

<https://doi.org/10.30827/reugra.v31.30670>

Artículos Originales

Modelo matemático en investigación educativa. Definición e implicaciones para el análisis de modelos escolares

Mathematical model in educational research. Definition and implications for the analysis of school models

Información

Fechas:

Recibido: 2024.01.10

Aceptado: 2024.02.09

Publicado: 2024.04.26

Correspondencia:

Jesús Montejo-Gámez

jmontejo@ugr.es

Conflicto de intereses:

El autor no reconoce conflicto de intereses en relación a este manuscrito.

Financiación:

En esta publicación no ha recibido ninguna ayuda o financiación.

Autorías

Jesús Montejo-Gámez¹  0000-0001-9461-6348

¹Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España

Cómo citar este trabajo:

Montejo-Gámez, J. (2024). Modelo matemático en investigación educativa. Definición e implicaciones para el análisis de modelos escolares. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*. 31, 4-18. <https://doi.org/10.30827/reugra.v31.30670>

RESUMEN

Introducción: este trabajo presenta una reflexión sobre diferentes conceptualizaciones de modelo matemático en investigación educativa con el fin de proponer una definición de modelo aplicable a estudios empíricos.

Método: se desarrolló una revisión de distintas aproximaciones teóricas a la noción de modelo presentes en la literatura, así como de diversas herramientas para la caracterización de modelos escolares. Se recopilaron los elementos comunes más relevantes y se sintetizaron para dar una definición de modelo y una estrategia de análisis coherente con ella.

Resultados: el concepto de modelo matemático propuesto se articula en términos de tres dominios separados pero que deben interpretarse de manera conjunta: el sistema que se modeliza, la matematización que propone el modelo y las representaciones que se utilizan para expresarlos. La estrategia de análisis asociada se fundamenta en la identificación de diferentes elementos del sistema y de la matematización a partir de las afirmaciones expresadas en las representaciones de una producción escrita.

Conclusiones: la definición y herramienta de análisis proporcionadas garantizan la coherencia entre la teoría y la práctica en investigación educativa, además de sintetizar y simplificar elementos de otras propuestas.

Palabras clave: modelización; herramienta de investigación; matematización.

ABSTRACT

Introduction: this paper discusses different conceptualisations of mathematical model in educational research, with the aim of providing a definition which applies to empirical studies.

Method: it was a review of different theoretical approaches to the notion of model in the literature, as well as of various tools for the characterisation of school models. The most relevant shared elements were compiled and synthesised to provide a definition of a model and an analysis strategy consistent with it.

Results: the concept provided for a mathematical model is organised by means of three separate domains that must be interpreted together: the system that is modelled, the mathematisation proposed by the model and the representations that are used to express them. The associated analysis strategy is based on the identification of different elements in the system and in the mathematisation from the statements expressed in the representations within a written production.

Conclusions: the provided definition and analysis tool ensure coherence between theory and practice in educational research, as well as synthesising and simplifying elements from other approaches.

Keywords: modelling; research tool; mathematisation.

Introducción

El actual contexto educativo, en el que se busca el desarrollo de competencias por parte del alumnado, fomenta la proliferación de prácticas de enseñanza que den sentido a las matemáticas (Ruiz-Hidalgo et al, 2020). La actividad de modelización es de potencial valor para esta finalidad ya que estimula la reflexión sobre la relevancia de las matemáticas (Montoya et al, 2017; Kaiser et al., 2006) y su conexión con el mundo real (Stillman et al., 2023), promoviendo así el compromiso de los estudiantes con la comprensión y aplicación de contenido matemático escolar (De Lange, 2003; Osorio et al., 2023). Diferentes autores señalan además el vínculo entre la modelización y competencias matemáticas como la formulación de hipótesis (Kämmerer, 2023; Fernández-Ahumada y Montejo-Gámez, 2019), la resolución de problemas (Niss y Højgaard, 2019) y la comunicación matemática (Barquero et al., 2022). Esto indica que la introducción de tareas que promuevan la modelización es un recurso de utilidad para la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles preuniversitarios (López et al, 2020) y en la formación del profesorado (Guerrero y Borromeo, 2022), lo que pone de manifiesto el interés de la modelización dentro de la investigación en didáctica de la matemática.

