

<https://doi.org/10.30827/reugra.v29.30123>

Artículos Originales

# Problemas de Cálculo en pruebas de acceso al Cuerpo de Profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria

Calculus problems of competency tests to Secondary School Teacher

## Información

### Fechas:

Recibido: 2022.06.12

Aceptado: 2022.11.10

Publicado: 2022.12.30

### Correspondencia:

Juan F. Ruiz-Hidalgo  
jfrui@ugr.es

### Conflicto de intereses:

No existe conflicto de interés.

### Financiación:

En esta publicación no ha recibido ninguna ayuda o financiación.

## Autorías

Araceli Luna<sup>1</sup>  0009-0002-7624-7985

M. Victoria Velasco<sup>2</sup>  0000-0003-4957-3275

Juan F. Ruiz-Hidalgo<sup>3</sup>  0000-0002-4805-6922

<sup>1</sup>Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España.

<sup>2</sup>Universidad de Granada, Facultad de Ciencias, Departamento de Análisis Matemático, Granada, España.

<sup>3</sup>Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España.

### Contribuciones de autoría:

Todas las personas firmantes han contribuido por igual en la investigación y la elaboración de este trabajo.

### Cómo citar este trabajo:

Luna, A., Velasco, M. V., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Problemas de Cálculo en pruebas de acceso al Cuerpo de Profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 29, 21-42. <https://doi.org/10.30827/reugra.v29.30123>

## RESUMEN

**Introducción:** El análisis de los problemas de matemáticas de las pruebas de acceso a Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria es un tema de gran interés para futuro profesorado. Este trabajo tiene el propósito de describir y clasificar dichos problemas.

**Método:** Realizamos un análisis de contenido de los problemas de Cálculo Infinitesimal propuestos en España desde 2006 hasta 2018 y elaboramos un instrumento de recogida basado en el análisis de tareas matemáticas.

**Resultados:** Los resultados muestran las características de cada una de las comunidades autónomas y la existencia de cinco tipos de problemas que se caracterizan por su aspecto fenomenológico.

**Conclusiones:** Se establece un primer perfil modal de problema, de ámbito nacional, que es de cálculo diferencial y que demanda conocer y utilizar definiciones, utilizando funciones polinómicas, fracciones algebraicas o exponenciales en forma implícita y que está expresado de manera verbal-simbólico.

**Palabras clave:** análisis de tareas; cálculo infinitesimal; profesorado de matemáticas; selección del profesorado.

## ABSTRACT

**Introduction:** The analysis of the problems of mathematics of the competency tests to access to teaching staff of public secondary education is a subject of great interest for future teachers. This works' goal is to describe and classify such problems.

**Method:** We conducted a content analysis of the infinitesimal Calculus problems proposed in Spain since 2006 up to 2018. We also develop a collecting instrument based on the analysis of mathematical tasks.

**Results:** The results show the characteristics of each of the autonomous communities and the existence of five types of problems, which are mainly characterized by their phenomenological aspect.

**Conclusions:** It is possible to establish a problem modal profile in Spain as one that is of differential calculus and that asks to know and use the definition, using polynomial functions, algebraic or exponential fractions, expressed in a verbal-symbolic way and using the implicit expressions.

**Keywords:** Calculus; Secondary school teachers; Tasks analysis; Teacher selection

## Introducción

Aunque existe mucha literatura que proporciona información acerca de la parte teórica del temario de las oposiciones al profesorado de secundaria en la especialidad de Matemáticas, así como numerosos documentos que versan sobre los ejercicios de las pruebas de dicho concurso oposición por comunidades autónomas y sus soluciones, no hemos localizado ningún documento que haga un estudio profundo y exhaustivo que permita describir y analizar las características y dificultades de dichos problemas. Una primera toma de contacto con la cuestión nos condujo a la hipótesis de partida de que el grado de dificultad de unas pruebas a otras puede ser variable. Sin embargo, parece difícil establecer con rigor el grado de dificultad de un problema de matemáticas más allá del ámbito no escolar.

Se trata, por tanto, de un trabajo de carácter exploratorio, para cuya realización asumimos un marco que nos permita realizar un análisis semántico de los enunciados de los problemas que nos permita poder clasificarlos. Este es el marco de significado de un concepto matemático escolar de Rico (2012), dentro del marco del análisis didáctico (Rico, 2013; Rico et al., 2013; Rico y Moreno, 2016) y el método de análisis el análisis de contenido (Cohen et al., 2011). Por pragmatismo, el artículo no abarca los problemas de todos los exámenes efectuados, sino que se centra en los problemas relativos al Cálculo Infinitesimal y en un periodo de tiempo limitado que abarca del año 2008 al 2016.

De esta forma, el objetivo del trabajo es la descripción y organización de los problemas de las pruebas de acceso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria en la especialidad de Matemáticas. Concretamente, la descripción de los problemas de Cálculo Infinitesimal propuestos entre los años 2008 y 2016.

Los datos se recogen atendiendo a una serie de variables iniciales que surgen del marco teórico y que se van modificando y mejorando para optimizar el análisis de contenido. Los resultados se presentan tanto organizados por variables como por comunidades autónomas y muestran que existen diferencias entre las comunidades.

## Fundamentación teórica

No hemos encontrado antecedentes que analicen los problemas de oposiciones de matemáticas de secundaria, por lo que organizamos esta sección describiendo las pruebas de selección y presentando la noción de significado de un concepto matemático que permite interpretar los resultados y organizar las variables de tarea seleccionadas.

## Las pruebas de selección

Las pruebas de selección se convocan por las comunidades autónomas con competencias en educación. Se regulan de forma general por el Real Decreto 276/2007 derivado de la Ley Orgánica 2/2006, LOE. Además de los requisitos generales de los aspirantes (ser de algún estado de la Unión Europea, haber cumplido 18 años, no padecer enfermedad, no estar inhabilitado para la función pública, ...), los requisitos específicos (poseer la titulación superior y la titulación pedagógica correspondientes), el Real Decreto también incluye en su artículo 21 la descripción del procedimiento de ingreso.

Los aspirantes deben superar dos pruebas. En la primera demostrarán sus conocimientos específicos de la especialidad. Esta prueba está dividida en dos partes, una práctica de formación científica y dominio de habilidades técnicas, que en el caso de la especialidad de Matemáticas consiste en la resolución de problemas. La segunda parte de la primera prueba consiste en el desarrollo escrito de alguno de los temas que componen el temario. La segunda prueba es de aptitud pedagógica y en ella se defiende una programación y una unidad didáctica.

Este trabajo está centrado en la primera parte de la primera prueba, es decir, en el análisis de los problemas de Matemáticas que tienen que resolver los aspirantes.

## Significado de un concepto matemático

La noción de significado que consideramos está basada en una estructura ternaria clásica (Frege, 1998). Inicialmente propuesta por Rico (2012, 2013), la tripleta semántica se concreta en conceptos matemáticos escolares en estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos (Fernández-Plaza, 2016).

Dentro de la estructura conceptual se consideran tres tipos de elementos: los objetos, los conceptos y las estructuras matemáticas, por lo que analizar los significados matemáticos desde esta perspectiva consiste en identificar y organizar dichos elementos y las relaciones que se establecen entre ellos. Además, la estructura conceptual aporta criterios de veracidad para las proposiciones que se obtienen de los conceptos.

Los sistemas de representación están definidos por un conjunto de signos, reglas, notaciones y gráficas que designan y muestran los conceptos y las relaciones existentes entre los mismos. Estos, además, relacionan la referencia y el sentido de un concepto.

