reugra

Revista de Educación de la Universidad de Granada
ISSN: 0214-0489
Edita: Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada

https://doi.org/10.30827/reugra.v31.30760
Artículos Originales

Sentido numérico: relación de sus componentes desde el significado del número natural

Number sense: relation of its components from the meaning of the natural number

Información

Fechas:
Recibido: 2024.01.20
Aceptado: 2024.03.20
Publicado: 2024.05.03

Correspondencia:
Luz Dary Jiménez Rubiano
luzjimenez@correo.ugr.es

Conflicto de intereses:
No existe conflicto de interés.

Financiación:
En esta publicación no ha recibido ninguna ayuda o financiación.

Autorías

Luz Jiménez-Rubiano[1] 0000-0001-7659-2813
Juan Luis Piñeiro[2] 0000-0002-9616-3925
Juan Francisco Ruiz-Hidalgo[1] 0000-0002-4805-6922

[1]Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España.
[2]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Facultad de Filosofía y Educación, Departamento de Educación Diferencial, Chile.

Cómo citar este trabajo:
Jiménez-Rubiano, L., Piñeiro, J. L., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2024). Sentido numérico: relación de sus componentes desde el significado del número natural. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*. 31, 19-34. https://doi.org/10.30827/reugra.v31.30760

4.0 BY-NC-SA

RESUMEN

Introducción: La noción de sentido numérico se ha consolidado en la literatura de investigación en educación matemática y, desde la publicación de la LOMLOE, también es un término de uso cotidiano entre los docentes.

El sentido numérico se describe de diversas maneras, pero siempre se expresa en términos de capacidades que las personas manifiestan cuando lo han desarrollado.

Método: En este trabajo, a través de la lectura y análisis del contenido de investigaciones de referencia sobre el sentido numérico, establecemos una lista de componentes que permiten describirlo cuando se aborda el número natural.

Resultados: Además, complementamos este análisis con la descripción de las relaciones que se pueden establecer entre dichas componentes

Conclusiones: y con una posible estructura jerárquica de desarrollo del número natural y de habilidades propias de cada componente. Este estudio inicial nos permitirá analizar cómo cambian las relaciones entre las componentes del sentido numérico cuando trabajamos con sistemas numéricos diferentes.

Palabras clave: capacidades; sentidos matemáticos; significado contenido matemático escolar; sistemas numéricos.

ABSTRACT

Introduction: The notion of number sense has been consolidated in the research literature on mathematics education and, since the publication of the LOMLOE, it is also a term of daily use among teachers.

Number sence is described in various ways, but it is always expressed in terms of capabilities that people manifest when they have developed it.

Method: In this paper, through the reading and analysis of the content of reference research on number sense, we establish a list of components of number sense.

Results: Moreover, we complement the list with the description of the relationships that can be established between these components

Conclusions: and with a possible hierarchical structure of development of capabilities specific to each component. This is an initial study, which will allow us to analyze how the relationships between the components of number sense change when we work with different number systems.

Keywords: capabilities; mathematics senses; meaning of a school mathematics content; numerical systems.

Introducción

La publicación de la LOMCE ha puesto al sentido matemático en el foco de atención de los docentes. A pesar de esta reciente aparición curricular, se trata de una noción sobre la que la investigación ha trabajado desde hace muchos años. Desde finales de los años 80 del siglo pasado, cuando ya se empezó a hablar de sentido numérico, han aparecido y configurado progresivamente los diferentes sentidos matemáticos referidos en la legislación educativa (algebraico, espacial, estocástico, de la medida, numérico).

La noción de sentido matemático encaja a la perfección con un currículo que lleva años evolucionando hacia un enfoque funcional, donde los contenidos (matemáticos) tienen sentido cuando se aplican. Este enfoque se concreta en la noción de competencia y en la visión del aprendizaje como desarrollo de competencias, que no prioriza el dominio puramente formal y técnico de definiciones y algoritmos, sino que considera que los conceptos y los procedimientos matemáticos tienen un para qué cercano y sirven para algo tangible. Así, el aprendizaje se centra en cómo los escolares pueden usar los conceptos y procedimientos matemáticos en situaciones usuales de la vida cotidiana (Rico y Díez, 2011).

Las caracterizaciones de sentido matemático que encontramos en la literatura suelen tener un origen cognitivo, pues en muchos casos surgen de las nociones de pensamiento matemático (algebraico, espacial, estocástico, de la medida, numérico). Estas caracterizaciones suelen organizar los sentidos matemáticos en componentes, que se desglosan en capacidades, habilidades o conductas que son observables en las personas que poseen sentido matemático, esto es, las componentes se desglosan en términos de resultados finales de un aprendizaje.

