

# UN ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS INVENTADOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN ESPAÑA

## A STUDY OF THE PROBLEMS POSED BY SECONDARY STUDENTS IN SPAIN

Johan Espinoza-González<sup>1</sup>  
José Luis Lupiáñez-Gómez<sup>2</sup>  
Isidoro Segovia-Alex<sup>2</sup>

1. Universidad Nacional, Costa Rica

2. Universidad de Granada, España

### Proceso editorial

Recibido: 16/11/2016

Aceptado: 25/11/2016

Publicado: 12/12 /2016

Contacto

Johan Espinoza-González

Universidad Nacional

Costa Rica

jespinoza@una.cr

---

### CÓMO CITAR ESTE TRABAJO | HOW TO CITE THIS PAPER

Espinoza-González, J., *et al.* (2016). Un estudio de los problemas inventados por estudiantes de secundaria en España. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 23: 85-101.

# UN ESTUDIO DE LOS PROBLEMAS INVENTADOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN ESPAÑA

## A STUDY OF THE PROBLEMS POSED BY SECONDARY STUDENTS IN SPAIN

### Resumen

El estudio explora los problemas inventados por un grupo de estudiantes de un Instituto de Educación Secundaria en España ante dos tareas semiestructuradas de invención de problemas a partir de tres categorías de análisis relacionadas con la estructura semántica, sintáctica y matemática de los mismos. Además, se analizan las diferencias de los problemas planteados en cada tarea propuesta. Los resultados informan sobre las principales características de los problemas de acuerdo con su extensión, tipo de proposición interrogativa y número empleado, bloque de contenido curricular, cantidad de pasos, procesos y relaciones semánticas distintas implicadas en la solución del problema; así como la riqueza de los problemas en cada una de las tareas propuestas.

**Palabras clave:** Invención de problemas, resolución de problemas, Educación Matemática.

### Abstract

*The study explores the problems posed by a group of students of a Secondary School in Spain before two semistructured tasks of problem posing from three categories of analysis related to semantic, syntactic and mathematical structure thereof. Furthermore, differences between the problems in each task proposed are analyzed. The results reported on the main characteristics of the problems according to their extension, interrogative sentence type and number employed, block of curricular content, number of steps, processes and different semantic relationships involved in solving the problem; as well as richness of the problems in each of the proposed tasks.*

**Keywords:** Problem posing, problem solving, Mathematics Education.

## INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas ha sido históricamente un componente importante del currículo y actividad central de la matemática escolar (NCTM, 1980, 1989). De hecho, algunos autores destacan que en todas las clases de matemática de cualquier país se puede observar a los estudiantes resolver problemas matemáticos (Silver, 1994). A partir de esa etapa surgen diversas líneas de investigación centradas en la resolución de problemas, entre las cuales, la invención de problemas matemáticos es una de ellas (Castro, 2008).

Los que promueven este tipo de actividades argumentan que puede favorecer la participación de los estudiantes en una auténtica actividad matemática, permitiéndoles encontrar muchos problemas, métodos y soluciones, así como fomentar la creatividad de los estudiantes (Silver y Cai, 2005). Además, su práctica puede permitir que los estudiantes perciban una matemática más cercana, minimizando los problemas asociados a su enseñanza (Ayllón, Gallardo y Gomez, 2016). Así mismo, se advierte que cuando un estudiante se enfrenta a actividades de invención de problemas alcanza niveles de razonamiento que hacen posible la construcción del conocimiento matemático (Ayllón y Gómez, 2014)

A pesar de su importancia y el crecimiento en el número de investigaciones, la invención de problemas prácticamente no ha sido tratada como parte del currículo de matemática (Espinoza, 2011). Sin embargo, actualmente su interés se ha incrementado debido a las bondades y usos que se le ha dado como enfoque de instrucción (Castro, 2011; Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2014).

A partir de esto, se propone estudiar la capacidad de invención de problemas que realizan estudiantes de educación secundaria, así como analizar las diferencias entre los enunciados inventados en ambas tareas con el fin de conocer en cuál de ellas se inventaron problemas con mayor riqueza.

Así, se plantean los siguientes objetivos de investigación:

- Identificar los conocimientos aritméticos y numéricos que involucran los estudiantes de educación secundaria cuando inventan problemas.
- Establecer la capacidad que presenta un grupo de estudiantes de secundaria al inventar problemas aritméticos.
- Establecer cuál tarea de invención de problemas propuestas genera enunciados con mayor riqueza.