Trabajos como los de Ferrando (2019), a nivel nacional, o los de Barquero (2023) y Cevikbas et al. (2022), en el contexto internacional, recogen los resultados de investigación más recientes sobre aprendizaje de la modelización matemática. Estas revisiones reflejan diferentes aproximaciones teóricas que permiten las características que los investigadores atribuyen a la modelización matemática en el ámbito educativo. La primera es su dimensión *procesual*, enfoque bajo el que modelizar es una actividad que se desarrolla a partir de ciertas acciones de naturaleza diversa. A este respecto, autores como Chevallard et al. (1997), desde la teoría Antropológica de lo Didáctico, señalaron que la modelización es una actividad humana identificable en gran medida con la actividad matemática. Del mismo modo, corrientes como la Educación Matemática Realista asumen que las matemáticas son una actividad humana y que no hay matemáticas sin matematización (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). Siguiendo esta línea, existe un volumen notable de trabajos que conceptualizan la modelización como un proceso, eventualmente cíclico, asociado a la secuencia de acciones que los individuos desarrollan para resolver una situación problemática. De esta manera surgen concepciones como la del *Ciclo de Modelización*, discutida por Greefrath y Vorhölter (2016), o herramientas para el análisis del proceso de resolución de tareas como las propuestas de Ärlebäck y Albarracín (2019), Czocher (2016), Czocher y Hardison (2021) o Ledezma et al. (2022).

La segunda característica relevante de la modelización en educación matemática es, precisamente, su valor educativo. Bajo esta perspectiva, Maaß

(2006) describió un conjunto de competencias de modelización asociadas a las acciones de ciclo. Por su parte, Niss y Højgaard (2019) incluyeron la modelización como un dominio de la competencia matemática que debe desarrollarse en la etapa escolar. Blomhøj (2004) fue más allá describiendo directamente la modelización como una práctica de enseñanza centrada en que el alumnado relacione las matemáticas y el mundo real. A su vez, García et al. (2006) enfatizaron que la modelización matemática tiene un valor didáctico doble, ya que su uso es pertinente para apoyar la enseñanza de contenido matemático y también para trabajar el desarrollo de competencias específicas.

La tercera característica de la modelización señalada en la literatura es su dimensión instrumental. En efecto, en contextos educativos esta actividad suele emerger para responder un problema sobre cierto sistema, lo que llevó a algunos autores como Castro y Castro (1997) a identificar la modelización con la resolución de problemas. Otros investigadores desvinculan la modelización de la resolución de tareas concretas, destacando que la función de modelizar es la de producir conocimiento sobre el sistema donde se estudia (Montoya et al., 2017). Estas dos visiones se integran en la Educación Matemática Realista, que discute la dualidad entre la *modelización para*, orientada a la resolución de un problema (aprendizaje más básico), y la *modelización de*, orientada a la abstracción de un esquema general con el fin de generar conocimiento (aprendizaje más avanzado). Puede consultarse la discusión desarrollada a este respecto por Van den Heuvel-Panhuizen (2003), y los trabajos ahí citados. La dualidad *modelización para* – *modelización de* pone de manifiesto de nuevo otra finalidad instrumental de la modelización, que es la de crear un *producto final o modelo matemático* (Stillman et al., 2023). En este sentido, la Perspectiva Modelos y Modelización incide en que la finalidad del proceso de modelizar es la de crear modelos efectivos que respondan a problemáticas de interés para el alumnado. Desde este punto de vista, la enseñanza de la modelización se basa en el diseño de tareas que promueven que el alumnado diseñe, documente y evalúe sus propios modelos. Las Actividades que Estimulan la Modelización (Lesh et al., 2000) o las Secuencias de Desarrollos de Modelos (Ärlebäck y Doerr, 2020) son propuestas que materializan esta perspectiva.