Específicamente para el sentido numérico, las componentes varían en cantidad y en su descripción algunos autores han creado marcos referenciales (p. e. McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992), otros han expandido o tomado algunas componentes para sus investigaciones, dependiendo del objetivo del estudio (p. e. Tsao y Lin, 2012). En todos los casos que conocemos, las componentes las describen de manera general independientemente del sistema numérico considerado (ya sean naturales, decimales, enteros, fracciones, …). Incluso, en los documentos curriculares actuales, se aplican estas habilidades, expresadas en términos de saberes, a otros conjuntos de números como los complejos, o “números generalizados” como los vectores o las matrices. Sin embargo, los significados de cada uno de estos sistemas son diferentes: por ejemplo, los naturales se pueden ordenar y se usan como herramienta para ordenar objetos y los vectores no tienen ni esa propiedad ni esa posibilidad de uso.

Así, asumiendo que las componentes que organizan el sentido numérico son comunes a todos los sistemas numéricos, nos preguntamos si las relaciones entre estas componentes dependerán de los significados específicos de cada sistema numérico. No podemos abordar la pregunta en un solo trabajo, por lo que planteamos responderla en varios pasos. En un primer paso, al que se refiere este documento, nos centraremos describir las componentes del sentido numérico y sus relaciones para los números naturales. Para lograrlo, elaboramos una lista de componentes del sentido numérico a partir de las existentes en investigaciones de referencia. Luego establecemos y describimos las relaciones internas entre las componentes usando los elementos propios de los significados y sentidos del sistema de los números naturales.

Fundamentación teórica

La postura que defendemos requiere establecer dos pilares que fundamenten teóricamente la propuesta: 1) Significado de un concepto matemático escolar, profundizando en la diferencia entre el sentido y el significado; 2) Sentido numérico.

Destacamos que ambos elementos teóricos utilizan el término sentido, pero que son diferentes.

Significado de un contenido matemático escolar y sentido matemático

Atendiendo a Rico (2016), consideramos que el contenido didáctico en cada concepto se inicia mediante el análisis y demarcación de su significado. El significado de un concepto matemático se determina por sus elementos semánticos, lo que implica conocer su a) estructura conceptual donde están inmersos conceptos, operaciones, propiedades, relaciones; b) sus sistemas de representación que permiten comunicar; c) sus sentidos y modos de uso que parten de los fenómenos. Esta visión está amparada bajo la terna semántica propuesta por (Rico, 2016).

Desde esta postura, es especialmente interesante la diferencia entre sentido de un concepto y su significado. El sentido es uno de los elementos constituyentes del significado de un concepto y, para que un docente o investigador lo identifique, al trabajar con un contenido matemático escolar, será preciso realizar un análisis del contenido y/o un análisis conceptual que, por un lado, considere los conceptos como ejercicios intelectuales organizadores de fenómenos lo que los hace inteligibles y, por otro lado, profundice en los usos y aplicaciones de las matemáticas proporcionando las herramientas para dar solución a situaciones del contexto real, otorgando un sentido funcional explicito (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022). El resultado de ese análisis establecerá situaciones, escenarios, modos de uso, contextos y fenómenos en los que un contenido matemático escolar tenga sentido (Rico y Ruiz-Hidalgo, 2015; Ruiz-Hidalgo, 2016).

Desde el punto del aprendizaje, Rico y Ruiz-Hidalgo (2015) y Ruiz-Hidalgo (2016) afirman que el sentido matemático se desarrolla al utilizar el sentido de los contenidos, lo que ocurre cuando se usan e interpretan, se elaboran significados y se emplean en contexto para dar soluciones a las cuestiones que los usos en contexto generen. Teniendo en cuenta que el éxito de este requiere interacción en la comunicación de ideas y argumentos con otras personas lo que lo hace dinámico y plural. Así, en las matemáticas escolares, el sentido de un contenido matemático es inseparable de su significado semántico centrándose en los modos de usos, las situaciones, los contextos y los fenómenos que forman parte del significado de dicho concepto (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022), lo que proporciona los descriptores básicos de las conductas observables de los estudiantes, que se expresarán en términos de habilidades de los diferentes sentidos matemáticos.

Sentido numérico

Aunque cada vez se acumula más información sobre sentido numérico, los enfoques no están totalmente unificados, aunque sí existen muchos elementos descriptores comunes. Algunos autores lo describen como el conjunto de habilidades que desarrolla una persona para usar los números y operar con ellos de manera versátil, interrelacionando los conceptos y conocimientos numéricos que tiene permitiéndole desenvolverse en determinadas situaciones de su actividad cotidiana (p. e., Castro y Segovia, 2015; McIntosh et al., 1992; Sowder, 1992). Esta manera de considerar el sentido numérico hace que las capacidades que lo caracterizan se expresen en términos de resultado final de un aprendizaje (Llinares, 2001).