Cada uno de estos objetivos conlleva realizar las siguientes acciones concretas:

- Análisis de la resolubilidad de los problemas inventados.
- Análisis de las producciones de los estudiantes de acuerdo con su estructura sintáctica, semántica y matemática.
- Caracterización de las producciones de los estudiantes.
- Elaboración de un instrumento que permita valorar la capacidad de invención de problemas de los estudiantes.
- Valoración de la capacidad de invención de problemas que presentaron los estudiantes de la muestra.
- Análisis de las características que presentan los problemas planteados en la primera y segunda tarea propuesta.

## MARCO TEÓRICO

La revisión de literatura presentada en este apartado incluye dos temas: los problemas aritméticos y la invención de problemas. A continuación se exponen algunos aspectos generales relacionados con los problemas aritméticos, su conceptualización, clasificación y algunas variables de estudio que son de interés en esta investigación. Luego se describe en qué consiste la invención de problemas matemáticos.

### Problemas aritméticos

En este estudio se adoptó la noción de problema matemático propuesta por Castro (1991), quien señala cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición (enunciado oral o escrito), unos datos conocidos; una intención (movilizar una o más personas para que lo resuelvan), una meta (llegar a un resultado) y un proceso (modo de actuación para alcanzar el resultado).

De igual forma, se acogió la definición de problema aritmético propuesta por Puig y Cerdán (1988), al considerarla como un enunciado verbal que proporciona información de carácter cuantitativo, pues los datos suelen ser cantidades definidas generalmente de forma numérica. La condición implicada en el enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al cálculo de una o varias cantidades o relaciones entre cantidades.

En relación con su clasificación, Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, *et al.*, (1997), mencionan los problemas de una etapa o más de una etapa. Puig y Cerdán (1988), también sugiere esta clasificación y la combina con su estructura operatoria. Así

un problema aritmético se puede clasificar en: aditivo de una etapa, multiplicativo de una etapa, aditivo de más de una etapa, multiplicativo de más de una etapa y problemas de varias operaciones combinadas. Estos últimos son también llamados problemas mixtos y son aquellos que combinan las estructuras aditivas y multiplicativas y su resolución requiere de más de una relación entre los datos (Castro, *et al.*, 1997)

Con respecto a las variables de estudio de los problemas aritméticos, se pueden mencionar las que están relacionadas con el orden y las relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema (Puig y Cerdán, 1988), el tipo de proposición interrogativa (Castro, 1995; Silver y Cai, 2005), la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta (Castro, Rico y Gil, 1992), la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta (Castro *et al.*, 1997), el tipo de estructura operatoria y cantidad de etapas (Puig y Cerdán, 1988) la componente semántica (Nesher, 1982; citado en Puig y Cerdán, 1988),

## Invencción de problemas

El hecho de inventar problemas no es una actividad nueva, ya que ha sido parte de la resolución de problemas desde hace ya varios años; sin embargo, es hasta en las últimas décadas cuando los investigadores en Educación Matemática prestan atención a ésta y la identifican como una línea de investigación dentro de la resolución de problemas matemáticos (Castro, 2008). Pero ¿en qué consiste este proceso y cuáles son las interpretaciones que se le ha dado?

El término invención de problemas se ha empleado para referirse tanto a la generación de nuevos problemas o la reformulación de problemas dados (Silver, 1994; English, 1997; Silver y Cai, 1996). En este sentido, los estudiantes pueden inventar problemas durante la solución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung y Kenny, 1996), realizando cambios al mismo. Así, podrían reformular el problema y personalizarlo (Silver, 1994), disminuyendo el tamaño de los números empleados o estudiar un caso particular de la situación dada, con el objetivo de comprender mejor el problema y así buscar una solución al mismo. Por ejemplo, en el trabajo de Polya (1979), aparece esta componente esencial de la actividad matemática, cuando se cuestiona ¿cómo podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de la condición?

Sin embargo, la invención de problemas puede ocurrir antes de resolver un problema, cuando lo que se persigue no es la solución sino la creación de un problema a

partir de una situación o experiencia (Silver, 1994). Por ejemplo, en la investigación de Espinoza (2011), los estudiantes debían inventar un problema aritmético que consideraran difícil de resolver, a partir de dos situaciones, una de ellas expresada mediante una ilustración y otra con base en una situación expuesta de forma escrita.