La integración de las tres características descritas permite definir modelización en educación matemática como *la actividad escolar que surge a partir de una cuestión sobre cierto sistema y se desarrolla mediante el proceso de diseño, aplicación y evaluación de modelos matemáticos para construir conocimiento acerca del sistema y tiene como finalidad el desarrollo de ciertas competencias asociadas a este proceso* (Montejo-Gámez et al., 2021). Esta definición puede hacerse operativa para la investigación empírica sin más que especificar las actividades están implicadas en el *proceso de modelización*, *las destrezas matemáticas* asociadas, o lo que es un *modelo mate-*

mático. La literatura en educación matemática ha abordado con gran detalle aproximaciones teóricas focalizadas en el proceso y en las destrezas, algunas de las cuales se han descrito previamente. Sin embargo, la reflexión sobre los elementos que caracterizan un modelo matemático escolar y su repercusión sobre el análisis de producciones escritas ha sido discutida con menor profundidad, lo que motiva el presente trabajo. De forma específica, se plantean las siguientes preguntas: ¿Cómo debe entenderse *modelo matemático* en investigación educativa?, y ¿qué evidencias son relevantes para caracterizar modelos escolares y de qué forma se pueden analizar sistemáticamente?

Para discutir las respuestas a las preguntas planteadas, este documento se organiza de la siguiente manera: la siguiente sección se ocupa del concepto de modelo matemático a partir de la recopilación de ideas utilizadas en investigaciones previas y su síntesis en una definición que integra los elementos más comunes. La tercera sección se ocupa de los instrumentos y procedimientos de análisis para la investigación empírica de modelos escolares. Finalmente, la cuarta sección extrae y discute las conclusiones principales del trabajo y propone vías futuras de investigación.

Concepto de modelo en educación matemática

El debate sobre el significado del término *modelo matemático* se originó en el ámbito de las ciencias y la ingeniería (p.e., Minsky, 1965; Velten, 2009). Las aproximaciones desde estas disciplinas materializan la intuición de que un modelo crea una relación entre cierto sistema y una estructura matemática vinculada a dicho sistema para obtener información sobre el mismo. Dado que esta relación es compleja y que existe una gran diversidad de enfoques bajo las que esta se puede crear, no hay hoy en día consenso entre los investigadores sobre la naturaleza de los modelos matemático ni los elementos que lo integran. En el ámbito de la educación matemática, esta falta de consenso se refleja en una producción relativamente baja de estudios sobre modelos matemáticos escolares que, en ocasiones, no se ocupan de la conexión entre las ideas teóricas descritas y el análisis de producciones escritas puesto en práctica. Con el fin de paliar estas debilidades, se propone recopilar diferentes ideas que se han utilizado en investigación educativa para estudiar modelos matemáticos, e integrarlas en una definición teórica de modelo que pueda llevarse a la práctica.

Antecedentes sobre la definición de modelo

Las ideas que provienen de las disciplinas externas a la educación matemática ponen el foco en en una de las características de la modelización que deben tenerse en cuenta: un modelo da respuestas a una situación problemática propia de cierto sistema (no necesariamente matemático). Un ejem-

plo de este punto de vista lo constituye la definición de Minsky (1965), según la cual un modelo es un objeto que permite tomar decisiones sobre preguntas en un sistema, de manera que debe abstraer propiedades relevantes del mismo. De forma análoga, Velten (2009) definió modelo como la terna (S, Q, M), en la que S es el sistema de partida, Q es la pregunta a resolver y M es un conjunto de afirmaciones matemáticas que se pueden utilizar para responder a Q. Este enfoque utilitarista, llevado a la educación matemática, pone de manifiesto la relevancia de las representaciones utilizadas para resolver una situación problemática, entendidas como las expresiones externas del modelo (Czocher y Hardison, 2021). En relación a las representaciones, algunos autores subrayan que un modelo establece un cambio de lenguaje, ya sea entre el mundo real y las matemáticas Blum y Borromeo (2009) o entre diferentes descripciones matemáticas (García et al., 2006). Carreira et al. (2020), por su parte, identificaron directamente el modelo con la representación del sistema en el que se plantea la situación a resolver.

