-cardinales *no son* los números naturales, o sea, no son ordinales. La idea es *no considerar* los q-cardinales como números naturales, así cuando atribuimos un q-cardinal a un q-conjunto, no le estaremos asociando un ordinal, lo que haría que sus elementos puedan ser discernidos por medio de la biyección.

Definición 2 (Casi-conjuntos legítimos)

$$L(x) := \neg S(x)$$

> La definición anterior introduce los *q-conjuntos "puros"*, o sea, los q-conjuntos que no son conjuntos. A estos q-conjuntos, también se los puede denominar *legítimos* o *estrictos*.

Tenemos entonces los siguientes axiomas, recordando que variables como x pueden representar un q-conjunto legítimo o un conjunto:

(2) $\forall_S x \forall_S y(x \equiv y \to x = y)$

(3) $\exists_L x(x \equiv x) \wedge \forall x(x \equiv x)$

> Este axioma cumple la misma función que el *Axioma de conjunto vacío* cumple en ZF, esto es, garantiza la existencia de un qset *legítimo*. Además, por supuesto, de decretar la reflexividad de la indiscernibilidad.

(4) $\forall x \forall y(x \equiv y \to y \equiv x)$

(5) $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \to x \equiv z)$

(6) $\forall y(S(y) \to \forall x(x \in y \to S(x)))$.

> Este axioma dice que los elementos de conjuntos son conjuntos. Así, un q-conjunto puede pertenecer a un conjunto si y solo si es un conjunto.

(7) [*Esquema de Separación*] Sea α una fórmula de $\mathcal{L}^-$. Entonces

$$\forall x \forall m(K(x,m) \to \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w \forall n(w \in x \wedge z \equiv w \wedge K(y,n) \wedge n \leq m) \wedge \alpha(z)))$$

> Este axioma nos permitirá formar q-conjuntos a partir de un q-conjunto dado. La formulación de este axioma en $\mathfrak{Q}^-$no es estándar, el lector debe prestar atención. No estaremos formando q-conjuntos de elementos que pertenecen a un q-conjunto dado, porque sin la identidad, no podríamos saber si los elementos tomados son de hecho *aquellos* elementos. Así, la idea es la siguiente: dado un q-conjunto x con un q-cardinal m y una condición φ (fórmula de $\mathcal{L}^-$), formamos un q-conjunto con un q-cardinal no mayor que m, cuyos elementos son indiscernibles de elementos de x que satisfacen la condición φ.[6]

[6] La restricción a que la q-cardinalidad sea menor que m podría ser rechazada, pero no haremos eso.

Ese q-conjunto y será denotado del siguiente modo: $[z : \alpha(z)]_x$, observando que su q-cardinalidad no debe exceder la q-cardinalidad de x. En el axioma anterior, $n \leq m$ debe ser interpretado como $\exists p(m = n \oplus p)$.

Dados los q-conjunto x, z, tales que $z \in x$, y sea α la fórmula definida por $\alpha(w) \leftrightarrow w \equiv z$, del axioma (8) inferimos la existencia de un q-conjunto $[w : z \in x \wedge w \equiv z]_x$, que es una *clase de equivalencia* de indistinguibles de z que eventualmente, pero no necesariamente, están en x.[7]

El Esquema de Separación nos permite mostrar la existencia de q-conjuntos sin elementos, que llamaremos *vacíos*, pero sin la identidad no podemos probar su unicidad. Sin embargo, debido al Axioma de la Extensionalidad Débil, que veremos abajo, podremos probar que todos esos vacíos son indiscernibles.

El modo de inferir la existencia de un q-conjunto sin elementos es adoptar una fórmula contradictoria, como $x \not\equiv x$ en el Esquema de la Separación. Esto podemos hacerlo, porque nuestra axiomática nos garantiza la existencia de al menos un casi-conjunto puro. Denotaremos los casi-conjuntos vacíos indiferentemente con '$\emptyset$'. Como no se puede utilizar la identidad para los q-conjuntos vacíos, y dado que los postulados de ZFC que valen para los conjuntos garantizan la existencia de un *conjunto* vacío, la única relación que tenemos entre los q-conjuntos vacíos y el conjunto vacío es la indiscernibilidad.

(8) [*Unión*]

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow \exists w' \exists w''((w' \in x \wedge w \equiv w') \vee (w'' \in y \wedge w \equiv w'')) \wedge \\ \forall m \forall n (K(x, m) \wedge K(y, n) \rightarrow K(z, p) \wedge p \leq m \oplus n))\end{aligned} \tag{1}$$

De forma análoga a ZF, el axioma de unión para q-conjuntos puede ser formulado para obtener un q-conjunto $\bigcup x$ a partir de un q-conjunto x, cuyos elementos son q-conjuntos no vacíos. Dados x e y, el axioma dice que existe un q-conjunto, denotado por $x \cup y$, cuyos elementos son indiscernibles de los elementos de x o de y, y que su q-cardinalidad no es mayor que la suma de las q-cardinalidades de x e y. Con el axioma de unión, podemos reunir esas clases de modo que formemos el conjunto cociente $x/_{\equiv}$, que será usado más adelante. Remarquemos que los elementos del q-conjunto unión $x \cup y$ no necesitan ser elementos de ninguno de esos conjuntos, alcanzando con que sean indiscernibles de los elementos de ellos.

Definición 3 (Unitario Débil) *Sea w un q-conjunto y sean x, y elementos de w. Por medio de la condición $\alpha(t) \leftrightarrow t \in w \wedge t \equiv x$, obtenemos por Separación el q-conjunto de los indiscernibles de x que pertenecen a w, que denotamos $[x]_w$.*

Entonces nuestro próximo axioma se puede formular así:

(9) **Axioma de Par**

$$\forall_L w \forall x \forall y (x \in w \wedge y \in w \rightarrow \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t \in [x]_w \vee t \in [y]_w)))$$

El caso donde w es un conjunto ya está considerado en el axioma de par de ZFC, por eso cuantificamos sobre qsets puros. En una teoría usual de

[7] Recordamos que el q-cardinal de esa clase no es más grande que el q-cardinal de x.

conjuntos, el axioma de par nos dice que, dados dos conjuntos cualesquiera x e y, existe un conjunto que tiene a ellos como elementos y nada más. Pero ese 'nada más' requiere de la identidad. En $\mathfrak{Q}^-$, lo único que podemos hacer es requerir que haya un q-conjunto con elementos indiscernibles de x o y, pero en ese caso perdemos, por así decir, el control de la cantidad de elementos, porque no hay ninguna restricción sobre la cantidad de elementos indiscernibles de un elemento dado. Así, para evitar que hablemos de *clases* (en particular de *clases propias*), tomamos los indiscernibles de x y de y de algún q-conjunto w dado previamente que tenga un q-cardinal dado. Es claro que no hay, en principio, nada que indique la q-cardinalidad de ese q-conjunto, salvo que no supera la q-cardinalidad de w. Si $x \equiv y$, incluso puede ser $\overline{1}$. El axioma podría ser mucho más general y decir que formamos $[x, y]_w$, no tomando elementos que estén en w, sino que sean indiscernibles de elementos de w, mientras limitemos su q-cardinalidad para no formar q-clases propias.

Denotamos ese q-conjunto por

$$[x, y]_w.$$

El unitario débil puede ser establecido por una definición, como la siguiente:

Definición 4 (Unitario Débil)

$$[x]_w := [x, x]_w.$$

Retornando al q-conjunto cociente, note que utilizando el axioma de arriba, podemos formar los elementos del q-conjunto $t/_{\equiv}$, a saber, $[x]_t$, $[y]_t$, etc., para $x, y, \ldots \in t$.

Definición 5 (Par ordenado débil) *El qset par ordenado débil $\langle x, y\rangle_w$ se define como*

$$\langle x, y\rangle_w := [[x]_w, [x, y]_w]_w$$

Definición 6 (Producto cartesiano) *Sean z y w dos qsets. El producto cartesiano $z \times w$ se define como*

$$z \times w := [\langle x, y\rangle_{z\cup w} : x \in z \wedge y \in w]$$

Las funciones y relaciones no se pueden definir de manera habitual, ya que ahora involucramos entes indiscernibles; un mapeo puede no distinguir entre argumentos y valores de salida. Por lo tanto, se deben proporcionar definiciones más amplias para ambos conceptos, que se reduzcan a las estándar cuando son restringidas a entidades clásicas.

Definición 7 (Quasi-relación) *Un qset R es una quasi-relación binaria entre los qsets z y w si sus elementos son pares ordenados débiles de la forma $\langle x, y\rangle_{z\cup w}$, con $x \in z$ y $y \in w$.*

Es decir, si $R \subseteq z \times w$.