Los sentidos incluyen aquellos modos de uso, contextos, fenómenos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional (Ruiz-Hidalgo, 2016).

## Análisis didáctico y análisis de tareas

Para analizar las tareas establecemos un conjunto de variables para la organización e interpretación de los datos elegidas dentro del marco de referencia denominado Análisis Didáctico (Rico, 2013; Rico et al., 2013; Rico y Moreno, 2016). Este marco se estructura en cuatro tipos de análisis (análisis del significado, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de evaluación) basados en las dimensiones del currículo de Matemáticas (cultural/conceptual, cognitiva, ética/formativa y social).

El análisis de las tareas matemáticas escolares es, para el análisis didáctico, uno de los organizadores del análisis de instrucción, el cual se centra en las cuestiones relacionadas con la enseñanza, su planificación e implementación y del que una de sus partes es el estudio y el diseño de tareas. Para ello indaga en las variables de tarea, las funciones de las tareas y los distintos tipos de tarea existente (Moreno y Ramírez, 2016). Estas variables permitieron recoger los aspectos que estimábamos más relevantes a la hora de analizar una tarea y extraer casi toda la información de la misma. Sin embargo, el proceso de recogida y organización de datos nos exigió la eliminación de algunas de ellas y la concreción de otras. Así, por ejemplo, inicialmente consideramos una variable denominada "Materiales" que recogía información sobre los materiales necesarios para completar la tarea. Esta variable se eliminó puesto que no aportaba ninguna diferencia entre las tareas. Las variables finalmente adoptadas corresponden a elementos descriptivos de la tarea (Comunidad Autónoma y año) y, el resto, a elementos de significado de los conceptos matemáticos (Vargas et al., 2018). A continuación, se describen las variables finales que utilizamos para describir las tareas:

- Comunidad autónoma. Indica la comunidad autónoma donde se propuso el problema.
- Año: año de la convocatoria considerada.
- Contenido-Bloque: Determina, de forma general dentro del Cálculo Infinitesimal si es una tarea de derivación o de integración.
- Contenido-Parte: Determina, de la forma más concreta posible, el contenido al que está referida.
- Formulación. Describe el sistema de representación en el que se expresa la tarea.
- Tipo de función. Permite determinar con más precisión aspectos del contenido matemático a trabajar y la dificultad de los procedimientos. Esta distinción surge de la idea de Jiménez (2018) quién considera que el tipo de función es determinante en la dificultad de una tarea de Cálculo Infinitesimal.
- Tipo de coordenadas. Al igual que con el tipo de función, la forma en la que está expresada (implícita, explícita, coordenadas paramétricas, ...) parece importante para determinar la dificultad de problema.

- Situación. La variable hace referencia a la situación en el que se propone la tarea. Para que la recogida de datos fuese más eficiente, inicialmente se consideró tomar las situaciones basadas en el marco PISA. Sin embargo, finalmente las modalidades surgidas fueron tan específicamente matemáticas que quedaron reducidas a dos.
- Contexto. Recoge información sobre los interrogantes funcionales del contenido matemático y los fenómenos a los que el concepto da respuesta (Ruiz-Hidalgo, 2016). Para el caso del Cálculo Infinitesimal, los conceptos se han organizado funcionalmente alrededor de los problemas de derivación e integración. Por su parte, cada uno de ellos ha surgido de diversos problemas y da respuesta a tipos de problemas diferentes. Por un lado, la derivación surge del problema de determinar la velocidad y del problema de la determinación de tangentes. Por otro lado, la integración surge de los problemas de determinación del área y la determinación de la antiderivada (Alexandrov et al., 2014).

## Método

El trabajo es un estudio de tipo descriptivo e interpretativo (Cohen et al., 2011) que es de naturaleza exploratoria puesto que se propone profundizar en una temática poco estudiada.

El análisis de los datos se realiza siguiendo el método de análisis de contenido para descubrir la estructura interna de los textos mediante el estudio de su contenido semántico (Rico y Fernández-Cano, 2013). Para ejecutarlo se eligieron unas variables previamente establecidas que fueron modificándose a lo largo del proceso de investigación para adaptarlas a las necesidades surgidas y hacerlas más precisas.

Los datos se organizaron en una hoja de cálculo en la que estaban todas las variables de análisis. Como la recogida de datos fue muy detallada la información obtenida se hizo difícil de manejar al contener muchas variables. Esto nos condujo a modificar algunas variables para realizar una recogida más sustancial de datos. Los resultados se expresaron mediante la descripción de cada una de las variables y, adicionalmente, clasificados por comunidades autónomas.

Posteriormente se realizó un análisis de conglomerados, una técnica que permite agrupar elementos en grupos homogéneos en función de las similitudes entre ellos (Peña, 2002). Esto nos permitió determinar cinco grupos de problemas tipo.

## Muestra y unidades de información

La muestra se seleccionó de entre los problemas de las pruebas de acceso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria de la especialidad de Matemáticas, restringiendo la misma atendiendo a:

- Motivos prácticos: aunque la denominación cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria se usa desde, al menos, 1991 (Orden de 23 de abril de 1991), se decidió reducir la búsqueda a las pruebas selectivas efectuadas entre los años 2008 y 2016.
- Interés de los investigadores: se limitó los problemas a los de Cálculo diferencial e integral.
- Disponibilidad: se pretendió barrer todo el territorio español, pero finalmente se tomaron los problemas contenidos en los textos Diego et al. (2014, 2016) y Baena et al. (2014, 2016).

El número final fue 37 problemas. Sin embargo, como algunos de ellos están compuestos por diferentes apartados, consideramos como unidades de información cada apartado de problema que pudiese considerarse un problema independiente, es decir, que tuviese sentido por sí solo. De esta forma la muestra de este estudio está compuesta por 52 unidades de información, que denominaremos enunciados.

## VARIABLES DE ANÁLISIS

En una primera etapa clasificamos los 52 enunciados en función de su vinculación con el Cálculo Diferencial, con el Integral o con ambos. Comenzamos el análisis haciendo uso de un conjunto inicial de variables de análisis de tarea que fue tomado de Herrera et al. (2018), que se sustenta en las variables descritas por Moreno y Ramírez (2016). Conforme se realizaba el trabajo se fueron constatando de forma más pormenorizada las necesidades específicas de nuestro análisis. Mediante “triangulación de investigadores”, un método utilizado cuando la observación única no aporta información suficiente o la información que aporta puede resultar ambigua, algunas de estas variables fueron perfeccionadas para adaptarlas mejor a los objetivos (Cohen et al., 2011). El listado final de las variables y las modalidades que rigen esta investigación quedó como se describe en la Tabla 1.

Además de la variable Comunidad Autónoma, finalmente se utilizaron 9 variables con un total de 28 modalidades diferentes para describir con ellas la naturaleza de los resultados analizados, desde todos los aspectos relevantes posibles.

**Tabla 1.** Variables de análisis y modalidades registradas.

Variable	Modalidades	Observaciones
Comunidad autónoma	Comunidades autónomas de España	
Año	Desde 2008 a 2016	
Contenido-Bloque	Cálculo Diferencial Cálculo Integral Ambos	
Contenido-Parte	Definición Aplicación Propiedades Teoremas	Aplicación se refiere a aplicación de un algoritmo conocido (p.e., calcular el máximo de una función). Teoremas incluye enunciados orientados a demostrar que se conoce un teorema.
Formulación	Verbal-simbólica Verbal	
Tipo de función	Polinómica Valor absoluto Fracción algebraica Radical Exponencial Integral Serie Trigonométrica Incógnita	Funciones incógnita son aquellas que resultan ser la incógnita del problema
Tipo de coordenadas	Implícitas Explícitas Paramétricas	
Situación	Matemática Otro tipo	
Contexto	Derivación geométrica Derivación analítica Integral indefinida Integral definida Impropia Integral definida. Medida	Las modalidad integral definida medida incluye problemas de medida de probabilidad como de cálculo de áreas y volúmenes.