Otro elemento fundamental de un modelo matemático desde el punto de vista de la investigación educativa es su estructura matemática subyacente, que abstrae las propiedades relevantes del problema a resolver. Este elemento es crucial para autores como Israël (1996), que concibió el modelo como una parte de las matemáticas aplicadas a una parte de la realidad, o Henry (2001), que lo definió como una interpretación abstracta, simplificada o idealizada de un objeto, de un conjunto de relaciones o de un proceso evolutivo que se deriva de una descripción de la realidad. Investigadores como Biembengut y Hein (1999) profundizaron en los elementos que integran la estructura matemática involucrada en un modelo, señalando que el modelo de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones que representan dicho fenómeno. Esta aproximación analítica fue también adoptada desde la perspectiva Modelos y Modelización. De forma específica, Lesh et al. (2000) definieron modelo matemático a partir de cuatro componentes fundamentales: (i) elementos, (ii) relaciones entre elementos, (iii) operaciones que describen las interacciones entre elementos y (iv) patrones o reglas que son aplicables a las relaciones y operaciones. Esta definición fue simplificada por Lesh y Harel (2003), que propusieron una idea basada en la estructura conceptual (elementos y relaciones) y los procedimientos que este lleva asociado (que incluían las operaciones y los patrones). Este enfoque también incidió en las representaciones como parte fundamental de los modelos, pero desvinculándolas de un problema específico.

La aproximación analítica propuesta desde la perspectiva de Modelos y Modelización está conectada con otras definiciones basadas en componentes indisolubles pero que pueden observarse de forma separada para comprender un modelo. Siguiendo un formalismo similar al descrito previamente en la propuesta de Velten (2009), Blum y Niss (1991) consideraron que un modelo es una terna (S, M, R), donde S es la situación del problema real, M es

un conjunto de entidades matemáticas y R el conjunto de relaciones entre S y M . Del mismo modo, Niss (2012) definió modelo matemático como otra terna (D, f, M) , en el que D y M son dominios extramatemático y matemático, respectivamente, y f es la aplicación *matematización* que los conecta. Czocher (2017) amplió estas ideas para dar una definición basada en la cuaterna (S, Q, M, R) , donde S es un sistema, Q es una pregunta sobre S , M es una serie de afirmaciones matemáticas hechas para responder a Q , y R son las relaciones entre los objetos de S y M . Montejo-Gómez y Fernández-Ahumada (2019) señalaron que contemplar S y M como conjuntos de afirmaciones facilita el acceso a estos elementos del modelo, pero que las relaciones establecidas en R son difícilmente observables al analizar producciones escritas escolares. En el contexto del presente trabajo, que busca encontrar una definición teórica que se pueda llevar a la práctica, se opta por omitir el conjunto de relaciones y considerar las representaciones, dando lugar a la definición que se presenta en la siguiente sección.

Sistema, matematización y representaciones de un modelo

Teniendo en cuenta los antecedentes discutidos previamente, se define modelo matemático en investigación educativa como *un conjunto de afirmaciones y preguntas sobre un sistema que expresan, a través de diferentes representaciones, información relevante que permite emplear las matemáticas para obtener conocimiento nuevo sobre el sistema*. Bajo esta aproximación, la descripción de un modelo escolar implica la descripción de las tres componentes que se detallan a continuación.