Definición 8 (Quasi-función) *Decimos que f es una quasi-función entre los qsets z y w si y solo si f es una quasi-relación entre z y w, tal que para todo $x \in z$ existe un $y \in w$ que cumple lo siguiente: si $\langle x, y\rangle_{z\cup w} \in f$, $\langle u, v\rangle_{z\cup w} \in f$, y $x \equiv u$, entonces $y \equiv v$.*

Una quasi-función asigna elementos indiscernibles a elementos indiscernibles. Se pueden definir tipos más específicos de funciones, es decir, inyecciones, sobreyecciones y biyecciones (ver capítulo 7 de (9)). Más adelante usaremos este concepto para aplicarlo a las valuaciones en el marco de la contradicción KS.

Presentamos ahora el axioma que produce que $\mathfrak{Q}^-$no sea una teoría estrictamente extensional.

(10) [*Axioma de la Extensionalidad Débil*, AED]

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall n (((\forall z \in x/_{\equiv})(\exists w \in y/_{\equiv})(K(z,n) \to K(w,n)) \wedge \\ \forall u \forall v (u \in z \wedge v \in w \to u \equiv v) \\ \wedge (\forall w \in y/_{\equiv})(\exists z \in x/_{\equiv})(K(w,n) \to K(z,n) \\ \wedge \forall u \forall v (u \in w \wedge v \in z \to u \equiv v))) \to x \equiv y)\end{aligned} \tag{AED}$$

Note el lector que si utilizamos la relación de identidad $(=)$ en lugar de la relación de indiscernibilidad, entonces las clases de equivalencia de $x/_{\equiv}$ serán unitarias (lo mismo con $y/_{\equiv}$) y el axioma se reduce al Axioma de Extensionalidad de ZFC. En ese caso, $x \equiv y$ no es más que $x = y$. Este axioma dice que si los q-conjuntos x e y tienen 'la misma cantidad' (dada por q-cardinales) de elementos indiscernibles, entonces x y y son indiscernibles. El axioma EAD permite probar lo que dijimos anteriormente, que todos los q-conjuntos sin elementos son indiscernibles. La prueba es inmediata, recordando que el q-cardinal de esos q-conjuntos es $\overline{0}$.

Definición 9 (Sub-q-conjuntos) *Definimos sub-q-conjuntos de dos modos:*

(1) $x \subseteq y := \forall z (z \in x \to z \in y)$.

(2) $x \subseteq^* y := \forall z (z \in x \to \exists w \forall m \forall n (w \in y \wedge z \equiv w \wedge K(x,m) \wedge K(y,n) \to m \leq n))$

Podemos decir que $x \subseteq y$ si todos los elementos de x son también elementos de y, como es usual. Pero tendremos un problema. Para saber si un determinado elemento $z \in x$ es elemento de y, debemos ser capaces de mostrar (designar) un elemento $w \in y$ que sea *idéntico* a z, y eso requiere la identidad. Por ese motivo, introdujimos dos definiciones de sub-q-conjuntos; la nueva definición dice que dado un q-conjunto y, podemos formar un q-conjunto x (por ejemplo, usando el Esquema de la Separación) con elementos indiscernibles de elementos de y, mientras que la q-cardinalidad de x no supere la q-cardinalidad de y.

Eso tiene consecuencias interesantes. Por ejemplo, del Esquema de Separación, dado un q-conjunto x y una condición α, cuando inferimos la existencia de un q-conjunto *de elementos de* x que obedecen α, en verdad deberíamos decir que obtenemos un q-conjunto de elementos que son indiscernibles de los elementos de x que obedecen α. Por lo tanto, si llamamos y a ese q-conjunto, deberíamos escribir $y \subseteq^* x$. De ahora en adelante, vamos escribir **subq** para indicar sub-q-conjuntos en el sentido de $\subseteq$ y **subq*** para los q-conjuntos formados en el sentido de $\subseteq^*$.

Algunas consecuencias de la definición precedente, que se prueban fácilmente, son las siguientes:

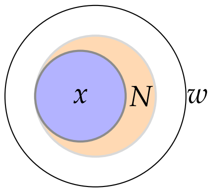

Figura 1: Un q-conjunto x y su nube N relativa al q-conjunto w.

1. $x \subseteq y \rightarrow x \subseteq^* y$
2. $x \subseteq^* y \wedge y \subseteq^* x \leftrightarrow x \equiv y$

Es inmediato verificar que si x es un conjunto, entonces $x \subseteq y \leftrightarrow x \subseteq^* y$.

Utilizando este nuevo concepto, podemos introducir una nueva relación de pertenencia, que la denotaremos mediante $\in^*$:

Definición 10 (Pertenencia débil) $x \in^* y := \exists w(w \in y \wedge w \equiv x)$

También se prueba que si x o y son conjuntos, entonces $x \in y \leftrightarrow x \in^* y$.

Con esa noción, podemos hablar de *elementos potenciales* de un q-conjunto del modo siguiente. Suponga que tenemos un q-conjunto w y que x sea uno de sus sub-q-conjuntos. Definimos entonces la *nube* de x relativa a w como el qset formado por los elementos de w que tienen indiscernibles en x, esto es, que 'podrían' estar en x.[8]

Definición 11 (Nube de un q-conjunto) *Sea w un q-conjunto y sea $x \subseteq w$. La nube de x relativa a w es el q-conjunto $N(x, w)$ definido como sigue:*

$$[y \in w : \exists z \in x \wedge z \equiv y]$$

Claro que es deseable que la q-cardinalidad de x sea mantenida. Así, su nube sería algo como su extensión a w.

Si consideramos todas las nubes de los elementos de un q-conjunto w, podemos definir operaciones entre ellas, como la intersección, el complemento y la unión de nubes. Lo que obtenemos es un *álgebra de nubes* cuya estructura no es booleana, como pasaría en el caso de subconjuntos de un conjunto clásico (ver (30)).

(11) $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.

Si x es un q-conjunto, entonces existe un q-conjunto, denotado por $\mathcal{P}(x)$, que tiene como elementos los **subq** de x.

Definición 12 (Unitarios Fuertes) *Sea x un q-conjunto con q-cardinal n distinto de $\overline{0}$. Si $y \in x$, decimos que un q-conjunto es un* unitario fuerte *de y relativo a x, y lo denotamos por $[\![y]\!]_x$, si su q-cardinal es $\overline{1}$.*

A esta altura, el lector atento podría preguntarse: si α es una fórmula y x satisface α, ¿todo y, tal que $y \equiv x$, la satisface también? La relación de indiscernibilidad no implica necesariamente substitutividad. Observe que si esto fuera cierto, dado que

8 La noción de nube de un q-conjunto fue introducida en (20).

la indiscernibilidad es reflexiva, sería la identidad estándar.[9] Por lo tanto, debemos demostrar que este no es el caso. Consideremos un unitario fuerte x cuyo único elemento se denota por y (recuerde que no hace sentido preguntarse sobre la identidad de y), por lo que podemos tomar α como $y \in x$. Por supuesto, no podemos saber qué entidad es y, pero, como $K(x, \bar{1})$, sabemos que hay algo en el q-conjunto y que 'no hay nada más allí'. Supongamos que $z \equiv y$, ¿podemos concluir que $z \in x$ sólo porque z (sea lo que fuere) es indiscernible de y? Por supuesto que no. Esto implicaría que x contendría como elementos todos los indiscernibles de y, lo que significaría que su q-cardinalidad no sería uno, ya que habría más indiscernibles de x disponibles. En otras palabras, de $y \in x$ y de $z \equiv y$, no podemos concluir que $z \in x$. Entonces, la relación de indiscernibilidad no es una congruencia, siendo distinta de la relación de identidad estándar. Esto será de crucial importancia a la hora de analizar la contradicción KS en 5.

2.2 Nmatrices

Expondremos brevemente las principales características de las Nmatrices. Lo más importante para nuestro trabajo es que este sistema brinda una semántica donde sus valuaciones no son necesariamente homomorfismos. Esta característica será de crucial importancia en nuestro trabajo. Para presentaciones completas del tema, recomendamos (1; 2). La novedad de las Nmatrices consiste en que este formalismo extiende la semántica algebraica multivaluada habitual de los sistemas lógicos al importar la idea de cálculos no deterministas, permitiendo que el valor de verdad de una fórmula se elija de forma no determinista a partir de un conjunto dado de opciones. Las Nmatrices han demostrado ser una herramienta poderosa, cuyo uso conserva todas las ventajas de las matrices ordinarias multivaluadas, al mismo tiempo que es aplicable a una gama mucho más amplia de lógicas. De hecho, hay muchas lógicas no clásicas (proposicionales) que, si bien no tienen matrices características finitas de múltiples valores, admiten Nmatrices finitas y, por lo tanto, son decidibles.