Esta actividad también puede suceder después de la solución de un problema, en el cual se modifica el objetivo, meta o condición de un problema ya resuelto con el fin de generar nuevos problemas (Silver, 1994). Este tipo de estrategia está relacionada con la fase "looking Back" de resolución de problemas citada por Polya (1979).

Esta concepción de invención de problemas posterior a la solución de un problema, es utilizada por Brown y Walter (1993) en su estrategia denominada "¿What if not?" la cual consiste en cambiar las condiciones y restricciones de un determinado problema, para así plantear nuevos e interesantes problemas que pueden llevar a resultados relevantes.

Por otra parte, Stoyanova (1998) identifica tres categorías de experiencia de planteamiento de problemas que permiten estudiar el conocimiento y habilidades matemáticas de los estudiantes para generar y resolver problemas matemáticos: situación libre, situación semi-estructurada y situación de planteamiento de problemas estructurada. En la primera situación los estudiantes plantean problemas sin ninguna restricción, en la segunda y tercer actividad los estudiantes inventan problemas con base en alguna situación, experiencia o información cuantitativa. Lo que cambia en estos dos últimos tipos es el nivel de estructuración de la tarea propuesta.

Así, la invención o planteamiento de problemas es un proceso matemático que tiene lugar, bien, durante la resolución de un problema matemático, luego de resolver un problema o cuando el sujeto se enfrenta ante una situación conocida previamente, para la cual no hay una formulación matemática. Además, los estudiantes pueden inventar problemas a partir de una ilustración que presente o no información numérica, que se resuelvan con base operaciones aritméticas dadas, mediante alguna información presentada de forma textual, modificando la respuesta de un problema o mediante el planteamiento libre de un problema (Espinoza, 2011).

Por último, es importante mencionar que al hecho de inventar problemas se le ha dado distintas denominaciones. Por ejemplo, se le ha designado como formulación de problemas (Kilpatrick, 1987), generación o reformulación de problemas (Silver, 1994) y planteamiento de problemas (Brown y Walter, 1990). Sin embargo, estas denominaciones hacen referencia al mismo hecho, inventar problemas, por lo que se utilizará con más frecuencia dicha expresión.

## METODOLOGÍA

El diseño de esta investigación es mixto, en el que se combinan aspectos de diseños simples cuantitativos y cualitativos. Además, corresponde a un estudio descriptivo transversal (Cohen y Manion, 1990), que busca estudiar las producciones de los estudiantes ante dos tareas de invención de problemas en un momento determinado, predominando la descripción y caracterización en términos cualitativos y cuantitativos.

Los sujetos de estudio corresponden a un grupo de 19 estudiantes de tercer grado del Instituto de Educación Secundaria Nazarí, ubicado en el municipio de Salobreña en la provincia de Granada, España. Este grupo está conformado por 7 hombres y 12 mujeres, cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años.

### Descripción del instrumento para recolectar información

En este estudio se elaboró un instrumento con dos tareas semiestructuradas de invención de problemas (Stoyanova, 1998), con características relativamente diferentes. En la primera se presentó una figura que contiene varios elementos como un cartel que muestra una información numérica y tres niños corriendo alrededor de una plaza que está junto a una cancha de fútbol. La segunda tarea correspondió a un enunciado verbal que incluye tres datos numéricos explícitos (hora, capacidad del tren y cantidad de vagones).

A continuación se muestran las dos tareas que fueron presentadas a los estudiantes y para las cuales tuvieron 45 minutos para resolverlas.

#### Tarea # 1

“De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver” y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información”.



Figura descargada el 19 de abril del 2011 <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html>

<p><b>Tarea # 2</b></p> <p>“De acuerdo con el siguiente enunciado, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información”.</p>	<p>Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima de 294 pasajeros”.</p>
---	--

En cuanto a las categorías y esquema para analizar los problemas de los estudiantes, se adoptó la herramienta presentada en Espinoza, Lupiáñez y Segovia, (2015), la cual permitió estudiar la habilidad de los estudiantes para crear problemas aritméticos ya que propone tres categorías relacionadas con la estructura sintáctica, matemática y semántica del problema. En la primera categoría se estudió la longitud del enunciado, el tipo de proposición interrogativa y el tipo de número empleado. En la estructura matemática se analizó el tipo de estructura operatoria, el tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema y la cantidad de pasos distintos para resolver el problema. Por último, se estudiaron los enunciados de acuerdo con su estructura semántica, así como la cantidad de relaciones semánticas distintas implicadas en la solución del problema.