La primera componente de un modelo es el *sistema* sobre el que este busca obtener conocimiento. Está determinado por el contexto en el que se crea el modelo y contiene los siguientes tres tipos de elementos. (i) *Preguntas*, que son las cuestiones explícitas, planteadas por una tarea o por los creadores del modelo, que estimulan la búsqueda de conocimiento en el sistema (pueden involucrar contenido matemático). (ii) *Relaciones*, que son las afirmaciones que expresan información relevante sobre el contexto. Incluyen el conocimiento nuevo sobre el sistema que se haya obtenido las respuestas a las tareas y pueden involucrar contenido matemático. (iii) *Objetos*, que son las entidades a los que se refieren las relaciones como elementos del contexto o variables definidas para referirse a cantidades relevantes.

La segunda componente que integra un modelo es la *matematización* del sistema sobre el que se busca obtener conocimiento. Recoge las ideas puramente matemáticas que abstraen la información relevante y, en ocasiones, puede no quedar explícita (y debe ser conjeturada). La matematización de un modelo puede incluir tres tipos de elementos. En primer lugar están (i) las *Preguntas matemáticas*, que son las cuestiones puramente matemáticas que se plantean explícitamente. Por otra parte se encuentran (ii) las *Propiedades* que son las afirmaciones matemáticas abstractas que sustentan las

relaciones del sistema, y (iii) los *Conceptos*, que son los objetos matemáticos implicados en las propiedades.

Las *representaciones* matemáticas incluidas en un modelo son la tercera componente del mismo. Están constituidas por las expresiones explícitas que hacen los creadores de un modelo de los elementos del sistema y de la matematización: pueden ser fragmentos de texto que recogen afirmaciones en lenguaje natural (representaciones verbales escritas), dibujos, diagramas o gráficos (pictóricas), cálculos o expresiones algebraicas (simbólicas), tablas de datos (tabulares), etc. Las representaciones constituyen la evidencia observable que permite acceder al modelo que, en ocasiones, lo determina (Lehrer y Schauble, 2003).

Herramientas para la investigación de modelos escolares

A pesar de la proliferación relativamente baja de investigaciones centradas en el análisis de modelos escolares a partir de producciones escritas, existe literatura sobre modelización matemática que proporciona ideas útiles para este fin.

Antecedentes sobre instrumentos de investigación

Un ejemplo de estas ideas es el espacio de modelización asociado a una tarea, que Czocher y Hardison (2021) concibieron como el conjunto de relaciones matemáticas que se derivan de la composición de las diferentes cantidades disponibles para los estudiantes. De forma coherente a la definición de modelo presentada previamente, el espacio de modelización se observa a través de las representaciones asociadas a una producción escrita. Otra propuesta de interés es la consideración de las prácticas y objetos matemáticos llevada a cabo por Ledezma et al. (2022). El análisis de las redes de objetos matemáticos que utilizan los escolares en el proceso de modelización permite observar configuraciones de objetos primarios (Font et al, 2013), que pueden caracterizar el modelo subyacente a una producción escrita. Atendiendo a la investigación focalizada en el análisis de los modelos, debe destacarse el trabajo de Ferrando et al (2017), que tomaron la definición de Lesh y Harel (2003) para desarrollar un instrumento basado en la observación de (i) sistemas conceptuales, que incluían objetos matemáticos, relaciones y patrones y regularidades, (ii) procedimientos, que pueden ser algoritmos de cálculo, algebraicos o de medida, y (iii) lenguajes: simbólicos, escritos, gráficos o diagramas/esquemas. Este instrumento ha sido utilizado en diferentes estudios sobre modelización (p. e., Lizano et al, 2023) y desarrollado en trabajos posteriores para dar lugar a otras nociones orientadas a comprender las respuestas de estudiantes a tareas de modelización, como la de “plan de resolución” de Segura (2022).

Otra contribución al análisis de modelos escolares a partir de registros escritos es la de Montejo-Gómez et al. (2021), construida a partir de la observación del sistema, la matematización y las representaciones. Esta herramienta garantiza la coherencia entre la noción teórica de modelo y el análisis de producciones, lo que involucra una dificultad intrínseca: la distinción entre los elementos del sistema y los de su matematización. El debate sobre qué tipo de objetos o afirmaciones son matemáticas puede generar diferencias de criterios entre investigadores, criterios que también dependen del nivel de conocimiento de los escolares analizados. Esto genera problemas de fiabilidad de la herramienta, que se abordan con la propuesta descrita en la siguiente sección.