2.2.1 Matrices deterministas

En lo que sigue, L es un lenguaje proposicional y Frm_L denota al conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje. Las metavariables φ, ψ,..., recorren L-fórmulas, mientras que Γ, Δ,..., se utilizarán para conjuntos de L-fórmulas. El método general estándar para definir la lógica proposicional se basa en el uso de matrices deterministas (posiblemente de muchos valores):

Definición 13 *Una matriz para L es una tupla*

$$P = \langle V; D; O \rangle$$

donde

- *V es un conjunto no vacío de valores de verdad.*
- *D (valores designados) es un conjunto propio no vacío de V.*

[9] Recordando que los axiomas usuales de la identidad son la reflexividad y la substitutividad ((29)).

- *Para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L, O incluye una función de interpretación $\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to V$.*

Una valuación parcial en P es una función v, que va a V desde un subconjunto $\mathcal{W} \subseteq Frm_L$ cerrado bajo subfórmulas, tal que, para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L y para toda $\psi_1, ..., \psi_n \in \mathcal{W}$, se cumple lo siguiente

$$v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) = \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n)) \tag{2}$$

2.2.2 Matrices no deterministas (Nmatrices)

Ahora pasamos al caso no determinista. La principal diferencia es que, en oposición a las matrices deterministas, las no deterministas, dados sus valores de verdad de entrada, asignan un conjunto de valores posibles (en lugar de uno solo valor).

Definición 14 *Una matriz no determinista (Nmatriz) para L es una tupla $M = \langle V, D, O \rangle$, donde:*

- *V es un conjunto no vacío de valores de verdad.*
- *$D \in \mathcal{P}(V)$ (valores de verdad designados) es un subconjunto propio no vacío de V.*
- *Para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L, O incluye la correspondiente función de interpretación*

$$\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$$

Definición 15 *Una valuación parcial dinámica en M es una función v sobre un conjunto cerrado bajo subfórmulas $\mathcal{W} \subseteq Frm_L$ a V, tal que, para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L y para toda $\psi_1, ..., \psi_n \in \mathcal{W}$, se cumple lo siguiente:*

$$v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) \in \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n))$$

Una valuación parcial en M es llamada valuación (total) si su dominio es Frm_L.

Una valuación (parcial) estática en M es una valuación (parcial) dinámica que satisface además el siguiente principio de composicionalidad (o funcionalidad) (definido en algún $\mathcal{W} \subseteq Frm_L$): para cada conectivo n-ario $\diamondsuit$ de L y para cada $\psi_1, ..., \psi_n, \varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{W}$, si $v(\psi_i) = v(\varphi_i)$ $(i = 1, ..., n)$, entonces

$$v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) = v(\diamondsuit(\varphi_1, ..., \varphi_n))$$

Es importante señalar que las matrices clásicas (deterministas) corresponden al caso en que cada $\widetilde{\diamondsuit} : V^n \to \mathcal{P}(V)$ es una función que toma valores de singletons (singulete). En este caso no hay diferencia entre valuaciones estáticas y dinámicas, tenemos determinismo (funcional).

Para comprender la diferencia entre matrices ordinarias y Nmatrices, recordamos que en el caso determinista, el valor de verdad asignado por una valuación v a una fórmula compleja se define de la siguiente manera: $v(\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)) = \widetilde{\diamondsuit}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n))$. El valor de verdad asignado a $\diamondsuit(\psi_1, ..., \psi_n)$ está unívocamente determinado por los valores de verdad de sus subfórmulas: $v(\psi_1), ..., v(\psi_n)$. Sin embargo, este no es el caso de las

Nmatrices: en general, los valores de verdad de $\psi_1, ..., \psi_n$ no determinan unívocamente el valor asignado a $\Diamond(\psi_1, ..., \psi_n)$, ya que diferentes valuaciones que tengan los mismos valores de verdad para $\psi_1, ..., \psi_n$ pueden asignar diferentes elementos del conjunto de interpretación $\widetilde{\Diamond}(v(\psi_1), ..., v(\psi_n))$ a $\Diamond(\psi_1, ..., \psi_n)$. Por lo tanto, las semánticas no deterministas de Nmatrices no cumplen veritativo funcionalidad, en oposición a las semánticas matriciales. En la tabla 1, se muestran algunas diferencias entre las matrices y las Nmatrices. Ahora, revisaremos las definiciones estándar de consecuencia lógica.

Cuadro 1: Matrices deterministas vs Nmatrices.

	Matrices deterministas	**Nmatrices**
Conjunto de valores de verdad	V	V
Conjunto de valores designados	$D \subset V$	$D \subset V$
Conectivos $\Diamond$	$\widetilde{\Diamond} : V^n \to V$	$\widetilde{\Diamond} : V^n \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$
Valuaciones	No dinámicas	Posiblemente dinámicas / no estáticas.
Veritativo funcional	Sí	No necesariamente

Definición 16 *Una valuación (parcial) v en M satisface una fórmula ψ ($v \models \psi$) si ($v(\psi)$ está definido y) $v(\psi) \in D$. Decimos que es un modelo de Γ ($v \models \Gamma$) si satisface cada fórmula de Γ.*

Decimos que ψ es dinámicamente (estáticamente) válida en M, en símbolos $\models^d_M \psi$ ($\models^s_M \psi$), si $v \models \psi$ para cada valuación dinámica (estática) v en M.

La relación de consecuencia dinámica (estática) inducida por M es definida de la siguiente manera: $\Gamma \vdash^d_M \Delta$ ($\Gamma \vdash^s_M \Delta$) si cada modelo dinámico (estático) v en M de Γ satisface algún $\psi \in \Delta$.

Obviamente , la relación de consecuencia estática incluye a la dinámica, es decir, $\vdash^d_M \subseteq \vdash^s_M$. Además, para las matrices ordinarias, tenemos que $\vdash^s_M = \vdash^d_M$.

Teorema 1 *Sea M una Nmatriz de dos valores que tiene al menos una operación no determinista. Entonces no hay una familia finita de matrices ordinarias finitas F, tales que $\vdash^d_M \psi$ sii $\vdash_F \psi$.*

Lo importante para nuestros fines es que el poder expresivo de la semántica dinámica basado en Nmatrices es más fuerte que el de matrices ordinarias.

3. Teorema de Kochen-Specker: presupuestos

El teorema de Bell-Kochen-Specker (BKS), por lo general llamado teorema de Kochen-Specker (KS), es más que un simple corolario del teorema de *Gleason*. Tiene importancia como resultado independiente, es decir, es un resultado con entidad propia acerca de la imposibilidad de un tipo o familia de Teorías de Variables Ocultas (VO) en la Mecánica cuántica. Este resultado tiene incidencia directa sobre la determinación de la máxima álgebra de Boole que se puede embeber en un retículo de proposiciones cuánticas.

3.1 Condición FUNC

Lo presentado en esta sección sigue los lineamientos de (4). Consideremos una teoría de variables ocultas (VO) en la que cualquier sistema individual tiene un conjunto de variables que junto con otras variables asociadas al aparato de medición determinan (de alguna forma no especificada) el resultado de cualquier experimento sobre ese sistema individual. Denominaremos "valores de VO" a los valores que las VO determinan para cada experimento posible. Supongamos que en nuestra teoría de variables ocultas los *valores de VO* satisfacen las siguientes restricciones:

(BKS1) Definitud a priori: un sistema individual puede tener simultáneamente valores de VO precisos para dos observables no compatibles, B y β, aunque estos no se puedan medir conjuntamente, es decir, no se pueda preparar un estado con valores bien definidos para ambos.

(BKS2) No contextualidad: el valor que las VO asocian a la medida de un observable $\mathcal{A}$ en un sistema individual es independiente de que otros observables compatibles se midan conjuntamente con $\mathcal{A}$.

$$v(\mathcal{A}) = v(\mathcal{A}_{A,B}) = v(\mathcal{A}_{A,\beta}).$$

Restricciones *sugeridas* por la MC sobre los valores de VO.

(BKS3) Si la medida de un observable $\mathcal{A}$ sobre un conjunto de sistemas idénticamente preparados da resultados en un conjunto discreto de valores (espectro del operador autoadjunto A), el valor asociado a ese valor en VO, que denotaremos $v(A)$, debe ser uno de tales valores para cualquier sistema individual del conjunto.