## RESULTADOS

A continuación se muestran las características generales de los problemas inventados por los estudiantes y seguidamente se presentan los resultados según la estructura sintáctica, matemática y semántica. Cabe mencionar que también se analizaron los problemas no resolubles, haciéndose una comparación de estos con las diferentes variables de estudio.

### Características generales de los problemas inventados

En primera instancia resultó que todos los estudiantes de la muestra respondieron a las dos tareas propuestas, obteniendo un total de 38 problemas matemáticos aritméticos, de los cuales el 74% son resolubles (28 enunciados). De los 10 problemas no resolubles, 6 presentaron incompatibilidad matemática (15,8%) y 4 fueron clasificados como incompletos (10,5%). Un ejemplo de problema incompleto es el siguiente “*María, Juan y Luis son los mejores corredores de 3º, por eso su maestra de*

*Educación Física hoy les ha llevado a correr a la pista de atletismo. Si tienen que dar 6 vueltas y cada vuelta son de 80 metros, ¿en cuánto tiempo darán las 6 vueltas? (17-T1)*

Un problema planteado que presenta incompatibilidad matemática de tipo numérica porque 229 no es divisible por 3 es el siguiente: De la estación de tren de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 h con destino a Málaga. Todos los pasajes están vendidos (294), pero en un último momento uno de los vagones que tiene capacidad para 65 pasajeros sufre una serie de desperfectos, por lo que debe quedarse en la estación. Si los restantes vagones tienen la misma capacidad. ¿Cuánto pasajeros pueden subir a cada vagón? (6-T2)

En relación al tipo de tarea, resultó que en la primera se planteó una mayor cantidad de problemas resolubles que en la segunda; sin embargo, en esta última plantearon una mayor cantidad de problemas que presentan incompatibilidad matemática o que son incompletos que en la primera.

## **Análisis según la estructura sintáctica**

La estructura sintáctica se analizó con base en tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2015). A continuación se describen los principales resultados en relación con estas variables.

### ***Longitud del enunciado***

Con respecto a esta variable, resultó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas fue de 3,44 y que el 68,5% de éstos están conformados por cuatro o menos proposiciones. Además, se encontró que el promedio de la cantidad de proposiciones en la primera tarea (3,14), es menor que en la segunda (4,47).

También se observó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas no resolubles (3,5), es mayor que en los resolubles (2,7).

### ***Tipo de proposición interrogativa***

En relación con esta variable, resultó que la mayoría de las proposiciones interrogativas son de asignación (52,4%), mientras que las proposiciones interrogativas relacionales fueron las menos empleadas. También se observó que no existe una gran diferencia entre la cantidad de proposiciones de cada tipo, planteadas en la primera y segunda tarea de invención de problemas.

Además, se encontró que los estudiantes plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con proposiciones interrogativa de asignación, que resolubles con dicha característica; sin embargo, se encontró una mayor proporción de problemas resolubles con proposiciones interrogativas condicionales y relacionales.

### ***Tipo de número empleado***

Los enunciados se caracterizaron por la presencia de números naturales (97,4%) y en menor proporción números racionales expresados tanto en notación decimal como fraccionaria (18,5%). También se observó que el 86% presentan el uso de un solo tipo de número.

En cuanto al tipo de tarea, resultó que ambas incluyen una cantidad similar de problemas que contiene números naturales; sin embargo, en la segunda tarea se plantearon más problemas que incluyen números racionales expresados en notación fraccionaria que en la primera. Además, en ambas tareas se encontró un porcentaje similar de problemas que presentan sólo un tipo de número.

Por último, no observaron diferencias significativas en relación con la cantidad y tipo de números empleados y la resolubilidad del problema.

## **Análisis según la estructura matemática**

Esta categoría se analizó tomando en cuenta cuatro variables. A continuación se muestran los principales resultados en cada una de ellas.

### ***Tipo de estructura operatoria y cantidad de etapas***

Con respecto a esta variable resultó que los estudiantes prefirieron plantear problemas de estructura mixta (55%), seguido de problemas de estructura multiplicativa (31%). También se encontró que el 94,7% de los problemas planteados son de estructura multiplicativa o aditiva de más de una etapa o problemas de estructura mixta.

En cuanto al tipo de tarea, se observó que en la segunda se plantearon una mayor cantidad de problemas mixtos y aditivos que en la primera; sin embargo, en esta última se plantearon una mayor cantidad de problemas multiplicativos.