Las perspectivas de Llinares (2001), McIntosh et al. (1992) y Ruiz-Hidalgo y Flores (2022) y el enfoque dado en este estudio al sentido y significado de los conceptos matemáticos desde donde se dilucida el sentido numérico, permiten vislumbrarlo como la comprensión general que va desarrollando una persona al interpretar, usar conceptos numéricos y operacionales, relacionarlos, emitir juicios, permitiéndole ser versátil en el diseño de estrategias de cálculo, facilitando desenvolverse en contextos variados y situaciones de su actividad cotidiana. Esta perspectiva nos permitirá, por un lado, expresar el sentido numérico como un conjunto de habilidades o capacidades tal y como se expresa en los trabajos clásicos, pero también nos permitirá incorporar a estas capacidades descriptores propios de los significados específicos de los contenidos que serán útiles para ser más específicos y precisos en la caracterización de este sentido.

Método

Para abordar los objetivos, se han realizado un análisis de contenido (Cohen et al., 2018; Krippendorp, 2004) de doce documentos relativos al sentido numérico que lo describían con más de cinco componentes implícita o explícitamente. Los documentos consultados son Almeida et al. (2014), Bütüner (2018), Castro y Segovia (2015), Chen et al. (2017), García y Adamuz (2019), Greeno (1991), McIntosh et al. (1992), NCTM (2003), Resnick (1989), Sowder (1992), Tsao y Lin (2012) y Yang y Wu (2010).

Dicho análisis de contenido nos permitió obtener dos informaciones: por un lado, una síntesis de una lista de componentes comunes. Por otro, una descripción de las relaciones que se establecen entre las componentes. Tras el análisis de los documentos, inicialmente se evidenció alta recurrencia en siete componentes generales del sentido numérico, denominadas: representaciones; capacidad para comprender los significados básicos de los números; comprender la magnitud relativa y absoluta de los números; puntos de referencia; efectos relativos de las operaciones sobre los números; crear estrategias; capacidad para juzgar la razonabilidad de un resultado computacional.

Se tenía por hipótesis que la alta recurrencia de estas componentes podría arrojarnos las componentes que necesitábamos para alcanzar nuestro objetivo. Sin embargo, las siete componentes describían parcialmente el desarrollo del sentido numérico en un sujeto porque algunas estaban muy desglosadas o hacían énfasis a un solo conjunto numérico o solo contenían un descriptor que dejaba por fuera otras características del sentido numérico. Por ejemplo, no aparecía con alta recurrencia “relacionar las operaciones” siendo este un indicador potente para realizar acciones que permiten moverse con facilidad con las operaciones.

Intentando completar un poco las componentes de tal manera que fueran más descriptivas, procedimos a “examinar cuál es la función social del aprendizaje del contenido correspondiente, y posteriormente qué significa dicho contenido (elementos matemáticos estructurales, signos y situaciones), con lo que podremos determinar las componentes del sentido que tenemos que abordar en su desarrollo” (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022, p. 60). Para llevar a cabo este trabajo partimos de preguntas a las que tratamos de responder atendiendo a elementos del significado: ¿qué aspectos numéricos necesito para hacer una compra, al estimar una altura? ¿necesitamos conocer los conceptos para usar un número? Utilizamos para ello el documento de Rico et al. (2008), en el que los autores realizan un análisis del significado del número natural.

Resultados

Dividimos los resultados en dos partes. En la primera, enumeramos la lista de las componentes sintetizadas y damos una breve descripción. En la segunda, describimos las relaciones entre las componentes.

Componentes del sentido numérico

Las capacidades resultantes del ejercicio de examinar la función social del aprendizaje del contenido fueron reinterpretadas, reorganizadas y renombradas así:

Componentes relativas al número sin operación:

- C1. Manipulación de las diferentes representaciones del número: El uso de las representaciones está condicionada por el contexto de la situación, por tanto, es indispensable para la comunicación de ideas matemáticas (p.e Chen et al., 2017; Resnick, 1989; Sowder, 1992)
- C2. Interpretación y uso del número en contexto: en términos de decisiones dadas las diversas situaciones. (p.e. Almeida et al., 2014; Castro y Segovia, 2015; Yang y Wu, 2010).
- C3. Conocimiento de las propiedades del sistema de numeración decimal: composición y descomposición, valor posicional, … (p. e. Bütüner, 2017; Chen et al., 2017; NCTM, 2003).