(BKS4) Sea $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ...\}$ un conjunto de observables mutuamente compatibles, y supongamos que los operadores que los representan satisfacen cierta relación funcional

$$f_{(A,B,C,..)} = 0.$$

El resultado de cualquier medida conjunta de estos observables sera (según MC) un conjunto de valores propios $\{a, b, c, ...\}$, que satisfacen

$$f_{(a,b,c,...)} = 0.$$

(BKS4) Establece que cualquier conjunto de VO para esos observables debe satisfacer la misma relación

$$f(v(A), v(B), v(C), ...)) = 0$$

Teorema 2 (BKS) *Para sistemas físicos descritos en MC por espacios de Hilbert de dimensión mayor o igual que tres, no existe ninguna teoría de variables ocultas (VO) que satisfaga a la vez (BKS1), (BKS2), (BKS3) y (BKS4).*

Las hipótesis (BKS3) y (BKS4), que hemos llamado "restricciones sugeridas por MC", aunque razonables, no son inevitables. Existen teorías de variables ocultas, como la Mecánica bohmiana (ver (35)), compatibles con la MC en donde estos supuestos no se cumplen. La mecánica de David Bohm es una teoría de variables ocultas que no cumple (BKS1), (BKS3) ni (BKS4), a pesar de ser empíricamente equivalentes a la Mecánica cuántica estándar. (BKS4) es generalmente conocida como la condición FUNC, ya que le impone cierta funcionalidad a los valores asociados con los observables.

Presentaremos otra formulación alternativa de este teorema. En función de los intereses de esta sección (restringiendo nuestro dominio a los retículos cuánticos) y utilizando la terminología de los espacios de Hilbert, podríamos reescribir la definición de *función clásica de verdad*:

Definición 17 (Valuación clásica) *Una función $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{0, 1\}$ con la propiedad de que $\sum_i v(\hat{P}_i) = 1$ para toda familia ortogonal $\{\hat{P}_i\}$ de elementos unidimensionales de $\mathbb{P}$ (conjunto de proyectores del Hilbert) que satisfaga $\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$, esto es, que descompongan la identidad, es llamada función de verdad clásica o función veritativo funcional clásica.*

El teorema BKS es equivalente a la siguiente afirmación: no existe una función $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{0, 1\}$, con la propiedad de que $\sum_i v(\hat{P}_i) = 1$ para toda familia ortogonal $\{\hat{P}_i\}$ de elementos unidimensionales de $\mathbb{P}$ que satisfaga $\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$.

3.2 La identidad de los proyectores: implicaciones filosóficas

El tema de la identidad repercute directamente sobre (BKS2), ya que el valor que un observable B toma en un contexto puede cambiar, no necesariamente por su dependencia con los demás proyectores asociados al contexto, sino porque, en el nuevo contexto, la valuación toma de entrada un observable indiscernible B', no ya B. Por lo tanto, el valor de salida, suponiendo que los demás observables no son tomados en cuenta para valuar B, no será ya idéntico al primer valor, sino indiscernible de él. La dependencia funcional de los demás observables no entra de forma explícita, sino a través del observable B, que no conserva su identidad al cambiar de contexto. Podríamos expresar lo anterior, dentro del formalismo estándar, diciendo que en (BKS2) debe considerarse la función $v(B_{(A,\beta,\ldots)})$ en vez de $v(B)$, para explicitar la dependencia con el contexto. Sin embargo, nuestro enfoque al problema no irá por ese lado, sino que tendrá en cuenta un formalismo de conjuntos no estándar, esto es, $\mathfrak{Q}^-$.

El estatuto de individuo de los proyectores del Hilbert es un presupuesto importante para arribar a la contradicción KS. Esto es una consecuencia directa de la estructura (meta)matemática y lógica que se encuentra detrás del formalismo de espacios vectoriales: la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF), junto con la Lógica Clásica de primer orden con identidad (LPO) constitutiva de su metalenguaje. ZF puede ser considerada una estructura rígida, esto es, una estructura cuyo único automorfismo es la identidad. Cualquier estructura deformable (no rígida) dentro del marco de ZF puede ser extendida a una estructura rígida (ver (13)). Esto tiene como consecuencia que no existan entes genuinamente indiscernibles (no individuos), como los entes cuánticos, en una estructura como ZF.[10]

En términos matemáticos, si quisiéramos capturar esta propiedad de las entidades cuánticas, no deberíamos ser capaces de distinguir las cosas por una propiedad o

[10] La Mecánica cuántica es compatible también con una ontología de individuos, al igual que la Mecánica bohmiana, donde las partículas tienen asociada una trayectoria (35). El formalismo cuántico subdetermina la ontología. Así como los "hechos empíricos" subdeterminan la teoría física (24), las teorías físicas subdeterminan su ontología. Nuestro trabajo adopta una ontología de no individuos para el formalismo cuántico.

una relación. Si utilizamos un marco matemático estándar como una teoría de conjuntos estándar (ZF, NBG, NF, etc.), entonces la distinción siempre es posible. El problema con el uso de un marco estándar es que podemos considerar elementos indiscernibles solo dentro de una estructura deformable (no rígida), es decir, una estructura que admita automorfismos no triviales. Pero esta es una solución ficticia, ya que está probado que cada estructura dentro de ZF (o NBG, NF, etc.) puede extenderse a una estructura rígida, donde elementos aparentemente indistinguibles son discernibles. Además, todo el universo de conjuntos en una teoría como ZF es rígido, esto es, las teorías de conjuntos estándar son teorías de individuos. Sus variables son individuales y sus cuantificadores siempre abarcan dominios de individuos.

El principal problema con el uso de las matemáticas estándar (basadas en la lógica clásica) para describir no individuos es que cualquier objeto a siempre puede discernirse de cualquier otra entidad b. Tomemos el singleton $\{a\}$ y definamos la identidad de a por $I_a(x) := x \in \{a\}$. Esto hace que solo a tenga esta propiedad, por lo que habrá una diferencia con cualquier otro objeto b, es decir, con cualquier otra entidad que no satisfaga I_a. Esto es típico de las matemáticas estándar, y se espera que así sea, ya que la teoría fue diseñada para tratar con individuos. Por supuesto, podemos imitar indiscernibles en tales marcos confinándolos a estructuras deformables (no rígidas). Pero esto es un truco, ya que en teorías de conjuntos como ZFC, cada estructura puede extenderse a una estructura rígida. En la estructura extendida, nos damos cuenta de que la entidad supuestamente indiscernible es en realidad un individuo. Recomendamos (21) al lector interesado.

Para dejar en evidencia el uso de la identidad en el marco de la contradicción KS, en el próximo capítulo, analizaremos un ejemplo presentado en (7).

4. Retornando al teorema de Kochen-Specker

El teorema KS depende explícitamente del carácter no booleano del retículo de proyectores del Hilbert ($\mathcal{L}(\mathcal{H})$). Kochen y Specker pretendían estudiar la posibilidad de encontrar variables ocultas para la mecánica cuántica. Se centraron en una familia muy particular de modelos de variables ocultas. Es decir, tomaron como modelo la relación entre la mecánica estadística clásica y la termodinámica. El resultado de su investigación es que no puede existir una teoría de variables ocultas de este tipo para el caso cuántico.[11]

En la mecánica estadística clásica, hay un espacio de estados oculto (es decir, no observable) Ω que posee microestados $\lambda \in \Omega$, y existe una distribución de probabilidad $p(\lambda)$ (que define el estado probabilístico del sistema). Para cada observable macroscópico A, se asigna una variable aleatoria $f_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal manera que $\langle A \rangle = \int_\Omega f_A(\lambda) p(\lambda) d\lambda$. En otras palabras, los valores de los observables macroscópicos se pueden calcular como valores medios de variables aleatorias definidas sobre Ω utilizando las fórmulas probabilísticas habituales. Observe que cada $\lambda \in \Omega$ asigna un valor v_A a cada observable A de acuerdo con la fórmula $v_\lambda(A) = f_A(\lambda)$. Y esta asignación es tal que se satisface una condición funcional en el siguiente sentido: el valor asignado a una función de un observable está dado por la función evaluada en

[11] Recordemos que el teorema no cubre todo el abanico de posibles teorías de variables ocultas. Por ejemplo, la Mecánica bohmiana queda fuera del alcance de este teorema.

el valor del observable dado. En fórmulas, esta condición se lee

$$B = G(A) \implies v_\lambda(B) = g(v_\lambda(A)) \tag{3}$$

para todo $\lambda \in \Omega$, donde $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ es una función de Borel que mapea observables en observables, y por $v_\lambda(B) = g(v_\lambda(A))$, nos referimos a un mapa $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con la misma forma funcional que G. Esta es otra manera equivalente de expresar (BKS4) o condición FUNC en el lenguaje de la Teoría de la Medida.

Como ejemplo, si $B = A^2$, entonces $v_\lambda(B) = (v_\lambda(A))^2$ (si $v_\lambda(A) = 2$, entonces $v_\lambda(B) = 4$). Esto expresa el hecho de que no todos los observables son independientes, como tampoco lo son los valores asignados a ellos. Las variables ocultas que satisfacen la condición FUNC son candidatas razonables para Kochen y Specker. Por lo tanto, buscan variables ocultas que satisfagan la condición FUNC, y tales que

$$\langle A \rangle := \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{A}) = \int_\Omega f_A(\lambda) p_\rho(\lambda) d\lambda \tag{4}$$

para cada observable cuántico A y cada estado cuántico ρ. Observe que cada estado cuántico ρ tiene su contraparte en la distribución de probabilidad clásica p_ρ.