Propuesta basada en el sistema, la matematización y las representaciones

La herramienta que se presenta está basada en la Tabla 1, que parte de las mismas categorías que la propuesta de Montejo-Gómez et al (2021), pero que en este caso se han reinterpretado y simplificado para evitar la decisión sobre el carácter matemático de ciertas afirmaciones o entidades. De esta manera, se propone que el sistema recopile toda la información de la producción analizada que se relacione de alguna manera con el contexto de la situación modelizada (involucren o no contenido matemático). La matematización, a su vez, recoge las ideas puramente matemáticas utilizadas en la producción.

Representaciones			
Verbales (escritas)	Pictóricas	Simbólicas	Tabulares
Sistema		Matematización	
- Preguntas - Relaciones - Objetos		- Preguntas matemáticas - Propiedades - Conceptos	

Tabla 1. Plantilla de análisis asociada a la propuesta.

El procedimiento de análisis que se propone parte entonces de la identificación y categorización de las representaciones (verbales, pictóricas, simbólicas y tabulares). Partiendo de estas, el análisis del modelo se estructura en tres partes. En primer lugar, las preguntas explícitas reflejadas en las representaciones se pueden categorizar como *Preguntas* (las relacionadas con el contexto) o *Preguntas matemáticas* (las formuladas en términos puramente matemáticos). En segundo lugar, las afirmaciones expresadas en los diferentes registros de representación (sean matemáticas o no) constituyen las *Relaciones* del modelo, mientras que las cantidades u otros elementos del contexto a los que estas se refieren constituyen los *Objetos* del modelo. Finalmente, la revisión de las Relaciones y los Objetos permiten identificar las *Propiedades* y, por tanto, los *Conceptos* matemáticos empleados en el modelo. La síntesis de los elementos permite conjeturar una caracterización general del modelo desarrollado en la producción analizada.

Los elementos relevantes para el análisis que se han identificado (Preguntas, Relaciones, Objetos, Preguntas matemáticas, Propiedades y Conceptos) deben entenderse tal y como se han definido en la sección anterior. Es destacable en este sentido la conexión con la herramienta de Montejo-Gómez et al. (2021), en la que la matematización englobaba cualquier información con contenido matemático. Esto llevaba a distinguir *Resultados* y *Variables* para referirse a información sobre el sistema que involucraba contenido matemático, que en la propuesta actual se han omitido. En efecto, los elementos de la matematización que según Montejo-Gómez et al. (2021) eran identificables como Resultados se toman aquí como Relaciones del sistema, de manera que todas las afirmaciones que no sean puramente abstractas se consideran Relaciones. Del mismo modo, los elementos identificables en aquella propuesta como Variables se consideran en esta como Objetos del sistema.

Discusión y conclusión

Este artículo discute el concepto de modelo matemático en investigación educativa y su aplicabilidad para el análisis de producciones escritas. La principal contribución del trabajo reside en la definición de modelo proporcionada, que integra diferentes perspectivas discutidas en la literatura, así como en la herramienta para caracterizar modelos escolares presentada, que aúna y simplifica elementos de otras propuestas previas.

En respuesta a la primera pregunta planteada, se ha constatado que la literatura hace diferentes consideraciones sobre la conceptualización de modelo matemático, como son la descripción de dominios separados pero indisolubles que contienen información sobre el sistema real y el matemático asociados al modelo (Niss, 2012) y las representaciones utilizadas para expresarlos (Carreira et al., 2020; Lesh y Harel, 2003), elementos que se han recogido en la definición propuesta. En relación a la segunda pregunta, se ha recogido la pertinencia de observar los objetos (Ledezma et al., 2022) y relaciones (Ferrando, 2017), así como de focalizarse en las afirmaciones reflejadas en una producción escrita (Czocher, 2017). De esta manera, la herramienta propuesta utiliza estas ideas para establecer través de un proceso de identificación de afirmaciones y entidades a las que estas se refieren, partiendo de la evidencia de las representaciones y culminando en la abstracción de propiedades y conceptos matemáticos subyacentes al modelo, de forma similar a Montejo-Gómez et al. (2021) pero simplificando esas ideas para facilitar el carácter sistemático del análisis.