Componentes relativas al número con operación (estructura aditiva y multiplicativa):

- C4. Interpretación de las operaciones en contextos: implica interpretarla, para qué y en qué momento se utiliza (acciones), por qué es necesario hacerla y cómo es su estructura. (p.e. McIntosh et al., 1992; NCTM, 2003)
- C5. Uso flexible de las propiedades de las operaciones: cálculo algorítmico teniendo en cuenta las reglas de las operaciones y la automatización de tablas y propiedades (p.e. Chen et al., 2017; García y Adamuz, 2019; NCTM, 2003; Sowder, 1992).
- C6. Relacionar las operaciones: relación de las propiedades, de las tablas y de la algoritmia. (p.e. Almeida et al., 2014; McIntosh et al., 1992; NCTM, 2003).

Componente relativas a aspectos procedimentales de números y operaciones:

- C7. Crear procedimientos menos convencionales para el cálculo mental y estimación: implica la aplicación de las destrezas de cálculo (mental y estimación) y de conocimiento del sistema numérico, del conocimiento de hechos y de las representaciones para hacer un algoritmo no convencional o inventado. (p.e. Bütüner, 2017; NCTM, 2003; Resnick, 1989; Tsao y Lin, 2012).

- C8. Razonar sobre los hechos, los procedimientos y los resultados: debe estar presente en todas las acciones que realiza el sujeto para facilitar la toma de decisiones. Para Tsao y Lin (2012) implica que el sujeto "aprenda a cuestionarse mediante preguntas claves, antes, durante y después del proceso de solución" (p. 19). (p.e. Bütüner, 2018; Castro y Segovia, 2015; NCTM, 2003; Yang y Wu, 2010).

Sentido y significado de número natural

Al hacer el resumen de los elementos de sentido y modo de uso de los números naturales identificamos dos aspectos que nos permiten organizarlos: 1) el sistema relacional del número natural con las relaciones de orden e igualdad y 2) las estructuras aditiva y multiplicativa que se generan al considerar las operaciones aritméticas. En ambos, profundizamos en los hechos, los procedimientos, las relaciones, las representaciones, los fenómenos, las situaciones en que se emplean y sus modos de uso descritos en Rico et al. (2008).

La Tabla 1 resume la correspondencia de las ocho componentes abordadas en este trabajo y el estudio de los elementos estructurales, representacionales y de sentido de los números naturales. Las componentes fueron distribuidas en cuatro grupos, ampliando las propuestas de McIntosh et al. (1992) y Ruiz-Hidalgo y Flores (2022): número no operable (C1, C2, C3); número y operaciones (C4, C5, C6); procedimientos no convencionales (PNC) que involucran al número y la operatoria (C7); y razonamientos (C8). Está octava capacidad está implícita en las relaciones que se establecen entre las otras componentes. Como se mencionó anteriormente los elementos de significado del número natural en general han sido tomados de Rico et al. (2008) y específicamente de Kilpatric (2001) y Llinares (2001) para C1; Cañadas y Castro-Rodríguez (2011), Castro y Ruiz-Hidalgo (2011) para C2, C3, C4 Y C5; Rathgeb-Schnierer y Green (2019); Segovia y Lupiañez (2011) para C7; McIntosh et al. (1992), NCTM (2003) entre otros para C8.

Tabla 1. Relación entre los elementos de significado de número natural y componentes del sentido numérico.

Componente		Elementos del significado	GRUPO
C8. Razonar sobre los hechos, procedimientos y resultados. Razonar. Justificar. Argumentar. Metacognición.	C1. Manipulación de las representaciones del número	Símbolo o texto. Oral. Modelos (gráfico, concreto, manipulativo, lineal)	Números
	C2. Interpretación del número en contexto	Medida Etiqueta Conteo Cardinal Ordinal	
	C3. Conocimiento de las propiedades del sistema de numeración	Principio Aditivo Principio multiplicativo Valor posicional Base 10 Cero	
	C4. Uso de las operaciones en contexto	Acciones aditivo: añadir, disminuir, juntar, diferenciar Acciones multiplicativas: suma reiterada, producto cartesiano, reparto, cociente Clasificación semántica de problemas: aditivos (cambio, comparación, combinación, igualación), multiplicativos (proporcionalidad, comparación multiplicativa, produto cartesiano)	Números y operaciones
	C5. Uso flexible de las propiedades de las operaciones	Algoritmos convencionales Automatización de tablas/Hechos numéricos Propiedades: conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro	
	C6. Relacionar las operaciones	Conexión de algoritmos y propiedades	
	C7. Crear procedimientos menos convencionales	Algoritmo no convencional Uso de elementos de referencia Calculo mental Aproximar Estimar	PNC