Estudiemos ahora con más detalle cómo las variables ocultas, de existir, deben asignar valores a los observables. Sea $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores autoadjuntos que actúan sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Cualquier $\lambda \in \Omega$ define una función de valoración $v_\lambda : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{R}$, apelando a la asignación $v_\lambda(A) = f_A(\lambda)$.

Veamos cómo funciona esto para propiedades elementales representadas por operadores de proyección (ver también (19, s.I,II)). Como es bien sabido, dos observables representados por operadores autoadjuntos A y B, respectivamente, son compatibles si y sólo si existe funciones de Borel g_1 y g_2, y un operador autoadjunto C, tal que $A = g_1(C)$ y $B = g_2(C)$. Por lo tanto, siempre que A y B sean compatibles, utilizando la condición de funcionalidad (3) tenemos que $v_\lambda(AB) = v_\lambda(g_1(C)g_2(C)) = v_\lambda((g_1g_2)(C)) = (g_1g_2)(v_\lambda(C)) = g_1(v_\lambda(C))g_2(v_\lambda(C)) = v_\lambda(g_1(C))v_\lambda(g_2(C)) = v_\lambda(A)v_\lambda(B)$. Sean α y β números reales, también tenemos, para A y B compatibles, que $v_\lambda(\alpha A + \beta B) = v_\lambda(\alpha g_1(C) + \beta g_2(C)) = v_\lambda((\alpha g_1 + \beta g_2)(C)) = (\alpha g_1 + \beta g_2)(v_\lambda(C)) = \alpha g_1(v_\lambda(C)) + \beta g_2(v_\lambda(C)) = \alpha v_\lambda(g_1(C)) + \beta v_\lambda(g_2(C)) = \alpha v_\lambda(A) + \beta v_\lambda(B)$.

De ello se deduce que, para cada $\lambda \in \Omega$, v_λ define un homomorfismo parcial del álgebra abeliana. Además, si $P^2 = P$ y $P^\dagger = P$ (es decir, si P es un proyección ortogonal), tenemos $v_\lambda(P) = v_\lambda(P^2) = v_\lambda(P)v_\lambda(P) = (v_\lambda(P))^2$, y luego, $f_P = 0$ o $f_P = 1$. En palabras: a cada estado oculto se le asigna un homomorfismo $v_\lambda : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0, 1\}$. Esto significa que v_λ asigna valores de verdad (0 o 1) a cada proposición en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de forma funcional. Para el significado técnico de "funcional" en este contexto puede verse (14). Ilustremos cómo funciona esta última condición (y 3) en un contexto de medición determinado. Cada contexto de medición se puede representar mediante una colección máxima $\{P_i\}$ de operadores de proyección unidimensionales mutuamente ortogonales (es decir, $P_iP_j = \mathbf{0}$, siempre que $i \neq j$), que forman una resolución de la identidad

$$\sum_i P_i = \mathbf{1} \tag{5}$$

Entonces, es fácil verificar que

$$\sum_i v_\lambda(P_i) = 1 \tag{6}$$

Observe que la ecuación anterior implica que, si en un contexto de medición dado $v_\lambda(P_i) = 1$, entonces, $v_\lambda(P_j) = 0$, para $j \neq i$. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que, si existen variables ocultas que satisfacen FUNC y (4), también deberían existir valuaciones v: $\mathcal{L}\ (\mathcal{H}) \longrightarrow \{0,1\}$ que tiene la propiedad de que $\sum_i v(P_i) = 1$ para cualquier familia $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de proyectores ortogonales de una dimensión que satisfacen $\sum_i P_i = \mathbf{1}$. Pero Kochen y Specker demuestran que esto es imposible. Para ver por qué, consideremos un ejemplo simple (presentado en (3)) de por qué tales valuaciones no pueden existir.

Considere un modelo cuántico de cuatro dimensiones y los siguientes nueve contextos de medición:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{0,0,0,1} + \hat{P}_{0,0,1,0} + \hat{P}_{1,1,0,0} + \hat{P}_{1,-1,0,0} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{0,0,0,1} + \hat{P}_{0,1,0,0} + \hat{P}_{1,0,1,0} + \hat{P}_{1,0,-1,0} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,-1,1,-1} + \hat{P}_{1,-1,-1,1} + \hat{P}_{1,1,0,0} + \hat{P}_{0,0,1,1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,-1,1,-1} + \hat{P}_{1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,-1,0} + \hat{P}_{0,1,0,-1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{0,0,1,0} + \hat{P}_{0,1,0,0} + \hat{P}_{1,0,0,1} + \hat{P}_{1,0,0,-1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,-1,-1,1} + \hat{P}_{1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,0,-1} + \hat{P}_{0,1,-1,0} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,1,-1,1} + \hat{P}_{1,1,1,-1} + \hat{P}_{1,-1,0,0} + \hat{P}_{0,0,1,1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,1,-1,1} + \hat{P}_{-1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,1,0} + \hat{P}_{0,1,0,-1} &= \hat{1} \\
\hat{P}_{1,1,1,-1} + \hat{P}_{-1,1,1,1} + \hat{P}_{1,0,0,1} + \hat{P}_{0,1,-1,0} &= \hat{1},
\end{aligned} \tag{7}$$

Cada ecuación anterior representa un contexto de medición diferente. Por ejemplo, en la primera línea, tenemos un observable completo con cuatro resultados posibles, representados por los operadores de proyección $\hat{P}_{0,0,0,1}$, $\hat{P}_{0,0,1,0}$, $\hat{P}_{1,1,0,0}$ y $\hat{P}_{1,-1,0,0}$ (los subíndices representan las coordenadas de los rayos en el espacio de Hilbert). Pero las proyecciones unidimensionales se eligen de manera que cada una de ellas se repita en diferentes líneas. Suponiendo la existencia de una valuación funcional en el conjunto $\{0,1\}$ que satisfaga (6), llegamos a una contradicción (ver (3) para más detalles). Esto es así, porque sumando todas las valuaciones de las ecuaciones de (7), debido a que cada proyección se repite dos veces, obtenemos un número par a la izquierda y uno impar a la derecha. ¡Nunca puede haber una igualdad! El entrelazamiento es responsable de la contradicción si los valores asignados a cada propiedad se preservan entre los diferentes contextos. En otras palabras, para llegar a la contradicción, debemos asumir que $\hat{P}_{0,0,0,1}$ en la primera línea de (7) es el mismo que $\hat{P}_{0,0,0,1}$ de la segunda línea y, por lo tanto, conserva su asignación de valor entre los diferentes contextos. Una consideración similar se aplica al resto de las propiedades enumeradas en (7).

Así, vemos que un supuesto implícito detrás de la contradicción KS es que el sistema cuántico puede ser *identificado* entre los diferentes contextos. Por lo tanto, sus propiedades deben conservar las asignaciones de valor dadas por los parámetros ocultos λ. ¿Es legítimo hacer estas identificaciones? ¿Se pueden identificar realmente los sistemas cuánticos?

4.1 Contradicción KS y no individualidad

La cuestión de la identidad transmundana ha sido muy controvertida, incluso entre los filósofos que aceptan la legitimidad de hablar de mundos posibles. Las opiniones van desde ver la noción de una identidad mantenida entre objetos en diferentes mundos posibles como inaceptable (por lo problemática), hasta ver esta noción como completamente inocua y no más problemática que la afirmación de que los objetos individuales podrían haber existido con propiedades algo diferentes. Las cosas se complican por el hecho de que se ha propuesto un rival importante para la "identidad transmundana": la teoría homóloga de David Lewis (25; 26). En esta teoría, la afirmación de que un individuo existe en más de un mundo posible reemplaza la afirmación de que, aunque cada individuo existe en un solo mundo, tiene contrapartes en otros mundos, donde la relación de contraparte (basada en la similitud) no satisface la identidad lógica (TCI). Por lo tanto, gran parte de la discusión en esta área se ha centrado en los méritos comparativos de la identidad transmundana y las explicaciones teóricas de la contraparte como interpretaciones de declaraciones de lo que es posible y necesario para los individuos. Generalmente, la identidad de los sistemas físicos se da por sentada.

Si se supone que los sistemas cuánticos no son individuales, entonces no pueden identificarse en general. En particular, no pueden identificarse cuando se consideran en diferentes contextos. Los individuos clásicos están dotados de: *i*) *identidad sincrónica*, que permite distinguirlos de todos los demás en un momento determinado, *ii*) *Identidad diacrónica*, permite reidentificar a un individuo a lo largo del tiempo e *iii*) *identidad transcontextual*, que permite reidentificar a un individuo en diferentes contextos.