## Resultados

Se presentan los resultados en tres bloques. En primer lugar, los resúmenes de los recuentos por variable; a continuación, su lectura por comunidad autónoma. Para terminar, los tipos de problemas surgidos tras el análisis clúster.

### Descripción de los datos por variables

Con respecto al contenido que se trabaja en los problemas, que está descrito mediante dos variables, Contenido-Bloque y Contenido-Parte, se afirma que un 54% de los enunciados están centrados en el cálculo diferencial, un 36% en el cálculo integral, y tan sólo un 10% de los problemas se plantean cuestiones vinculadas a ambos cálculos. Más concretamente, un 69% de los problemas son de definición, un 38% son de aplicación y en el 15% de ellos hay que emplear teoremas.

En la formulación de los problemas hay un predominio claro, del 88% de los mismos, de enunciados en los que se emplea el lenguaje verbal-simbólico, mientras que en el 12% restante se emplea el lenguaje verbal.



Las funciones utilizadas se describen mediante las coordenadas que se utilizan en los enunciados y mediante el tipo de función que aparece. Con respecto a las coordenadas, en el 18% de los enunciados no figura explícitamente ningún tipo de función, mientras que en el 25% de los enunciados aparecen funciones implícitas, en el 50% explícitas y en el 7% paramétricas lineales. En ninguno de los ejercicios analizados encontramos funciones expresadas en coordenadas polares. Los tipos de funciones que predominan en las pruebas son las polinómicas, las fracciones algebraicas y las exponenciales. Por otra parte, también se analiza el hecho de si las funciones consideradas son simples o compuestas. Se observa que el 57% de las funciones de los enunciados se habían definido haciendo uso de un único tipo de función. Del 43% restante (correspondiente al porcentaje de funciones compuestas), un 33% de las funciones involucran dos tipos distintos de funciones, un 6% mezclan tres tipos de funciones, y un 4% de ellas se definen mediante cuatro tipos de funciones.

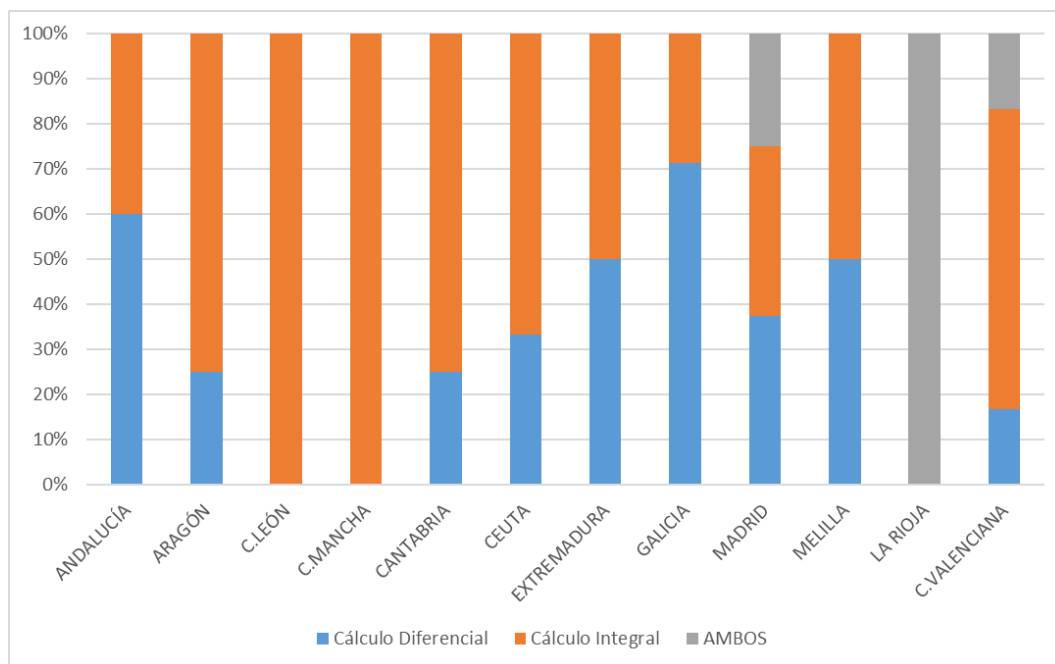
La situación en la que se plantean los enunciados es, en el 98% de los problemas, una situación meramente matemática, contemplando otro tipo de situaciones solo el 2% de ellos.

Los contextos atañen a los contenidos del cálculo diferencial, en el 37% de los enunciados que involucran derivadas, figuran derivadas geométricas, y en el 63% aparecen derivadas no geométricas (esto es más analíticas). Respecto al cálculo integral (que representan un 63% del total), en el 10% de los enunciados que involucran integrales, aparecen integrales indefinidas, mientras que en el 83% aparecen integrales definidas y en el 7% integrales impropias. Cabe mencionar que, dentro de las integrales definidas, el 17% corresponden a medidas de probabilidad.

### Datos por comunidades autónomas

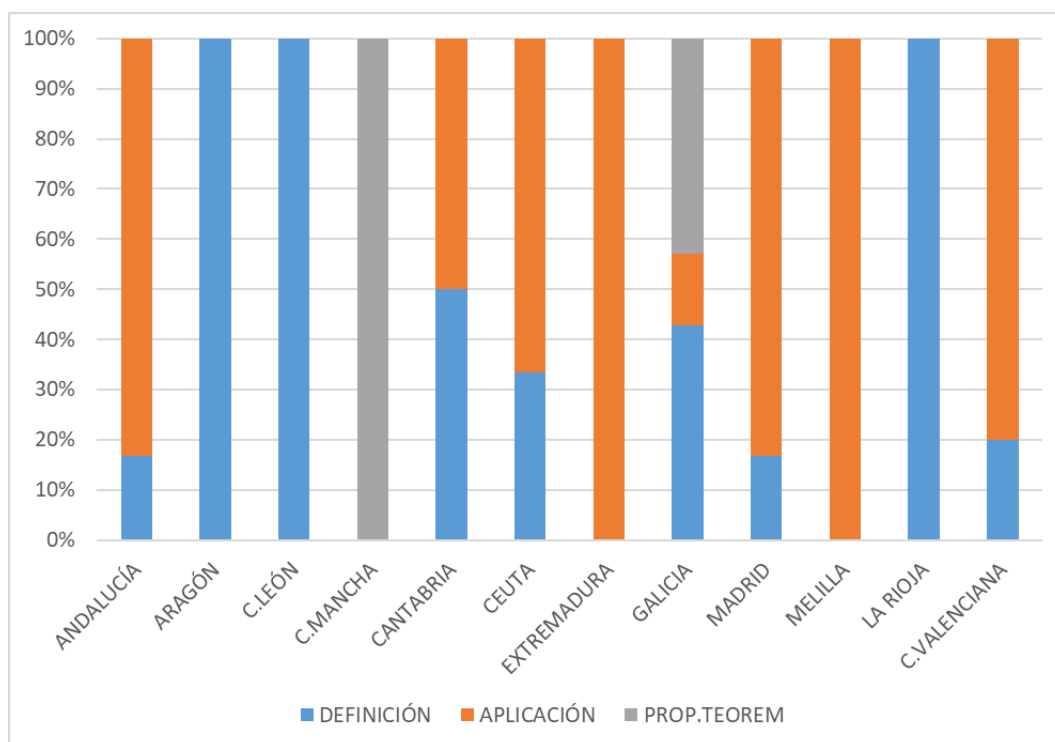
De todas las comunidades autónomas, no en todas hemos identificado enunciados de Cálculo en cada uno de los años estudiados. Las que se presentarán aquí son de las que tenemos datos: Andalucía, Aragón, Castilla y León, Castilla-La Mancha, Cantabria, Ceuta, Extremadura, Galicia, Madrid, Melilla, La Rioja y Comunidad Valenciana.