Relaciones dadas entre las componentes

Las componentes del sentido numérico sintetizan aspectos que deben contemplarse coordinadamente, pues el desarrollo de cada una de ellas necesita apoyarse en las habilidades de las otras (Ruiz-Hidalgo y Flores 2022), lo que implica que las componentes están relacionadas de manera natural porque forman parte del manejo del conjunto. Las componentes que manifiestan relaciones explícitamente son C8 y C6, que describimos a continuación. Posteriormente, subrayaremos estas relaciones, que siempre son capacidades de C6 y/o C8, entre el resto de las componentes: C1, C2, C3, C4, C5 y C7.

C8. Los razonamientos. Los razonamientos expresan la secuencia argumental "de las capacidades para establecer nuevas relaciones entre las unidades de información que constituyen un concepto" (Rico, 1997, p. 33). Cada vez que relacionemos una componente con otra estaremos destacando capacidades de C8, puesto que "una persona con buen sentido numérico está pensando y reflexionando sobre los números, las operaciones y los resultados que se están produciendo. Este pensamiento reflexivo en un momento u otro involucrará a cualquiera de los componentes del marco” (Mcintosh et al., 1992, p. 5). Así, las relaciones serán expresadas como relaciones entre capacidades inter-componentes y serán particulares para el sistema de los números naturales y generalizables a otros sistemas numéricos solo en algunos casos. Por ejemplo, “los alumnos muestran fluidez de cálculo cuando demuestran flexibilidad con los métodos que eligen, comprenden y pueden explicar estos métodos (argumentan).. los métodos que usan el sujeto deben basarse en ideas matemáticas que ha comprendido como la estructura del sistema numérico de base diez, las propiedades y las relaciones entre los números” (NCTM, 2003, p. 156).

C6. Relacionar las operaciones. McIntosh et al. (1992) consideran que, para entender la relación entre las operaciones, es esencial comprender primero cada operación. Para este autor, construir una red de conexiones entre las operaciones facilita los procesos de pensamiento y la resolución de problemas. Esto permite al estudiante tener una variedad de estrategias y operaciones para resolver un mismo problema de varias formas. Aunque consideramos que no es la variedad de operaciones la que enriquece o facilita los procedimientos, precisamente las conexiones le pueden facilitar al estudiante combinar operaciones y moverse flexiblemente con ellas. Así, las relaciones expresadas por las capacidades de C6 se producen, básicamente, cuando conectamos capacidades de uso flexible de las propiedades de las operaciones (C5), relacionar las operaciones (C6) y procedimientos no convencionales para el cálculo mental y estimación (C7).

Desde esta perspectiva, una conexión valiosa se da con la relación inversa entre operaciones en el sentido de que proporciona al alumno otra forma de pensar acerca de un problema. Por ejemplo, cuando se le pide que decida el cociente de 480 / 8, una persona puede ver esto como 8´ ? = 480 en lugar de un problema de división (McIntosh et al., 1992, p.7). Sin embargo, otro sujeto puede tomar otra ruta haciendo uso de las propiedades de los naturales y hacer relaciones entre las operaciones que en efecto le va a permitir aproximarse o incluso acertar la respuesta.

C1. Manipular las diferentes representaciones del número. Los naturales al igual que los otros conjuntos numéricos emplean un lenguaje oral/escrito para indicar la cantidad de elementos de un conjunto (cardinalidad), simbólico para indicar cardinalidad, etiquetar (número de identificación) y modelos para representar sus elementos (lineales, concretos/tangibles o manipulativos) y propiedades, lo que facilita comprenderlos, usarlos y la operatoria entre ellos.

En este caso, las relaciones de las representaciones son evidentes con cómo y cuándo se usan los números (C2) y con el conocimiento del sistema de numeración decimal (C3). Por ejemplo, la representación lineal enfatiza el orden, lo que hace que se relacione directamente con el uso ordinal que lo diferencia del uso cardinal que podría estar más claramente representado con un modelo cardinal. Ver Figura 1.