Las partículas cuánticas del mismo tipo carecen de las tres formas de identidad. No pueden distinguirse sincrónicamente de otras por sus propiedades ni etiquetarse con *nombres propios*. No pueden seguirse como siendo *el mismo individuo* a través del espacio a lo largo del tiempo. No puede decirse que una partícula sea la misma cuando aparece en diferentes contextos o en diferentes sistemas de medición. Si consideráramos una interpretación de haz de propiedades (sin identidad) como, por ejemplo, la Interpretación Modal-Hamiltoniana (ver (12; 27)), esta falta de identidad se manifestaría a través de la posibilidad de tener proyectores genuinamente indistinguibles.

4.2 Las diferentes instancias que conducen a la contradicción KS

Volvamos al origen de la contradicción KS. Se pueden identificar las siguientes instancias:

I_1) comienza el razonamiento bajo el supuesto de que las variables ocultas asignan valores a los diferentes observables (representados por los operadores autoadjuntos en $\mathcal{A}(\mathcal{H})$).

I_2) los valores se asignan de modo que sean *independientes del contexto*. Esto significa que el *mismo* λ define el estado de un único sistema cuántico y asigna el *mismo* valor $v_\lambda(A)$ a cada A observable independientemente de el contexto en el que se considera. En otras palabras, se supone que el sistema conserva su identidad entre los diferentes contextos.

I_3) al igual que sucede con los operadores de proyección que representan propiedades elementales, se identifican las correspondientes propiedades (con el mismo contenido) que aparecen en diferentes contextos y se preservan sus valores de verdad.

I_4) los supuestos anteriores llevan a la conclusión de que debería existir una valuación de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ al álgebra booleana de dos valores, satisfaciendo la condición de funcionalidad (6). Sin embargo, no existe tal valuación.

La suposición de que los sistemas cuánticos pueden identificarse (y reidentificarse consistentemente) es problemática. Como podemos ver, está claro que se utiliza un procedimiento de identificación para derivar la contradicción KS: el sistema es considerado *el mismo* entre los diferentes contextos y las propiedades se identifican compatiblemente. Tomar en cuenta la posibilidad de que las Propiedades/Proyectores sean indiscernibles sugiere que cuando el físico hace mediciones repetidas 'de una misma propiedad', él está realizando mediciones con propiedades indiscernibles, ya que necesita 'preparar' nuevamente el sistema. De esta forma, jamás se hace más de una medición en un mismo sistema si las mediciones son destructivas.[12] Por lo tanto, pensamos que podemos tener 'propiedades indiscernibles' y que las mismas podrían servir como contrapartes formales de aquello a lo que los físicos se refieren como 'una misma propiedad que es medida más de una vez'.

¿Es la propuesta de propiedades indiscernibles nueva? No, para nada. Como ya dijimos, la llamada Interpretación Modal-Hamiltoniana de la Mecánica cuántica es una interpretación modal (entre otras) que trata a los entes cuánticos como Bundles o haces de propiedades indistinguibles (ver (27; 28)). Por un lado, es notable que esa propuesta también utilice la indistinguibilidad de las propiedades como la clave de inmunidad ante la contradicción KS.[13] Por otro lado, la IMH ha recibido un tratamiento metateórico utilizando el lenguaje de $\mathfrak{Q}$ (y actualmente también de $\mathfrak{Q}^-$) en (12). Eso prueba los fuertes vínculos que pueden ser establecidos a través del concepto de indiscernibilidad. Por lo tanto, es consistente con lo presentado hasta ahora pensar que nuestros proyectores son los proyectores genuinamente indistinguibles del marco de la IMH. Esto no solo es otra forma de justificar la presente aplicación de $\mathfrak{Q}^-$ al tratamiento de la contradicción KS, sino también de justificar ontológicamente nuestro tratamiento de los proyectores. Analicemos ahora la discusión de KS bajo el supuesto metafísico de que los sistemas cuánticos no son individuos. Podemos resumir el supuesto que (junto con los demás) conduce a la contradicción de KS:

[12] Uno de los revisores anónimos nos remarcó lo siguiente: si las mediciones son no destructivas, también sucede esto, porque toda medición es una interacción, de modo que el sistema a medir, si bien no "desaparece", sí se convierte en parte de un nuevo sistema resultante de la interacción. Por lo tanto, si se desea medir lo mismo una vez más, el sistema a medir debe volver a prepararse. Agradecemos mucho su comentario.

[13] Al lector interesado en más detalles filosóficos de esta propuesta, tanto relativos a la indistinguibilidad, contextualidad y no separabilidad de los entes cuánticos como también a la relación que la IMH mantiene con los entes trans-estadísticos (como, por ejemplo, los cobosones), recomendamos (32).

(KSH) Es posible asignar de forma funcional valores independientes del contexto y bien definidos a todas las propiedades medibles de un *único* sistema cuántico.

Después de lo que hemos dicho anteriormente, debería quedar claro que podemos evitar la contradicción KS negando KSH al menos de dos maneras.

(i) Las propiedades no tienen valores de verdad independientes del contexto bien definidos.

(ii) Las propiedades o partículas pueden ser indistinguibles (debido a que pueden ser no individuos). Esto es, existe una dependencia implícita de las propiedades con el contexto, ya que, en vez de idénticas, ahora deben ser consideradas indiscernibles. Esto produce que los resultados de las valuaciones también sean indiscernibles, no necesariamente idénticos.

La conclusión dada por (i) es la más popular en los fundamentos de la mecánica cuántica. Es la forma habitual de evitar la contradicción KS, como se analiza en la Sección 4. De manera similar, se argumenta que las teorías de variables ocultas, si asignan valores a las propiedades definitorias de un sistema cuántico, deben ser contextuales. Sin embargo, también tenemos la segunda opción (*contextualidad implícita*). Si las partículas o propiedades son entidades verdaderamente indistinguibles, no hay forma de identificarlas cuando se consideran en los diferentes contextos de medición.[14]

Bajo el supuesto de no individualidad, parece extraño afirmar que las propiedades que definen un contexto C corresponden a la misma partícula que define un contexto "diferente" D. El acto de elegir entre medidas en contextos C o D corresponde a mundos posibles diferentes (y normalmente incompatibles). No podemos conceder que estemos hablando del mismo objeto subyacente a estas alternativas: nuestro supuesto de no individualidad implica que no tiene sentido asignar una identidad transmundana a las partículas elementales. Nótese que este argumento no necesita ser operativo, se sigue como una consecuencia lógica de nuestro supuesto ontológico de no individualidad. No es necesario realizar ningún experimento real para darse cuenta de que afirmar que tenemos la misma partícula en todos los contextos es una suposición ontológica fuerte (dependiente de la noción clásica de identidad). Creemos que estas observaciones abren la puerta a una nueva interpretación del resultado de KS.

5. Propuesta semántica en $\mathfrak{Q}^-$

Presentaremos una alternativa semántica que tenga en cuenta lo dicho hasta aquí. Nuestras herramientas son:

(1) Nmatrices: las Nmatrices permiten desvincularse del supuesto FUNC, al tiempo que representan una semántica adecuada para la lógica cuántica, como se ha

[14] Pensemos en los sistemas cuánticos como haces de propiedades genuinamente indiscernibles presentados en (12). Las propiedades genuinamente indiscernibles (no identificables en diferentes contextos como siendo las mismas) son las que en ese caso producen la indiscernibilidad del haz o paquete de propiedades que representa al sistema cuántico.

mostrado en (14). Su aplicación permite una caracterización novedosa de los estados cuánticos como valuaciones no deterministas de una Nmatriz particular.

(2) Casi-conjuntos (qsets): contamos con teorías de qsets como $\mathfrak{Q}$ y $\mathfrak{Q}^-$, que permiten tratar entes genuinamente indiscernibles que no sean idénticos. Esto apunta directamente a un tratamiento del presupuesto de identidad. Al ser cada una de estas teorías una expansión conservativa de ZF, permiten desarrollar en su seno las q-funciones (quasi-homomorfismos) necesarias para nuestras valuaciones. Particularmente estamos interesados en $\mathfrak{Q}^-$, ya que ha permitido establecer fuertes vínculos estructurales con QST, como se muestra en (22).[15]

El presupuesto FUNC nos lleva a abandonar las valuaciones funcionales (homomórficas) para el retículo de proyectores. Las Nmatrices entran en juego brindando una alternativa para dar una semántica que se adapte a las restricciones impuestas. Esta representa una alternativa absolutamente válida para el tratamiento de la contradicción KS. Sin embargo, no estamos teniendo en cuenta aún el tema de la identificación de los proyectores en diferentes contextos. Aquí es donde entra $\mathfrak{Q}^-$.