Este manuscrito sugiere vías de trabajo de interés para la investigación de modelos escolares. En primer lugar, se ha constatado que la herramienta propuesta permite definir unidades de análisis que facilitan la caracterización de modelos desarrollados para resolver tareas de estimación (Montejo-Gómez et al., 2024). La exploración de otras tareas, contextos y niveles

educativos puede contribuir a contrastar la validez de la estrategia descrita para este fin, y se llevará a cabo en próximos estudios. Una segunda línea que se desprende del presente trabajo está relacionada con las aplicaciones didácticas de la estrategia analítica propuesta. Modificaciones pequeñas en la redacción específica de una tarea de modelización (p. e., datos o representaciones dadas) pueden impactar en el proceso de resolución y, por tanto en el modelo resultante. La herramienta que se presenta es aplicable también al enunciado de las tareas, por lo que facilita la identificación de los elementos del modelo desarrollado en una producción escrita que estaban ya presentes en el estímulo que originó dicho modelo, lo que permite valorar la actividad de modelización llevada a cabo por los estudiantes. El desarrollo sistemático de tareas y de indicadores de evaluación derivados de este uso de la herramienta tiene valor potencial para la enseñanza de la modelización y será también objeto de investigaciones futuras.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del grupo de investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM-193) perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación.

Referencias

- Ärlebäck, J. B. y Albarracín, L. (2019). An extension of the MAD framework and its possible implication for research. En U. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of CERME11* (pp. 1128-1135). Freudenthal Institute y ERME.
- Ärlebäck, J. B. y Doerr, H. M. (2020). Moving beyond descriptive models: Research issues for design and implementation. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 17, 5-20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.307>
- Barquero, B., Bosch, M. y Wozniak, F. (24-27 de septiembre de 2022). Moving Beyond Mute Modelling Praxeologies: an Study and Research Path for Teacher Education About the Cake Box [Comunicación]. ICTMA20, Wurzburg, Alemania.
- Barquero, B. (2023). Mathematical modelling as a research field: Transposition challenges and future directions. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Herendiné-Kónya (eds.), *Proceedings of CERME13* (pp. 6-30). Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME.
- Biembengut, M. y Hein, N. (1999). Modelación matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación Matemática*, 11(1), 119–134.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling. A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby, y K. Walby (eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.
- Blum, W. y Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.

Blum, W. y Niss, M. (1991) Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>

Carreira, S., Baioa, A. M. y de Almeida, L. M. W. (2020). *Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task*. *Avances de Investigación en Educación Matemática* 17, 67-83. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.308>

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización En L. Rico (ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Horsori.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Horsori.

Cevikbas, M., Kaiser, G. y Schukajlow, S. (2022). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics*, 109, 205-236. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10104-6>

Czocher, J. A. (2016). Introducing Modeling Transition Diagrams as a Tool to Connect Mathematical Modeling to Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(2), 77-106. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1148530>

Czocher, J. A. (2017). *Mathematical modeling cycles as a task design heuristic*. *Mathematics Enthusiast*. 14, 129-140. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1391>

Czocher, J. A. y Hardison, H. L. (2021). Attending to Quantities Through the Modelling Space. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser y K. L. Wong (eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 263-272). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6>

De Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. En B. L. Madison y L. A. Steen (eds.), *Quantitative literacy. Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75-89). The National Council on Education and the Disciplines.

Fernández-Ahumada, E. y Montejo-Gámez, J. (2019). Dificultades en el aprendizaje matemático del profesorado en formación: análisis de las premisas utilizadas al modelizar. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 273-282). SEIEM.