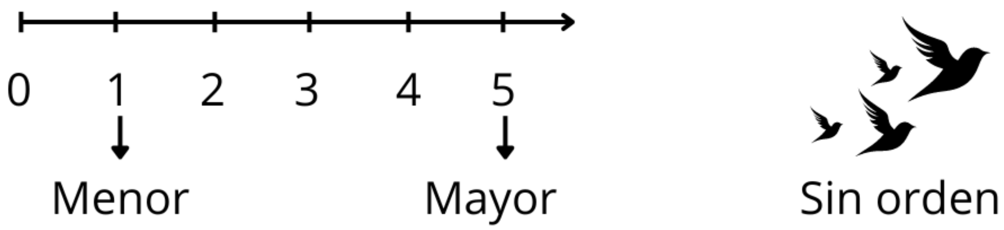

Figura 1. Ejemplo de modelos lineal y cardinal que enfatizan diferentes usos del número natural

Asimismo, la representación condiciona y está condicionada por la operación que se vaya a realizar (C4) y el algoritmo que se vaya a utilizar (C5). La representación también se relaciona con la posibilidad y la técnica para aproximar o realizar cálculos mentales (C7). Sierra (1998) expresa estas relaciones diciendo que al representar se comunican conceptos porque se explican y a su vez se desarrolla la propia capacidad cognitiva de pensamiento al usarlos, al descomponerlos se manipulan sintácticamente los símbolos y eso condiciona la operatoria o se elaboran semánticamente referentes de dichos símbolos, se construyen nuevas relaciones.

Por ejemplo, al ejecutar una suma o resta con un modelo lineal, se representa la primera cantidad y, posteriormente, la segunda la modifica. En este caso, la acción con la que se relaciona es la de suma como añadir (resta como disminuir). Para el caso de la acción juntar, el uso de material manipulativo (material multibase, por ejemplo), en el que los objetos se juntan para sumar, se asocia al uso de la suma para juntar. Ver Figura 2.

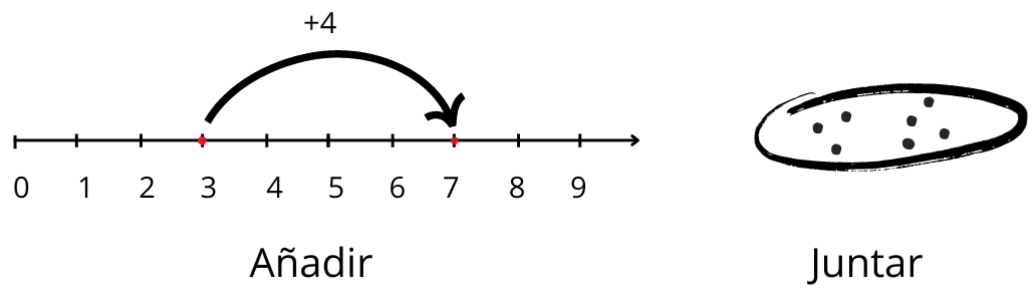

Figura 2. Cada representación enfatiza aspectos diferentes de la suma.

C2. Interpretación del número en contexto. El uso de número natural está condicionado por el contexto en el que se desarrolla. En este sentido los números naturales se usan para contar, ordenar, etiquetar, medir y determinar la cantidad de elementos que hay en un grupo (cardinal). Por ello las relaciones de C2 con C1 y C3 son evidentes y necesarias. Puig (1997) indica que las personas que aprenden parten de fenómenos (o de situaciones o contextos) que permiten experimentar, usar e interpretar determinado concepto de manera que tenga sentido y produzca nuevos significados utilizables en nuevas situaciones en las que se necesite dicho concepto.

Por ejemplo, diferenciar que 2 puede ser el número de una casa (etiqueta), 2 la cantidad de elementos que hay en un grupo (cardinal) facilita su uso y toma significado para el sujeto.

C3. Conocimiento de las propiedades del sistema de numeración decimal. Para darle un mayor y adecuado uso a los números es necesario conocer y entender cómo funciona el sistema, ello incluye identificar, dominar y comprender la base sobre la cual están construidos, es decir, cuál es su estructura de agrupamientos, cómo funcionan sus símbolos dados una posición (valor posicional), qué rol tienen el cero y por qué es necesario incluirlo junto con las relaciones de sus elementos (propiedades), ello ayuda a tener certeza en la toma de decisiones. Luego las relaciones de C3 con (C1, C2) están directa e implícitamente dadas. También McIntosh et al. (1992) consideraba que el expresar un número en una forma equivalente es el resultado de reconocer cómo facilita esta nueva equivalencia operar en los números recompuestos (C1, C2, C4, C5, C7).

Reconocer que el número se puede descomponer o recomponer de diversas maneras, por ejemplo, 246 es 2 centenas, 4 decenas y 6 unidades o también puede ser 24 decenas y 6 unidades.