En cuanto a la variable contenido-bloque, vemos que se dan todo tipo de situaciones, siendo solo dos comunidades las que hacen uso de las tres modalidades de la variable considerada. Todas las comunidades autónomas que plantean problemas de Cálculo lo hacen de Cálculo Diferencial mientras que no sucede lo mismo en relación con Cálculo Integral (ver Figura 1).



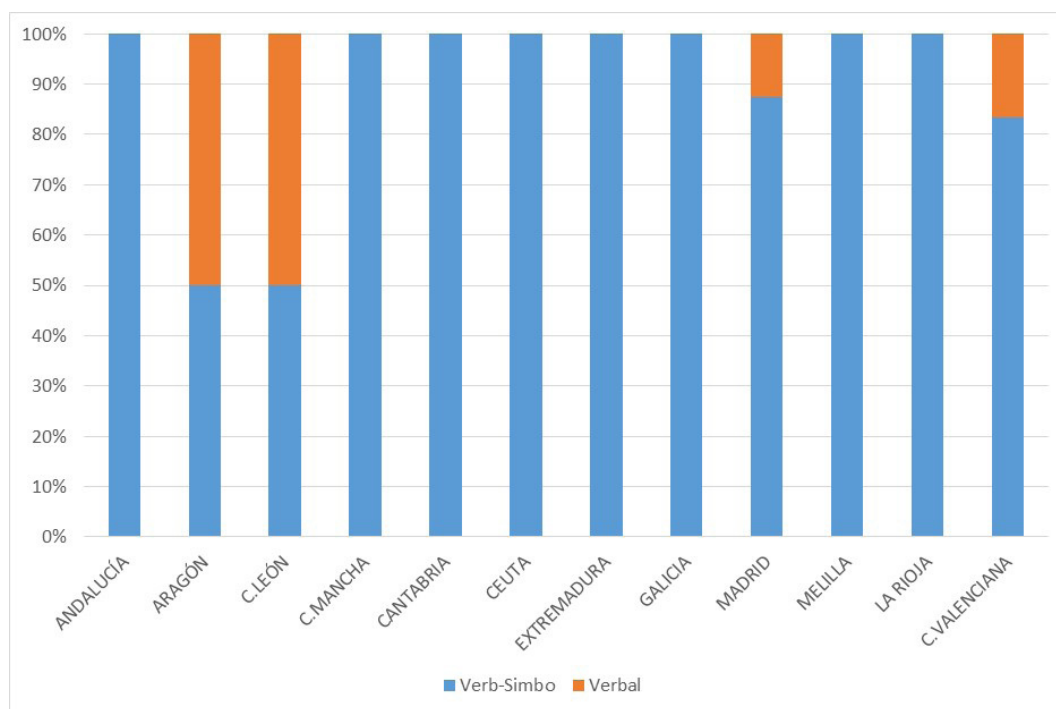
**Figura 1.** Porcentajes de enunciados por bloque de contenido y comunidad autónoma.

En relación con la variable Contenido-parte, son muy pocas las comunidades que plantean problemas de profundización sobre los contenidos que requieren la aplicación de algún teorema conocido. Por otra parte, hay comunidades que solo plantean ejercicios de aplicación (problemas de optimización, cálculo de áreas, etc.) estando este tipo de ejercicios considerados en los exámenes de todas las comunidades autónomas (ver Figura 2).



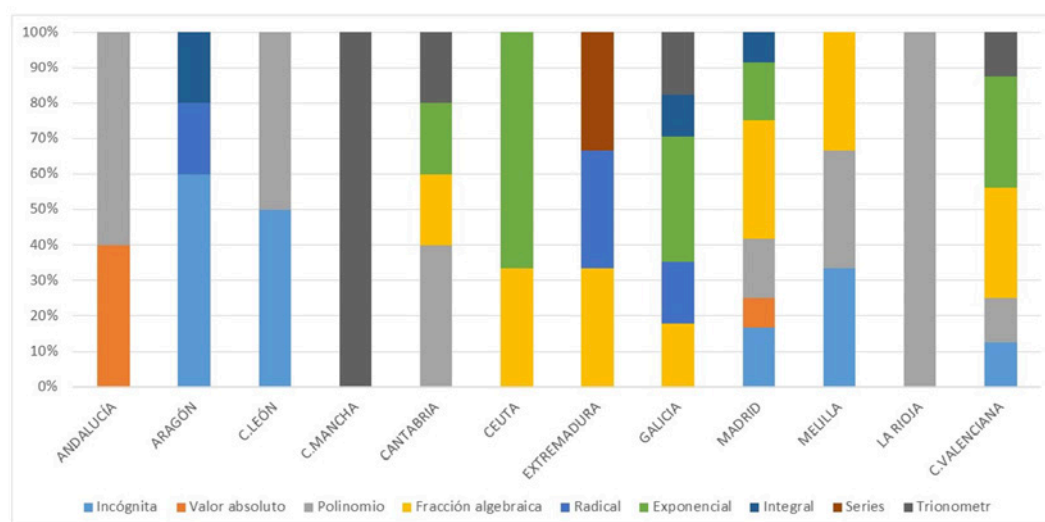
**Figura 2.** Porcentajes de enunciados por parte de contenido y comunidad autónoma.

La Figura 3 muestra el predominio de los enunciados de tipo verbal-simbólico en la formulación de las tareas, si bien se muestran diferencias entre las distintas comunidades autónomas.

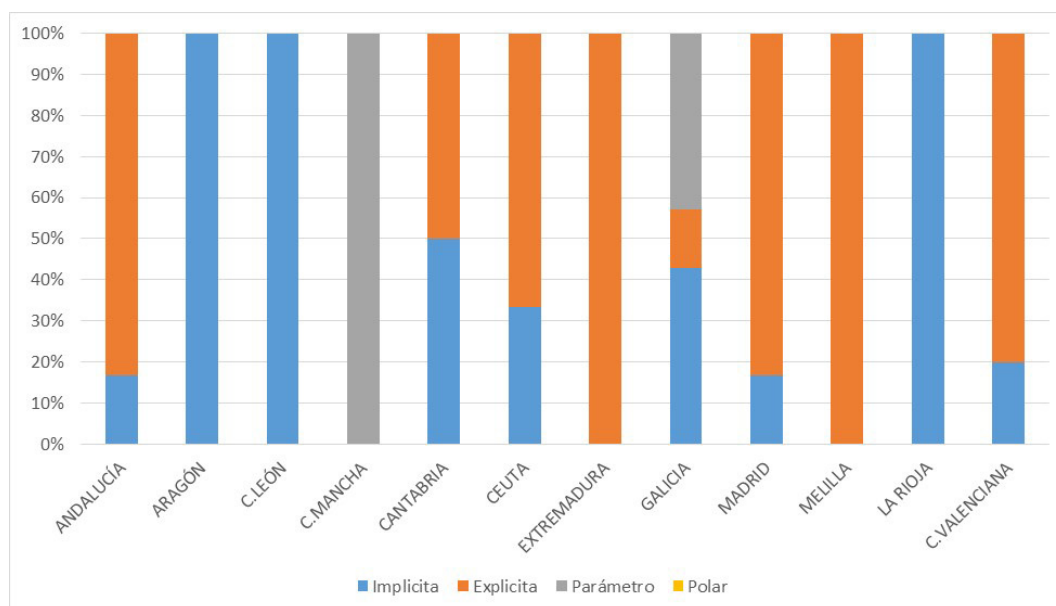


**Figura 3.** Porcentajes de enunciados por su formulación y comunidad autónoma.

Las Figuras 4 y 5 contabilizan las características de las funciones que aparecen en los enunciados. Estas características se comportan con una distribución bastante irregular en las distintas comunidades autónomas.