En el marco de $\mathfrak{Q}^-$, podemos definir q-funciones (y también q-homomorfismos) que funcionen como valuaciones de nuestro retículo. Al no ser estrictamente funciones (ni homomorfismos) de ZF, estas q-funciones no cumplen FUNC. Nótese que FUNC presupone la identidad. Esto significa que podríamos prescindir de las Nmatrices para el tratamiento semántico de la contradicción. Esto se debe a que la contradicción particular presentada no utiliza fórmulas de complejidad mayor que cero, es decir, en (7) no aparecen fórmulas con conectivos. Nosotros mantendremos el sistema Nmatricial, porque puede ser utilizado en los casos de fórmulas de complejidad mayor que cero. El fuerte vínculo que las Nmatrices han mostrado con los estados cuánticos (14) es otra de las razones para mantener este sistema.

La conclusión principal obtenida en 4.2 es que los proyectores del Hilbert pueden ser considerados entes sin identidad o no individuos, por lo tanto los $P_{0,0,0,1}$ de las dos primeras líneas de (7) *no son dos instancias diferentes de un mismo proyector, sino dos proyectores indiscernibles*. Esto implica que no debemos asignar necesariamente "el mismo" valor de verdad a nuestros proyectores. Ahora mostraremos cómo asignar valores de verdad a estos proyectores indiscernibles. Para esto, utilizamos las q-funciones (definición 8), ya que una de sus características más importantes es que asignan valores indiscernibles (de la imagen) a elementos indiscernibles (de su dominio). Esto es, las q-funciones mandan indiscernibles en indiscernibles. Por lo tanto, si P y P' son dos proyectores indiscernibles del dominio de la q-función, sus valores de verdad asociados serán indiscernibles. Que una q-función asigne valores de verdad indiscernibles a elementos indiscernibles de su dominio es consecuencia directa de la definición de q-función 8.[16]

Debemos definir cuál es el qset de valores de verdad de nuestras valuaciones. Al margen de qué qset de valores de verdad elijamos, lo crucial es que: i) pueda separarse en valores designados (D) y no designados (N) ii) en cada uno de estos

[15] En (17), se han presentado las Nmatrices en QST. A partir de estos resultados, en estos momentos se está trabajando para construir nuevas Nmatrices en $\mathfrak{Q}^-$.

[16] Además, esta definición converge a la definición estándar de función en ZF cuando los únicos entes indiscernibles son los idénticos.

qsets, exista al menos un elemento que sea indiscernible de alguno de los elementos del otro qset. Este último requisito es para admitir la posibilidad de que si un proyector es designado (no designado) por la valuación, otro proyector indiscernible del primero no sea necesariamente designado (no designado). Si los valores de verdad de todos los proyectores indiscernibles se encontraran en el mismo qset, sea N o D, seguiríamos encontrándonos con la contradicción. Que la relación de indiscernibilidad no sea una congruencia entra en juego en este momento.[17]

En el marco de $\mathfrak{Q}^{-}$, procedemos de la siguiente manera. Sea w un qset que contenga los elementos a, b, c, junto con varios elementos indiscernibles de cada uno. Por poner un ejemplo, w podría ser el qset que contiene varias copias indiscernibles de $\emptyset, \mathcal{P}(\emptyset)$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Estos qsets están garantizados por los axiomas de qset potencia y Esquema de Separación. La existencia de indiscernibles viene garantizada por AED . Utilizando el concepto de *Nube* (definición 11), definimos V como el qset

$$V := N(a,w) \cup N(b,w) \cup N(c,w)$$

, de forma tal que:

- $K(N(a,w),n) \wedge K(N(b,w),m) \wedge K(N(c,w),l)$.
- $(1 < n) \wedge (1 < m) \wedge (1 < l)$
- $\neg(a \equiv b) \wedge \neg(a \equiv c) \wedge \neg(b \equiv c)$

Esto es, todas las nubes cuentan con más de un elemento y a, b, c son discernibles de a pares. Ahora tomamos qsets A, A', B, C (discernibles del vacío) que cumplan:

$$A \subset N(a,w) \quad ; \quad A' \subset N(a,w) \quad ; \quad B \subseteq N(b,w) \quad ; \quad C \subseteq N(c,w)$$

, donde A y A' deben satisfacer

$$A \cap A' \equiv \emptyset.$$

De esta manera, podemos definir los qsets de valores designados y no designados, D y N, como sigue:

$$D := A \cup B \quad ; \quad N := A' \cup C.$$

Si las dos últimas inclusiones no son estrictas, damos la posibilidad de que existan valores que no sean ni designados ni no designados.[18]

Por lo tanto, nuestras valuaciones pueden definirse como las q-funciones en $\mathfrak{Q}^{-}$con dominio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, qset que contiene a todos los proyectores del Hilbert y es cerrado bajo subfórmulas, y codominio V.

[17] En el marco de ZF, se podría considerar un modelo de los reales no estándar (Análisis no estándar (31)) y quedarse solo con 0, 1 y el *Halo* de cada uno. Donde el *Halo* de un real no estándar x es el conjunto de todos los entes que son indiscernibles de x (en el sentido del Análisis no estándar). Esto es, el conjunto formado por todos los reales no estándar de la forma $x + \varepsilon$, con ε un infinitesimal de la teoría (ver (33)). Si además exigimos que dentro del *Halo* de cada real no estándar (0 y 1) existan tanto valores designados como no designados, podríamos tener una semántica adecuada.

[18] En el límite, cuando no contamos con elementos indiscernibles y $\mathfrak{Q}^{-}$colapsa en ZF, debido a que las *Nubes* se convierten en singuletes, los qsets A y A' no pueden ser disjuntos y no vacíos. Por lo tanto, debemos exigir que uno solo de ellos sea no vacío. Por supuesto, en este caso los qset de valores designados y no designados se convierten en conjuntos estándar disjuntos.

$$v : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to V \tag{8}$$

El qset del dominio ahora incluye no solo los proyectores sobre el espacio de Hilbert, sino también los indiscernibles de cada uno de ellos. Es decir, es un $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ fundado en la axiomática de $\mathfrak{Q}^-$, no ya en la de ZF.

Como nuestro tratamiento para la contradicción KS no se compromete con los conectivos, las condiciones impuestas sobre estas q-funciones para las fórmulas de complejidad mayor que cero no serán explicitadas por el momento. No obstante, sería coherente imponer condiciones de q-homomorfismo.

Con lo que tenemos hasta acá, garantizamos que varios valores designados tengan indiscernibles en el qset de valores no designados y viceversa. Además, algunos valores no cuentan con indiscernibles en el qset opuesto. Por lo tanto, si una valuación asigna el valor $b' \in B$, que es designado, al proyector $P_{0,0,0,1}$ de la primera línea de (7), deberá otorgarle también un valor designado $b'' \in B$ $(b' \equiv b'')$ al proyector indiscernible de la segunda línea de la ecuación, ya que el qset de no designados no cuenta con ningún indiscernible de b'. Sin embargo, si la valuación otorga el valor $x \in A$ al proyector $P_{0,0,0,1}$ de la primera línea, deberá asignarle un valor indiscernible (y) al de la segunda línea, pero tal valor podría pertenecer tanto a A como a A', es decir, podría ser designado o no.

¿Por qué esto soluciona la contradicción KS? La razón principal por la cual ahora no se puede llegar a tal contradicción es la siguiente: la relación de indiscernibilidad $(\equiv)$ es una relación de equivalencia, pero no una congruencia (no colapsa a la identidad). El hecho de que un valor de verdad a pertenezca, por ejemplo, al conjunto D no implica necesariamente que otro valor indiscernible a' pertenezca a D. Esto es, puede darse el caso de que, siendo $a \equiv a'$, $a \in D$ y $a' \notin D$. Por lo tanto, al hacer el conteo de valores designado a lo largo de las líneas de (7), no tenemos por qué contar una cantidad par de un lado e impar del otro. Dicho de otra manera: ya no se repiten los proyectores, porque ahora son indiscernibles, no idénticos. Lo que generaba la contradicción era que se repitieran los proyectores en al menos dos líneas de (7). Problema solucionado.

Por un lado, contando con Nmatrices en $\mathfrak{Q}^-$, presentaríamos una alternativa para cuando quiera tenerse en cuenta tanto la indiscernibilidad de los proyectores como también las restricciones impuestas por FUNC. Tendríamos nuestra solución extendida para fórmulas de toda complejidad. Además, por supuesto, contaríamos con un metalenguaje inspirado en la propia ontología cuántica para las Nmatrices $(\mathfrak{Q}^-)$, que se relaciona fuertemente con QST (y sus correspondientes Nmatrices en QST). Por otro lado, relacionar los formalismos e interpretaciones presentados hasta el momento ($\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}^-$, QST, RST, IMH, etc.) puede ser fructífero para cada uno de ellos. Los desarrollos que se den en alguno de ellos pueden admitir implementación en el resto. Por eso, consideramos positivo mantener esta línea de investigación de forma interdisciplinar.