C4. Interpretación de las operaciones en contextos. Para Ruiz-Hidalgo y Flores (2022) la comprensión de las operaciones consiste en asociar las operaciones con las acciones correspondientes para determinar qué operación realizar. Sin embargo, en la realidad cuando los sujetos se enfrentan a problemas aditivos (cambio, comparación, combinación e igualación), multiplicativos (proporcionalidad, comparación multiplicativa, produto cartesiano) difícilmente logran asociar las operaciones a las acciones correspondientes y pregunta al maestro ¿qué hay que hacer, una suma, una resta? Enfrentarse a los problemas aritméticos verbales requiere del buen dominio de C1, C2, C3.

NCTM (2003) expone diversos ejemplos para ampliar la comprensión de las operaciones, por ejemplo, en la multiplicación y división al considerar la relación inversa entre las dos operaciones. Situaciones multiplicativas como “3 barras de chocolate a 59 céntimos cada una (tasas), “el libro pesa 4 veces más que la tableta de chocolate” (comparación multiplicativa) (p.156).

C5. Uso flexible de las propiedades de las operaciones. Requiere el conocimiento de las propiedades y formas de representar las expresiones (C1, C3), que condiciona la operatoria y aporta o resta flexibilidad al momento de operar, ya que posibilitan diversidad de formas para hacer un cálculo (C7) e interpretar la operación (C4), es decir, admite varias maneras de llegar a una respuesta (Kilpatrick, et al. 2001).

En los naturales se cumplen la propiedad asociativa y conmutativa tanto para la suma y para la multiplicación. La propiedad distributiva solo se cumple para la multiplicación con respecto la suma. No se cumplen la conmutativa en la resta, ni en la división.

Interpretando al número (C2), las operaciones (C4), dominando su representación (C1), comprendiendo su estructura (C3), relacionando operaciones (C6), y dominando las propiedades (C5) el sujeto puede moverse con flexibilidad y certeza frente a sus acciones para realizar operaciones NCTM (2003).

Por ejemplo, utilizar 7´3 para calcular 70´3 o 7000´300 (aplicando combinaciones numéricas básicas con números de una cifra) a problemas relacionados (NCTM, 2003). Otro ejemplo es cuando quieres resolver 3´(2+4) se puede desarrollar de dos maneras. Realizando primero la operación interna 2+4 donde se mantiene el orden de las operaciones y luego su resultado que en este caso es 6 lo multiplicamos por 3 o usando la propiedad distributiva 3´2+3´4 y finalmente sumar los dos resultados parciales.

C7. Procedimientos no convencionales para el cálculo mental y estimación. En cualquier etapa del aprendizaje y diversos contextos pueden surgir estos procedimientos inventados por los sujetos. Para Rico (2001) "cualquier procedimiento que permite responder a una cuestión haciendo uso de las relaciones y conceptos de una determinada estructura conceptual es llamada estrategia" (p. 36), lo que permite relacionar C7 con C1, C2, C3, C4 y C5. Estos procedimientos no convencionales se posicionan como alto nivel de sentido, ya que evidencian en el sujeto cierta flexibilidad de cálculo, definido éste por Rathgeb-Schnierer y Green (2019) como un enlace cognitivo de los conceptos y procedimientos matemáticos. Veamos unos ejemplos de investigaciones realizadas por estos autores.

"Simone (S) resuelve 71-36

S: A 71 le quito uno, y entonces 70 menos 36 son cuatro - (...) 40 - (...) - 70

menos 30 es 40 menos 6 es 34 más 1 es 35" (p. 6).

Otro ejemplo, 298´42 se plantea como 300´42–2´42 o 41´16 y plantearlo como 41´4 y su resultado duplicarlo (NCTM, 2003, p. 159).

Síntesis y reflexiones finales

El análisis de las conexiones entre componentes C1, C2, C3, C4, C5 y C7 del sentido numérico descritas en la sección anterior permite el establecimiento de cierta jerarquía u orden que se presenta en la Figura 2 en forma de estructura reticular, ilustrando no solo dicho orden sino también las relaciones que ilustra las interconexiones entre las componentes (C6 y C8).

Son las interconexiones las que sugieren procesos cognitivos de orden superior y que vincula el desarrollo del sentido numérico con la metacognición.

Una persona con un buen sentido numérico está pensando y reflexionando sobre los números, las operaciones y los resultados que se están produciendo. Este pensamiento reflexivo en un momento u otro involucrará a cualquiera de los componentes (McIntosh et al., 1992, p 5). La Figura 3 ilustra las interconexiones entre los componentes principales.

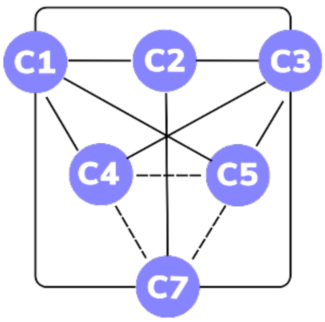

Figura 3. Relación de componentes del sentido numérico para el caso de los números naturales.