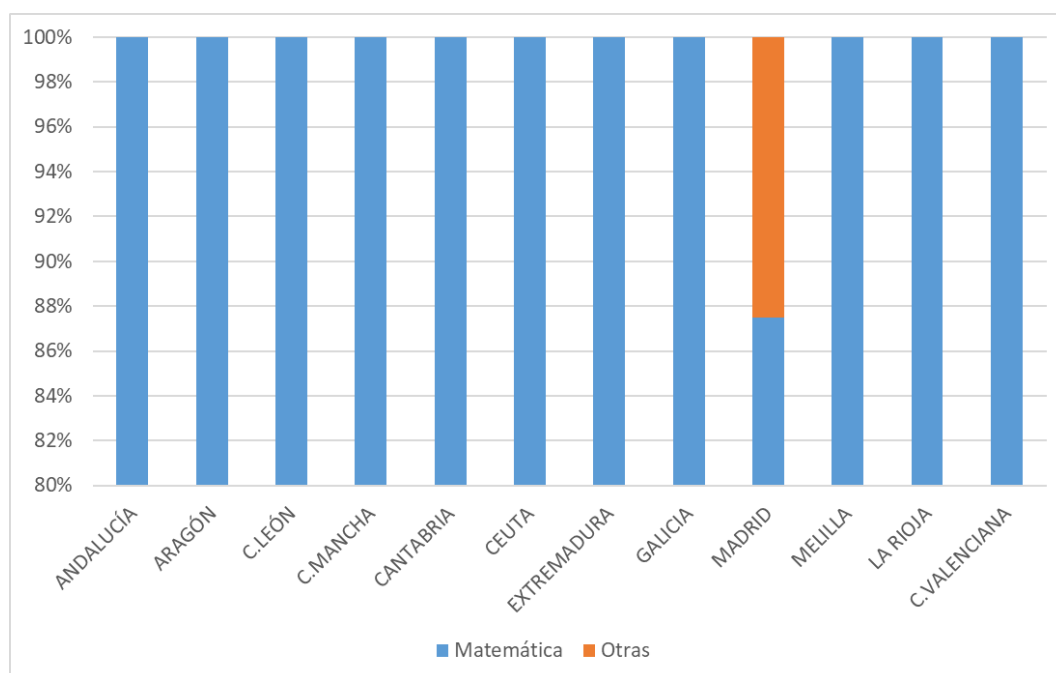


**Figura 4.** Porcentajes de tipos de funciones y comunidad autónoma.

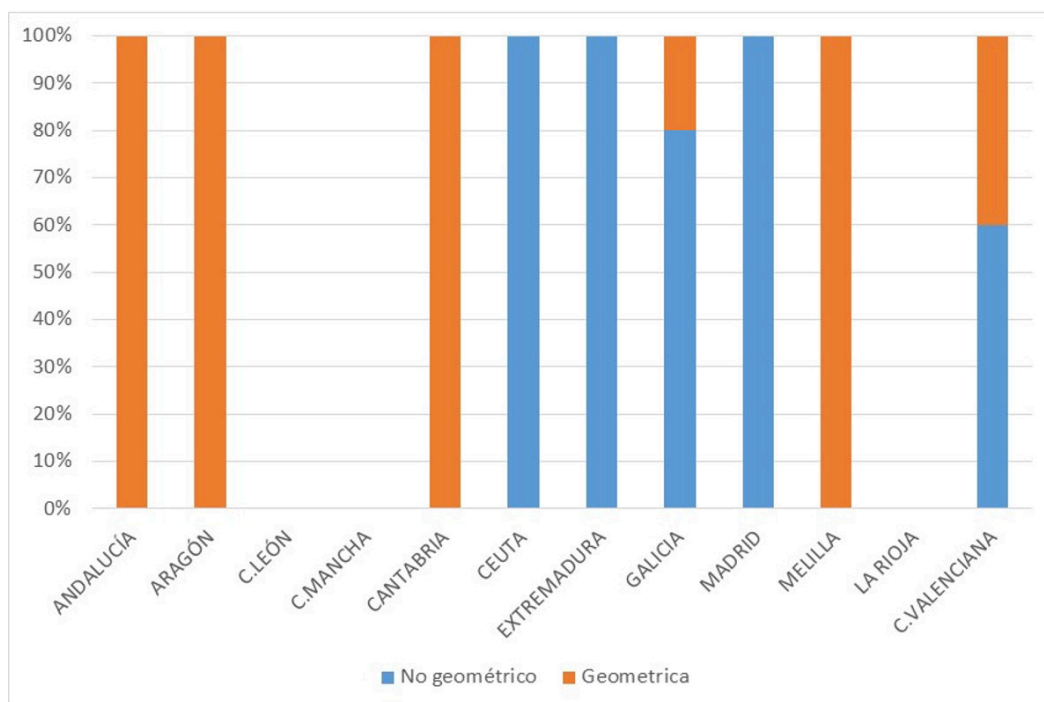


**Figura 5.** Porcentajes de coordenadas y comunidad autónoma.

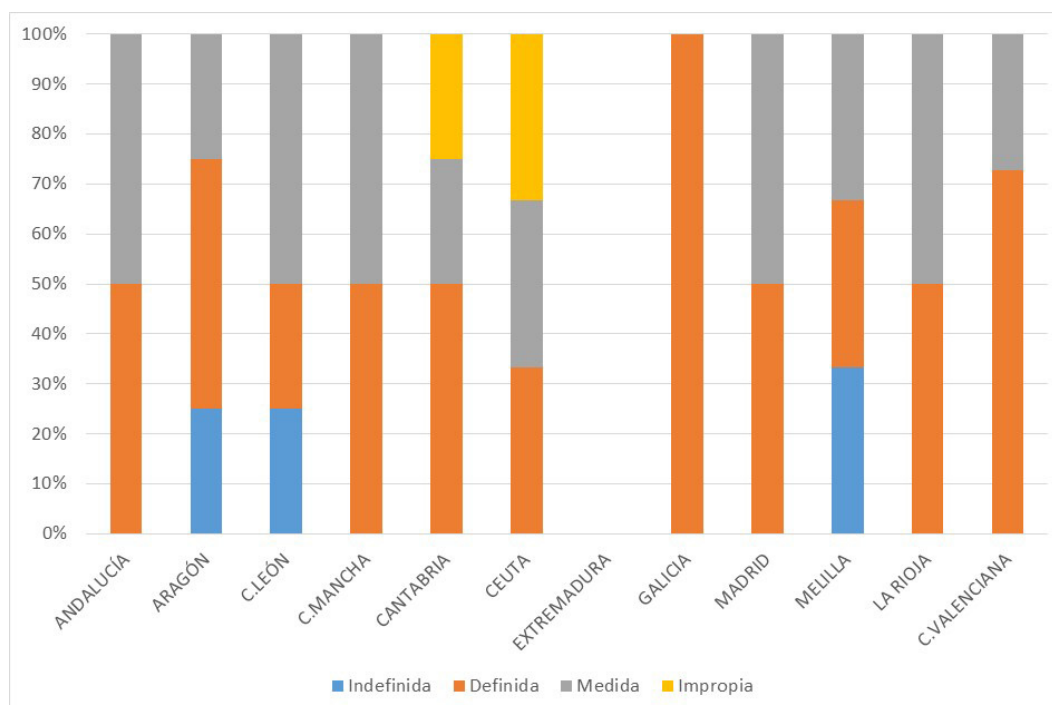
En la Figura 6 se presenta qué situación es más característica en los enunciados de los problemas propuestos en las distintas comunidades autónomas, quedando en evidencia que es la meramente matemática en todas las comunidades autónomas salvo en la de Madrid. Las Figuras 7 y 8, por su parte muestran la variable contexto. En la primera de ellas se detalla la distribución de los enunciados de derivación, distinguiendo entre que el problema sea de corte geométrico o analítico. En la segunda (Figura 8), mostramos el gráfico correspondiente a los problemas de integración, distinguiendo entre los relativos a la integral definida, la indefinida, las medias de probabilidad o las integrales impropias.