También se encontró una mayor proporción de problemas no resolubles con estructura mixta, que problemas resolubles con la misma característica. Sin embargo, esto no fue así en los problemas de estructura multiplicativa y aditiva, ya que la mayor proporción de éstos son problemas resolubles.

### ***Tipo de operación y cantidad de procesos distintos implicados en la resolución del problema***

En relación con el tipo de operación, resultó que los estudiantes prefirieron plantear problemas que implicaban el uso de multiplicación o multiplicación-división o suma-multiplicación. Además, el 73,7% de los problemas requerían dos o tres procesos distintos para ser resueltos, mientras que el 21,1% presentan tres o más procesos distintos.

También resultó que no existe diferencia en cuanto a la cantidad de procesos implicados en la primera y segunda tarea, así como en los problemas resolubles y no resolubles.

### ***Cantidad de pasos distintos para resolver el problema***

Los resultados muestran que el promedio de pasos requeridos para resolver los problemas es de 2,92. Además, se encontró que la mayoría (60,5%) requieren tres o cuatro pasos en su solución, mientras que sólo el 10% requieren cinco o más pasos para ser resueltos.

En cuanto a las tareas, se obtuvo que los inventados con base en la segunda implican más pasos para ser resueltos (3,1) que los planteados en la primera tarea (2,7). También resultó que los no resolubles presentan una media mayor de cantidad de pasos para ser resueltos (3,4) que los resolubles (2,75). Además, los estudiantes plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con más de cuatro pasos (50%), que resolubles con la misma característica (26%).

Otro resultado es que el 57,1% de los problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas, implican tres o menos pasos para ser resuelto y sólo el 14,3% requieren más de 5 pasos. Además, se encontró que el 35,7% de los problemas que incluyen dos o tres procesos, requieren cuatro o más pasos para ser resueltos.

### ***Bloque de contenido curricular al que hace referencia el enunciado del problema***

Al estudiar los bloques de contenido curricular, se observó que el 50% de los estudiantes prefirieron combinar el de aritmética y física y en menor proporción sólo el de aritmética (39,5%). También resultó que la mayoría de los problemas incluyen dos bloques de contenido curricular (55,3%) y en menor proporción uno sólo (39,5%).

En cuanto a las tareas, observamos que en la segunda se planteó una mayor proporción de problemas con sólo un bloque de contenido curricular, mientras que en la primera se inventaron más problemas que incluyen dos o tres bloques.

## **Análisis según la estructura semántica**

En esta categoría se analizó el tipo de estructura semántica presente en los problemas aditivos y multiplicativos. Además, se estudió la cantidad de relaciones semánticas que presentan los problemas inventados por los estudiantes.

### ***Estructura semántica de los problemas aditivos***

Los estudiantes plantearon ocho problemas aditivos, de los cuales tres poseen la componente semántica de cambio, cuatro de combinación y uno de comparación. Con respecto a los 26 problemas de estructura aditiva y mixta inventados, se encontró que el 69,2% son de combinación, 53,8% de cambio y 7,7% de igualación.

En cuanto a las tareas, resultó que en la segunda se planteó una mayor cantidad de problemas que presentan las relaciones de combinación y cambio, mientras que en la primera se encontraron más problemas de comparación.

### ***Estructura semántica de los problemas multiplicativos***

De los 12 problemas de estructura multiplicativa encontrados, once de ellos presentaban la estructura semántica de isomorfismos de medidas, tres de producto de medida, y sólo uno es de comparación multiplicativa.

Con respecto a los 33 problemas de estructura multiplicativa y mixta planteados, resultó que el 93,9% son de isomorfismo de medida y el 9,1% de producto de medidas.

En relación con el tipo de tarea, resultó que en la primera se plantearon una mayor cantidad de problemas multiplicativos que presentan isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medida que en la segunda.

### ***Cantidad de relaciones semánticas distintas***

En relación con esta variable, se encontró que los problemas están conformados, en promedio, por 1,89 relaciones semánticas distintas. También se observó que el 84,2% de ellos presentan dos o menos relaciones semánticas distintas.

Por último, no se existen diferencias en el número de relaciones semánticas distintas en los problemas resolubles y no resolubles.

## CONCLUSIONES

En primera instancia, consideramos que las características particulares de cada tarea, como la forma de presentar la información y las relaciones matemáticas que podrían surgir de las mismas, permitieron a los estudiantes poner en práctica sus conocimientos previos, habilidades matemáticas y creatividad al momento de inventar sus problemas. Además, el solicitarles que plantearan un problema que consideraran difícil de resolver, implicó que las tareas propuestas fueran un reto para los estudiantes y pusieran su mayor esfuerzo en resolverla.