C6 = - - - y C8 =___

En el trabajo hemos sintetizado y reescrito un sistema de componentes del sentido numérico para luego identificar sus descriptores de significado.

Al elaborar el grupo de componentes identificamos la necesidad de entrar en detalle en los significados de varios de los conjuntos numéricos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje del número, porque sospechamos que cada conjunto numérico manifiesta unos elementos estructurales de representación y de sentido diferentes. En este trabajo nos restringimos al conjunto numérico de los naturales. Seguidamente al describir sus capacidades mezclamos los significados de los números naturales con las ocho componentes propuestas.

Relacionamos las ocho componentes de tal manera que se establecieran relaciones entre ellas basándonos en los descriptores del significado expresados previamente en las investigaciones consultadas. Esto nos ha permitido determinar que 6 de las componentes se describen por capacidades específicas (conocimiento de hechos numéricos, manejo de destrezas y algoritmos, y uso y aplicación del número natural y las operaciones) y otras dos (C6 y C8) se describen por capacidades que son en realidad relaciones entre descriptores de las otras componentes. Además, la necesidad de desarrollar capacidades del conjunto numérico (C1, C2 y C3) es un requisito indispensable para poder desarrollar otras de naturaleza operatoria (C4, C5 y C7), lo que nos ha permitido establecer un orden (no total) entre las componentes, donde las relaciones son descritas por capacidades de las componentes C6 y C8.

Por último, como propuesta de continuidad se pretende elaborar la misma descripción para otros números (enteros, decimales y fracciones) para establecer diferencias y semejanzas entra las relaciones entre las componentes cuando trabajamos con varios sistemas numéricos y así intentar comprender como es el desarrollo cognitivo progresivo del sentido numérico cuando evolucionamos por los sistemas numéricos que se trabajan en la escuela. Asimismo, será necesario realizar estudios empíricos que respalden las propuestas realizadas.

Referencias

Almeida, R. y Bruno, A. (2014). Respuestas de estudiantes de secundaria a tareas de sentido numérico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 127-136). SEIEM.

Bütüner, S. Ö. (2018). Comparing the use of number sense strategies based on student achievement levels. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(6), 824-855. 10.1080/0020739X.2017.1410738

Castro, E. y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En L. Rico y P. Flores (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 109-126). Ediciones Pirámide.

Castro, E. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 99-121). Ediciones Pirámide.

Cañadas, M. C. y Castro-Rodríguez, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 75-96). Ediciones Pirámide.

Chen, F., Yan, Y. y Xin, T. (2017). Developing a learning progression for number sense based on the rule space model in China. *Educational Psychology, 37*(2), 128-144.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8th ed.). Routledge.

García, M. T. y Adamuz, N. (2019). *Del número al sentido numérico y de las cuentas al cálculo táctico: Fundamentos, recursos y actividades para iniciar el aprendizaje*. Octaedro.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Krippendorp, K. (2004). *Content Analysis: An introduction to Its methodology*. CA: Sage

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro. (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 151-175). Síntesis.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-44.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*(2), 162.

Rico, L. (2001). Matemáticas en educación primaria. En E. Castro. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas en educación primaria* (pp. 23-40). Síntesis.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Ed.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp.85-100). Pirámide.

Rico, L. y Díez. Á. (2011). Las matemáticas y el maestro de primaria. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 23-45). Ediciones Pirámide.

Rico, L., Marín. A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 58*, 7-23.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas, 70*, 48-54.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-152). Ediciones Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L. Blanco (Ed.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 55-77). Editorial Universidad de Granada.

Sierra, M., González-Astudillo, M.T. y López-Esteban, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula, 10.* (pp. 89-104). Universidad de Salamanca.

Segovia, I. y Lupiañez, J. L (2011). Cálculo y estimación. En I. Segovia y L. Rico (coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 147-166). Ediciones Pirámide.

Sowder, J. T. (1992). Estimación y sentido numérico. En D. Grouws (Ed.), *Manual de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 371-389). Macmillan.

Tsao, Y. y Lin, Y. (2012). Elementary school teachers' understanding towards the related knowledge of number sense. US-China Education Review B, 12(6) 17-30.

Yang, D. C., y Wu, W. R. (2010). The study of number sense: Realistic activities integrated into third-grade math classes in Taiwan. *The Journal of Educational Research*, *103*(6), 379-392.

Rathgeb-Schnierer, E. y Green, M. G. (2019). Developing flexibility in mental calculation. *Educação & Realidade*, *44* (Educ. Real., 2019 44(2)), e87978. https://doi.org/10.1590/2175-623687078