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 43-64). SEIEM.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2017) Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de fermi. *Bolema*, 31(57), 220-242. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11>

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38(3), 226-246. <https://doi.org/10.1007/BF02652807>

Greefrath G. y Vorhölter K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9>

Guerrero, C. y Borrromeo, R. (2022). Los desafíos de los profesores en formación en la implementación de la modelación matemática. Una mirada a la realidad. *PNA*, 16(4), 309-341. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329>

Henry, M. (2001). Modélisation d'une situation aléatoire. Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 149-159). PUFC.

Israël, G. (1996). *La mathématisation du réel: essai sur la modélisation mathématique*. Le Seuil.

Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 82-85. <https://doi.org/10.1007/BF02655882>

Kämmerer, M. (2023). Students' use of assumptions to solve a modelling task with much or little personal interest in the real-world context of the task. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Herendiné-Kónya (eds.), *Proceedings of CERME13* (pp. 6-30). Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME.

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, 35, 715-741. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3>

Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Origins and evaluation of model-based reasoning in mathematics and science. In R. Lesh y H. M. Doerr (eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), 157-189. <https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998>

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers, En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates.

Lizano, K. P., Castro-Rodríguez, E. y Piñeiro, J. L. (2023). Estrategias y representaciones según el estilo de pensamiento de estudiantes de secundaria en una tarea de modelización, *Bolema*, 37(76), 555-576. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a09>

López, M., Albarracín, L., Ferrando, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E. y Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el Bachillerato. En D. Martín de Diego, T. Chacón, G. Curbera, F. Mar-

cellán y M. Siles (coords.), *Libro Blanco de las Matemáticas* (pp. 1-94). Centro de Estudios Ramón Areces.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/bf02655885>

Minsky, M. L. (1965) Matter, minds and models. En *Proceedings of the International Federation for Information Processing Congress* (pp. 45–49). Spartan Books.

Montejo-Gámez, J. y Fernández-Ahumada, E. (2019). On the notion of mathematical model in educational research: Insights from a new proposal. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of CERME11* (pp. 1232-1239). Freudenthal Institute y ERME.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2021). A Tool for the Analysis and Characterization of School Mathematical Models, *Mathematics*, 9(13), 1569. <https://doi.org/10.3390/math9131569>

Montejo-Gámez, J., López-Centella, E. y Fernández-Ahumada, E. (2024). Solving Estimation Tasks: Novel Features of the Emerging Models When Three-dimensional Geometry Becomes Relevant. En H-S. Siller, V. Geiger y G. Kaiser (eds.), *Researching mathematical modelling education in disruptive/challenging times*. Springer.

Montoya, E. Viola, F. y Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching. En T. Dooley y G. Gueudet (eds.), *Proceedings of CERME10* (pp. 956-963). DCU Institute of Education y ERME.

Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 86, 49-52.

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>

Osorio, E. A., Inzunza, S. y Ward, S. E. (2023). Modelización estadística para el aprendizaje de la correlación y regresión lineal. *PNA* 17(3), 295-321. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.23937>

Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Ramírez-Uclés, R. y Fernández-Plaza, J. A. (2020). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación matemática*, 31(1), 121-143. <https://doi.org/10.24844/EM3101.05>

Segura, C. (2022). *Flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de estimación en contexto real. Un estudio con futuros maestros* [Tesis doctoral]. Universidad de Valencia, Valencia, España.

Stillman, G. A., Ikeda, T., Schukajlow, S., Araújo, J. L. y Ärlebäck, J. B. (2023). Survey of Interdisciplinary Aspects of the Teaching and Learning of Mathematical Modelling in Mathematics Education. En G. Greefraht, S. Carreira y G. A. Stillman (eds.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling* (pp. 21-41). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-27115-1>

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory of percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc>

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>

Velten, K. (2009). *Mathematical modeling and simulation. Introduction for scientists and engineers*. WILEY. <https://doi.org/10.1002/9783527627608>