**Figura 6.** Porcentajes de enunciados por situación y comunidad autónoma.



**Figura 7.** Porcentajes de enunciados por contexto Derivación y comunidad autónoma.



**Figura 8.** Porcentajes de enunciados por contexto Integración y comunidad autónoma.

En Andalucía, se proponen problemas tanto de Cálculo Diferencial como de Cálculo Integral, que son de aplicación o de definición. En la mayoría de ellos aparecen funciones explícitas, aunque excepcionalmente (año 2014) figura una función implícita. Los problemas de derivación se suelen presentar en un contexto geométrico, donde se requiere el estudio de una función, mientras que en los de integración, se suele preguntar por área encerrada entre una curva, o por una de medida de probabilidad.

Los problemas que se proponen en la comunidad autónoma de Aragón se caracterizan por ser mayoritariamente de cálculo integral. Nos encontramos con problemas relativos a la integral definida, la indefinida o a las medidas de probabilidad, que en su mayoría son problemas de aplicación, aunque también figuran problemas de definición y de propiedades y teoremas, con un uso generalizado de funciones implícitas. En casi la mitad de las ocasiones se enuncian con una formulación verbal. Los problemas de Cálculo Diferencial de esta comunidad del período analizado son de derivación geométrica.

Los problemas propuestos en las pruebas de la Junta de Castilla y León se caracterizan por ser de cálculo integral en su totalidad, estando la mayoría de ellos relacionados con las medidas de probabilidad, aunque también aparecen problemas de integral definida de carácter general o de integral indefinida. Son problemas cuyo contenido es de aplicación y definición. La formulación verbal se usa casi por igual que la verbal-simbólica, a diferencia de lo que sucede en la mayoría de comunidades autónomas.

Los enunciados de los problemas de las pruebas efectuadas en Castilla-La Mancha se caracterizan por ser de cálculo integral y de aplicación en su totalidad. De hecho, son problemas de medida de probabilidad o de integral definida en los que abundan las funciones paramétricas.

Los problemas propuestos en Cantabria se caracterizan por ser tanto de cálculo diferencial como integral, aunque éste último tipo es el predominante. Son problemas por lo general de definición, aunque también figuran problemas de aplicación. Aparecen funciones explícitas e implícitas. Los problemas de derivación se presentan en un contexto geométrico, orientados al estudio de una función, mientras que los problemas de integración involucran a la integral definida, las medidas de probabilidad y las integrales impropias.

Los problemas de las pruebas de Ceuta se caracterizan por ser tanto de cálculo diferencial como integral, aunque éstos últimos son mayoritarios. Por lo general son problemas de definición, aunque también los hay de aplicación y de propiedades y teoremas. Aparecen funciones explícitas e implícitas. Todos problemas de derivación analizados se presentan un contexto no geométrico. En relación con la integración, aparecen problemas de integral definida, de medida de probabilidad o de integrales impropias

Los problemas propuestos en Extremadura se caracterizan por ser de cálculo diferencial en su totalidad. Los hay de definición y de propiedades y teoremas. Son problemas de derivación no geométricos con funciones explícitas. En la Figura 9 se proporciona un ejemplo.

**Si  $F$  es la función real de variable real dada por la siguiente expresión, determine su función derivada.**

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \left( n + 2\sqrt{2knx^2 - k^2x^4} \right)$$

**Figura 9.** Ejemplo de enunciado en las pruebas de Extremadura.

Los problemas propuestos en Galicia involucran tanto el cálculo integral como el diferencial, aunque éste último es el predominante. La mayoría son problemas con un contenido de definición, aunque también figuran problemas de propiedades y aplicación de teoremas. Aparecen funciones explícitas, implícitas y paramétricas. Los problemas de derivación se presentan un contexto no geométrico en su mayoría. Los ejercicios de integración versan sobre la integral definida.

En la comunidad de Madrid se proponen ejercicios tanto de cálculo integral como de cálculo diferencial. La mayoría son problemas con un contenido de definición, aunque también podemos encontrarnos con problemas de aplicación y de propiedades y teoremas. Las funciones vienen dadas por lo general en forma explícita, aunque también aparecen funciones implícitas. En los problemas de esta comunidad se emplea únicamente el lenguaje verbal, y se consideran situaciones que no son meramente matemáticas en un buen número de tareas (a diferencia de otras comunidades). Los problemas de derivación presentan un contexto no geométrico en su mayoría, y en los ejercicios de integración aparecen problemas de integral definida, indefinida y de medidas de probabilidad. La Figura 10 recoge un ejemplo de cálculo integral.

**El centro de una plaza de una ciudad es un espacio peatonal con forma de triángulo isósceles. El lado desigual de dicho triángulo y la altura sobre dicho lado miden lo mismo:  $a$  metros. Un peatón atraviesa dicho triángulo en línea recta, entrando por un punto del lado desigual y saliendo por algún punto de alguno de los lados iguales. Si tanto el punto de entrada en el triángulo como la dirección del camino que sigue son aleatorios e independientes, ¿cuál es la probabilidad de que recorra una distancia mayor que  $a$  metros dentro del triángulo?**

**Figura 10.** Ejemplo de problema de Madrid (2015).

En las pruebas de Melilla podemos encontrarnos tanto con problemas de cálculo integral como con problemas que requieren el empleo de ambos cálculos (el diferencial y el integral) siendo su contenido de definición y de aplicación. Las funciones que aparecen son explícitas. Los problemas de derivación se presentan un contexto geométrico. Respecto a los de integración, aparecen problemas de integral definida, indefinida y de medida de probabilidad.

En la Comunidad Valenciana aparecen problemas tanto de cálculo integral como diferencial. La mayoría presentan un contenido de definición, aunque también figuran problemas de aplicación y de propiedades y teoremas. Las



funciones que involucran vienen dadas por lo general en forma explícita, aunque también aparecen algunas en forma implícita. En esta comunidad, la mayoría de los problemas se formulan en lenguaje verbal-simbólico, aunque también los hay que emplean únicamente el lenguaje verbal. Los problemas de derivación presentan un contexto tanto geométrico como no geométrico, y en los de integración aparecen problemas de integral definida, indefinida y de medidas de probabilidad.