$\mathfrak{Q}$ ha sido incorporada al metalenguaje de la IMH en (12). Lo propio ha comenzado a realizarse con $\mathfrak{Q}^-$en (22) y (Krause et al.). Las Nmatrices y la lógica cuántica se han vinculado en (14–16). QST, RST y las Nmatrices comenzaron su vínculo en (17). En (22) se presentaron fuertes relaciones entre QST y $\mathfrak{Q}^-$y en (18) se incluye la teoría de Rough Sets (RST) a la red de relaciones. También existe la posibilidad de relacionar QST y $\mathfrak{Q}^-$con la mereología cuántica ZF* presentada en (5; 11). Por lo tanto, se ha establecido una red conceptual entre teorías, que consideramos tiene un potencial importante para los temas relativos a la ontología cuántica.

6. Conclusiones filosóficas y perspectivas futuras

En el presente artículo, nos enfocamos en dos de los presupuestos del Teorema KS, a saber, FUNC y la identidad de los proyectores, y estudiamos las consecuencias que tiene para la ontología cuántica desprenderse de los mismos. Para lograr los objetivos, se han establecido relaciones entre diferentes formalismos e interpretaciones vinculadas a la cuántica, que tienen interés de suyo, al margen de la importancia que tengan en el marco de la ontología de los entes del micromundo. Se ha mostrado que la teoría de casi-conjuntos $\mathfrak{Q}^-$ es una herramienta valiosa como lenguaje metateórico de una semántica para el retículo de proyectores cuánticos. Con la axiomática casi-conjuntista presentada y las valuaciones definidas allí, contemplamos la posibilidad de admitir lenguajes con variables proposicionales genuinamente indiscernibles. Además, tal posibilidad tiene un sustento por parte de la ontología cuántica si se tiene en cuenta que tales variables proposicionales recorren un dominio de proposiciones cuánticas. Las propiedades/proposiciones genuinamente indiscernibles forman el núcleo de las interpretaciones modales de la Mecánica cuántica, como, por ejemplo, la Interpretación Modal Hamiltoniana, dando justificación metafísica al uso de variables proposicionales indiscernibles. Por lo tanto, con una ontología de propiedades genuinamente indiscernibles, el formalismo de las semánticas no deterministas dado por las Nmatrices y la axiomática de casi-conjuntos, tenemos un marco ideal para explorar todas las consecuencias que se desprendan de admitir lenguajes lógicos con variables indiscernibles.

Lo presentado aquí es solo el comienzo dentro de un marco de fundamentos de la Mecánica cuántica, resta estudiar muchas posibilidades. Por ejemplo, las aplicaciones que las Nmatrices fundadas en $\mathfrak{Q}^-$ puedan tener tanto en el marco lógico puro como en el físico, las consecuencias de contar con un metalenguaje de proposiciones indiscernibles en el ámbito de los universales, con sus correspondientes determinados y determinables, el estudio de las diversas interpretaciones y aplicaciones que se le puedan dar a estos lenguajes, etc. Pensamos que la reflexión sobre estos temas puede ser de interés para todas las ramas comprometidas.

Referencias

[1] Avron, A. and Lev, I. (2005). Non-deterministic multiple-valued structures. *Journal of Logic and Computation*, 15(3):241–261.

[2] Avron, A. and Zamansky, A. (2010). Non-deterministic semantics for logical systems. In *Handbook of Philosophical Logic: Volume 16*, pages 227–304. Springer.

[3] Cabello, A., Estebaranz, J., and García-Alcaine, G. (1996). Bell-kochen-specker theorem: A proof with 18 vectors. *Physics Letters A*, 212(4):183–187.

[4] Cabello Quintero, A. (2002). *Pruebas algebraicas de imposibilidad de variables ocultas en mecánica cuántica*. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.

[5] da Costa, N. C. A. and Holik, F. (2015). A formal framework for the study of the notion of undefined particle number in quantum mechanics. *Synthese*, 192(2):505–523.

[6] Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G. (1993). Individuals, kinds and names in physics. *Bridging the gap: philosophy, mathematics, physics*, pages 261–283.

[7] de Barros, J. A., Jorge, J. P., and Holik, F. (2021). On the assumptions underlying ks-like contradictions. *arXiv preprint arXiv:2103.06830*.

[8] Franco de Oliveira, A. J. (2004). *Lógica e Aritmética*. Ed. Un. Brasília, Brasília.

[9] French, S. and Krause, D. (2006). *Identity in physics: A historical, philosophical, and formal analysis*. OUP Oxford.

[10] Heelan, P. A. (1970). Complementarity, context dependence, and quantum logic. *Foundations of physics*, 1(2):95–110.

[11] Holik, F. and Jorge, J. P. (2023). Open problems in the development of a quantum mereology: And their ontological implications. In *Non-reflexive logics, non-individuals, and the philosophy of quantum mechanics: essays in honour of the philosophy of Décio Krause*, pages 157–176. Springer.

[12] Holik, F., Jorge, J. P., Krause, D., and Lombardi, O. (2022). Quasi-set theory: A formal approach to a quantum ontology of properties. *Synthese*, 200(5):401.

[13] Jech, T. (2003). *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Springer.

[14] Jorge, J. P. and Holik, F. (2020). Non-deterministic semantics for quantum states. *Entropy*, 22(2).

[15] Jorge, J. P. and Holik, F. (2022). Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, I. *Teorema: Revista Internacional de Filosofía*, 41(3):65–88.

[16] Jorge, J. P. and Holik, F. (2023). Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, II. *Teorema: Revista internacional de filosofía*, 42(1):149–169.

[17] Jorge, J. P., Holik, F., and Krause, D. (2023). Un acercamiento a las semánticas Nmatriciales basadas en QST. *Principia: an international journal of epistemology*, 27(3):8.

[18] Jorge, J. P., Holik, F., and Krause, D. (2025). Relating quasi-sets and rough sets: from quantum entities to AI, DOI: 10.13140/rg.2.2.16057.48483/1.

[19] Kochen, S. and Specker, E. P. (1990). The problem of hidden variables in quantum mechanics. *Ernst Specker Selecta*, pages 235–263.

[20] Krause, D. (2003). The mathematics of non-individuality. *Coleção Documentos, IEA/USP*, Series Lógica e Teoria da Ciência.

[21] Krause, D. (2023). A remark on quasi-automorphisms and deformable structures in quasi-set theory and its account to the logical foundations of quantum theory. *Preprints.org*.

[22] Krause, D. and Jorge, J. P. (2024). Sobre una teoría 'pura'de casi-conjuntos y su aplicación a una ontología cuántica de propiedades. *Forthcoming in Principia*.

[Krause et al.] Krause, D., Jorge, J. P., and Lombardi, O. A quasi-set theory without atoms and its application to a quantum ontology of properties.

[24] Kukla, A. (2001). Theoreticity, underdetermination, and the disregard for bizarre scientific hypotheses. *Philosophy of Science*, 68(1):21–35.

[25] Lewis, D. K. (1968). Counterpart theory and quantified modal logic. *the Journal of Philosophy*, 65(5):113–126.

[26] Lewis, D. K. et al. (1986). *On the plurality of worlds*, volume 322. Blackwell Oxford.

[27] Lombardi, O. and Castagnino, M. (2008). A modal-hamiltonian interpretation of quantum mechanics. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 39(2):380–443.

[28] Lombardi, O. and Dieks, D. (2014). Particles in a quantum ontology of properties. To be published in: "Metaphysics in Contemporary Physics", edited by Tomasz Bigaj and Christian Wüthrich, Poznan Studies 104, 2016.

[29] Mendelson, E. (2009). *Introduction to mathematical logic*. CRC press.

[30] Nascimento, M. C., Krause, D., and Feitosa, H. d. A. (2011). The quasi-lattice of indiscernible elements. *Studia Logica*, 97:101–128.

[31] Nelson, E. (1977). Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6):1165–1198.

[32] Pascualini, M. (2025). *La Interpretación Modal-Hamiltoniana y su ontología de propiedades posibles: nuevas perspectivas*. Tesis doctoral. Universidad de Buenos Aires.

[33] Salgado Corbillón, M. (2015). Análisis real no estándar. [Online; accessed 14-March-2025].

[34] Smerlak, M. (2006). Relational quantum mechanics. *Internship Report, Ecole normale supérieure de Lyon, September*, 17.

[35] Solé Bellet, A. (2010). *Realismo e interpretación en mecánica bohmiana*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.