## Modelos de problemas

Para finalizar la presentación de resultados, hacemos un análisis de conglomerados de los datos obtenidos, con el objetivo de identificar elementos que puedan caracterizar los distintos enunciados según la comunidad autónoma a la que pertenecen, y estudiar similitudes y diferencias. Puesto que las modalidades son cualitativas, se procedió a la transformación de la información mediante la transformación de las modalidades en variables para así convertir las modalidades de respuesta en ausencia-presencia. Ello nos permitió realizar un análisis de similitudes.

Usando el *software SPSS*, etiquetamos los problemas con las comunidades autónomas de donde procedían. Usando el método del vecino más lejano obtuvimos una agrupación clara. Cuando empezaron a producirse aumentos significativos en la distancia de enlace entre una etapa y la siguiente (que significaba la fusión de grupos con diferencias notables entre sí), decidimos detener el proceso, obteniendo 5 grupos.

El Grupo 1, al que denominamos grupo singular, está formado por los problemas de las pruebas realizadas en Aragón (en el año 2014), en Castilla León (en 2015), en Madrid (en 2014 y 2015), en Melilla (en 2016) y en la Comunidad Valenciana (en los años 2010 y 2016). Se caracterizan por ser problemas de Cálculo Integral en su mayoría, aunque también aparecen enunciados de cálculo diferencial y ejercicios que requieren de ambos cálculos. Son problemas de aplicación. Este grupo es el único en el que aparecen problemas de lenguaje verbal (en un 70% de los casos). También es el único grupo en el que las funciones aparecen como incógnitas, y en el que las situaciones, a veces, no son matemáticas. En los ejercicios de cálculo integral, la mayor parte de las integrales son definidas y responden a medidas de probabilidad. Este grupo también destaca por contener el mayor número de problemas que versan sobre integrales indefinidas y de problemas de derivación geométrica (ver, por ejemplo, la Figura 11).

**En una circunferencia se eligen  $n$  puntos al azar y de manera independiente. Calcule la probabilidad de que los  $n$  puntos estén situados en un mismo arco de  $\alpha$  radianes  $\alpha < \pi$ .**

**Figura 11.** Ejemplo de problema del Grupo 1. Castilla y León, 2015.



El Grupo 2, llamado grupo de integración áreas, lo componen los enunciados de las pruebas de Andalucía (2014 y 2016), Castilla León (2015), Castilla la Mancha (2015), Cantabria (2016), Ceuta (2016), Madrid (2014), La Rioja (2015) y la Comunidad Valenciana (2009 y 2015). En este grupo, junto con el Grupo 3, no figuran problemas de cálculo diferencial (por lo que todos los problemas son de cálculo integral). El contenido de los mismos es de aplicación y la mayor parte de las funciones consideradas en ellos, casi el 80%, son implícitas y polinómicas. En el restante 20% de las funciones consideradas lo configuran funciones explícitas, y en concreto funciones algebraicas y de valor absoluto. El lenguaje utilizado en los enunciados es el verbal-simbólico, y se plantean problemas de situación Matemática. Este grupo recoge el mayor porcentaje de ejercicios relacionados con las integrales definidas y de medida de probabilidad (ver, por ejemplo, la Figura 12).

**Obtenga con ayuda del cálculo integral, el área encerrada por la curva:**

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 12y - 26 = 0$$

**Figura 12.** Ejemplo de problema del Grupo 2. Andalucía, 2014.

En el Grupo 3, Integración, figuran problemas de cálculo integral exclusivamente. En este grupo se engloban las pruebas propuestas por las comunidades de Cantabria (2012), Ceuta (2014), Galicia (2014 y 2016), Melilla (2016) y la Comunidad Valenciana (2008, 2009 y 2010). El contenido de estos problemas, que se enuncian en lenguaje verbal-simbólico, es por lo general de definición, pero algunos versan sobre propiedades y teoremas. Las funciones que aparecen son explícitas y paramétricas. Es uno de los grupos con más variedad de funciones. En concreto figuran 6 tipos de funciones: polinómicas, fracción algebraica, radical, exponencial, integral y trigonométrica. La situación que plantean los ejercicios es matemática y en ellos aparecen integrales definidas e indefinidas. Destaca por ser el grupo en el que se propone un mayor número de integrales impropias (ver, por ejemplo, la Figura 13).

**Calcule  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  con precisión de una milésima.**

**Figura 13.** Ejemplo de problema del Grupo 3. Comunidad Valenciana, 2009.

El Grupo 4, Derivación, está formado por los ejercicios propuestos en Ceuta (2014), Extremadura (2015), Galicia (2016) y Madrid (2010 y 2015). Estos problemas suelen ser de cálculo diferencial, aunque también aparecen problemas de tipo mixto (esto es cálculo integral y diferencial). En cuanto a los contenidos, los problemas de este grupo son de definición y de propiedades y teoremas. Se caracterizan por el empleo de lenguaje verbal-simbólico, y el tipo de funciones que aparecen en ellos son funciones explícitas, en concreto fracciones algebraicas, radicales, exponenciales, integrales, trigonométricas. También destaca por ser el único grupo donde aparecen series como tipo

de función. Son problemas de situación matemática. Estamos ante el grupo con mayor número de problemas de derivación no geométrica (aunque también podemos encontrar problemas de derivación de corte geométrico). Respecto a la integración las integrales que aparecen son definidas (ver, como ejemplo, la Figura 14).

Sea una función  $f \in C^2(\mathbb{R})$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{1/x} = e^3$$

Calcule razonadamente  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ .

**Figura 14.** Ejemplo de problema del Grupo 4. Madrid, 2010.

Por último, en el Grupo 5, Derivación geométrica, se engloban los ejercicios de las pruebas realizadas en Andalucía (2016), Aragón (2014), Cantabria (2016), Galicia (2016) y Madrid (2016). Estos problemas son todos de cálculo diferencial, y de definición, planteados en lenguaje es verbal-simbólico. En este grupo se hace uso de muchos tipos de funciones que se presentan de forma implícita, explícita y paramétrica. En concreto se usan funciones polinómicas, de valor absoluto, radicales, exponenciales y trigonométricas. La situación de los problemas es matemática y aparecen ejercicios de derivación no geométrica y geométrica. De hecho, es el grupo con mayor número de problemas de derivación geométrica (ver, como ejemplo, la Figura 15).

Dada la curva  $C$  que admite una parametrización

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, \sqrt{3}e^t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine las ecuaciones de la recta tangente, el plano normal y el plano osculador a la curva en el punto  $P = \alpha(0)$ .

**Figura 15.** Ejemplo de problema del Grupo 5. Galicia, 2016.

La Tabla 2 resume los grupos con las modalidades más frecuentes en cada uno de ellos.

De forma comparada, el Grupo 1 recoge problemas “singulares”, que se caracterizan por ser de cálculo integral, y de aplicación. Son los únicos enunciados en los que se emplea solo el lenguaje verbal. En ellos la función aparece como una incógnita. Además, es el único grupo en el que se consideran situaciones distintas de la matemática. Es por ello que estos problemas a priori, podrían presentar mayor dificultad, por la necesidad de entender bien el enunciado de plantear correctamente el ejercicio.

El Grupo 2 al igual que el Grupo 3 estaría formado por problemas de integración, con la diferencia de que en el Grupo 2 la integración aparece en forma de cálculo de áreas y medidas de probabilidad, mientras que en el Grupo 3 se consideran integrales definidas, indefinidas e impropias. En el Grupo 2 los ejercicios son de aplicación a diferencia del Grupo 3, en el que la mayoría de los enunciados son de definición y se hace uso de un mayor tipo de funciones.

**Tabla 2.** Resumen de las agrupaciones con las modalidades modales.

	<b>Grupo 1 Singulares</b>	<b>Grupo 2 Integración áreas</b>	<b>Grupo 3 Integración</b>	<b>Grupo 4 Derivación</b>	<b>Grupo 5 Derivación Geométrica</b>
Comunidad	Aragón, 2014 CyL, 2015 Madrid 2014,15 Melilla 2016 C. V., 2010, 16	And. 2014,16 CyL, 2015 CIM, 2015 Cant., 2016 Ceuta, 2016 Madrid, 2014 La Rioja, 2015 C. V., 2009,15	Cantabria, 2012 Ceuta, 2014 Galicia, 2014,16 Melilla, 2016 C. V., 08, 09, 10	Ceuta, 2014 Extrem., 2015 Galicia, 2016 Madrid, 2010,15	Andalucía, 2016 Aragón, 2014 Cantabria, 2016 Galicia, 2016 Madrid, 2016
Contenido-Bloque	Cálc. Integral	Cálc. Integral	Cálc. Integral	Cálc. Diferencial	Cálc. Diferencial
Contenido-Parte	Aplicación	Aplicación	Definición	Definición Teorema	Definición
Formulación	Verbal	Verbal-Simbólico	Verbal-Simbólico	Verbal-Simbólico	Verbal-Simbólico
Tipo de función	Incógnita	Polinómica	Exponencial Integral	Fracción Series	Valor absoluto Trigonométrica
Tipo de coordenadas		Implícita	Explícita	Explícita	Implícita Explícita
Situación	Otra	Matemática	Matemática	Matemática	Matemática
Contexto	Int. indefinida Integral Medida	Integral Me- dida	Int. Impropia	Deriva. ana- lítica	Derivación geo.

El Grupo 5 es el único que se centra en la derivación considerando únicamente la geométrica. El Grupo 4 es el único que hace uso de la derivación no geométrica (incluyendo también de enunciados en los que intervienen tanto el cálculo integral como diferencial). Además, presenta un mayor número de enunciados de propiedades y teoremas lo que incrementa la complejidad de sus ejercicios. El Grupo 5 hace un mayor uso de las funciones trigonométricas.

## Reflexiones finales

En este trabajo hemos realizado un análisis de contenido de los enunciados de las Pruebas selectivas de acceso a los cuerpos de Profesores de Enseñanza Secundaria de las distintas Comunidades Autónomas de España, en relación con los ejercicios de cálculo diferencial e integral de un rango de años determinado (2008-2016). Se han comentado las características de las mismas bajo el prisma de las distintas categorías que han servido como variables para nuestro análisis. Que la herramienta desarrollada para este análisis haya hecho aflorar la información de forma tan exhaustiva, precisa y nítida, subraya la certeza de que las categorías empleadas son apropiadas para este estudio. También es importante poner de manifiesto que se ha utilizado un instrumento de análisis de tareas innovador puesto que, si bien se ha apoyado en otros ya establecidos, ha requerido reestructurar y enriquecer

estos métodos preexistentes para adecuarlos de manera idónea a nuestras necesidades.

Los resultados, interpretados desde el modelo de significado utilizado, muestran que los problemas:

- Con respecto a la estructura conceptual se centran más en el cálculo diferencial que el integral, y que lo más frecuentemente solicitado es conocer y utilizar una definición. Las funciones más repetidas son las polinómicas, las fracciones algebraicas y las exponenciales, casi siempre sin utilizar composición de funciones.
- El sistema de representación usado es verbal-simbólico mayoritariamente, utilizando las funciones implícitas en la mitad de los casos.
- Las situaciones son siempre matemáticas (salvo un problema), y los contextos más utilizados son analíticos (para derivación) y de medida (para integración).

Además, se han podido establecer cinco tipos de problemas prototipo cuyo elemento más característico es el contexto. Esto favorece su clasificación fenomenológica atendiendo al problema matemático que pretenden resolver. Es sorprendente que no todos los tipos de problemas se propongan en todas las comunidades autónomas. Las semejanzas y diferencias se pueden sintetizar, en relación con los problemas analizados, como sigue: Las pruebas en Andalucía se caracterizan por los problemas de áreas, en el ámbito de la integración, y por los de derivación aplicada a la geometría. Las de Aragón se caracterizan por problemas que requieren interpretación y por los de derivación geométrica. En Castilla León hay preferencia por los problemas de áreas y también por los que requieren interpretación. En Madrid aparecen todo tipo de problemas, por lo que esta comunidad puede ser la más compleja a la hora de valorar los ejercicios de oposición. En Melilla abundan los problemas de integración y los que requieren ser interpretados. En la Comunidad Valenciana encontramos problemas que requieren interpretación, de integración (en especial de áreas). En Castilla-La Mancha sólo aparecen problemas de áreas. En Cantabria se prefieren los problemas de áreas y de integración. En Ceuta se opta por los problemas de áreas, de integración y de derivación. En la Rioja se prefieren problemas de áreas, y en Extremadura los problemas de derivación. En Galicia son más frecuentes los problemas de integración, derivación y derivación geométrica.

## Referencias

- Alexandrov, A. D., Kolmogorov, A. N. y Laurentiev, M. A. (2014). *La Matemática, su contenido, métodos y significado*. Alianza editorial.
- Baena, F., Gamboa, J. M., de Diego, B., Llerena, A., Rodríguez, M. B., Lorenzo, J. M. y Salgueiro, B. (2015). *Problemas de oposiciones. Matemáticas. Tomo 7*. Deimos.
- Baena, F., Gamboa, J. M., de Diego, B., Llerena, A., Rodríguez, M. B., Lorenzo, J. M. y Salgueiro, B. (2016). *Problemas de oposiciones. Matemáticas. Tomo 8*. Deimos.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. Routledge.
- Diego, B., Baena, F. J., Llerena, A., Rodríguez, M. B., Gamboa, J. M., Lorenzo, J. M. y Salgueiro, B. (2014). *Problemas de oposiciones. Matemáticas. Tomo 6*. Deimos.
- Diego, B., Llerena, A., Baena, F. J., Rodríguez, M. B., Gamboa, J. M., Lorenzo, J. M. y Salgueiro, B. (2016). *Problemas de oposiciones. Matemáticas. Tomo 5*. Deimos.
- Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp.103-117). Pirámide.
- Herrera, M. E., Velasco, M. V. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA*, 11 (4), 280-306. <https://doi.org/10.30827/pna.v11i4.6240>
- Jiménez, A. (2017). Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad. [Trabajo fin de máster, Universidad de Granada]. [https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM\\_JIMENEZFERNANDEZ.pdf](https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_JIMENEZFERNANDEZ.pdf)
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
- Orden de 23 de abril de 1991 por al que se convocan procedimientos selectivos de ingreso y accesos a los Cuerpos de Profesores de Enseñanza Secundaria, Profesores Técnicos de Formación Profesional, Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, Profesores de Artes Plásticas y Diseño, Maestros de Taller de Artes Plásticas y Diseño y Profesores de Música y Artes Escénicas.
- Real Decreto 276/2007, de 23 de febrero, por el que se aprueba el Reglamento de ingreso, accesos y adquisición de nuevas especialidades en los cuerpos docentes a que se refiere la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, y se regula el régimen transitorio de ingreso a que se refiere la disposición transitoria decimoséptima de la citada ley. Boletín Oficial del Estado, núm. 53, de 2 de marzo de 2007. <https://www.boe.es/buscar/pdf/2007/BOE-A-2007-4372-consolidado.pdf>
- Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. McGrawHill
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiañez, y M. Molina, (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Editorial Comares.

Rico, L., Lupiañez, J. L., y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Editorial Comares.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Ediciones Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139–152). Ediciones Pirámide.

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). SEIEM.