Con respecto a las diferencias entre los problemas planteados con base en la primera y segunda tarea de invención de problemas, se concluye que los estudiantes plantearon una mayor proporción de problemas resolubles en la primera que en la segunda tarea; sin embargo, los enunciados producidos con base en la segunda situación presentan mayor riqueza, ya que están conformados por una mayor cantidad de proposiciones, requieren más pasos para ser resueltos, incluyen números racionales expresados en notación fraccionaria e implican una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas.

De igual forma, en esta misma tarea se plantearon más problemas de estructura mixta y aditiva que en la primera. Además, se percibió una sensación de mayor dificultad en la solución de los problemas planteados con base en la segunda.

Creemos que las diferencias encontradas se pueden deber principalmente a dos factores: las características particulares de las situaciones de invención de problemas propuestas y el periodo de acomodación que necesitan los estudiantes ante una tarea que es nueva para ellos.

Con respecto a la primera, creemos que algunas características que presenta la segunda tarea y que no posee la primera, pudieron influir en el planteamiento de problema con mayor riqueza. Por ejemplo, el presentar la información de forma verbal y más explícita (cantidad de vagones, hora, cantidad de pasajeros) y no mediante una figura donde los datos están dados de forma implícita. Además, la segunda tarea presenta más tópicos en el cual plantear el problema (distancia, tiempo, velocidad, capacidad, peso, fuerza, costo) que la primera (distancia, tiempo, velocidad, área, perímetro).

También consideramos que en la segunda se plantearon problemas con mayor riqueza, porque los estudiantes necesitan un periodo de acomodación ante una situación nueva o que no es habitual para ellos, como es el inventar problemas. Esto concuerda con los resultados del estudio de Silver y Cai (1996), donde la comple-

alidad del problema fue mayor en el segundo y tercer problema que inventaron los estudiantes.

Sobre la resolubilidad de los problemas, podemos concluir que los no resolubles poseen una mayor riqueza. Esto porque presentan una mayor cantidad de proposiciones y relaciones semánticas distintas, así como más pasos distintos para ser resueltos que los resolubles. Además, plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con estructura mixta y que contienen proposiciones interrogativas de asignación.

Consideramos que esto pudo suceder porque los estudiantes intentaron agregar condiciones al problema con la intención de hacerlo más difícil, sin verificar que el problema fuera resoluble. A pesar de esto, creemos que es importante analizar dichos enunciados, ya que inventar un problema resoluble es una parte más de la complejidad de este tipo de actividades. Ante esto, recomendamos que la tarea de inventar problemas implique también resolverlo, para que los estudiantes tomen un mayor control de la actividad.

Por último, los problemas inventados por los estudiantes de secundaria se caracterizaron por:

- Inventar problemas resolubles.
- Incluir en el enunciado cuatro o menos proposiciones.
- Emplear sólo números naturales.
- Incluir como pregunta del problema proposiciones interrogativas de asignación.
- Combinar la estructura aditiva y multiplicativa para plantear problemas de estructura mixta.
- Incluir las relaciones semánticas de combinación e isomorfismo de medidas.
- Plantear dos o menos relaciones semánticas distintas.
- Inventar problemas que requieren tres o cuatro pasos para ser resueltos.
- Plantear problemas que presentan dos o tres procesos de cálculo distintos en su solución y en menor proporción tres o más procesos.
- Combinar los bloques de contenido curricular de aritmética y física.

Los siguientes son dos ejemplos de problemas típicos que inventaron los estudiantes de la muestra y que coinciden con algunas de las características citadas.

*“Si tres chicos giran en torno a una plaza y una vuelta son 80 metros, si el primer niño consigue dar 17 vueltas y la siguiente niña 29 y en total han hecho entre todos 5000 metros ¿Cuántas vueltas ha dado el 3° niño? (03-T1)*

*“De la estación de tren de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 horas con destino a Málaga. Todos los 294 pasajes están vendidos, pero en último momento uno*

*de los vagones sufre un desperfecto. Si este desperfecto dura una semana y estaba previsto que el tren saliera dos veces al día ¿cuántos pasajeros se verán afectados? (06-T2)*

## REFERENCIAS

- Ayllón, M. y Gómez, I. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. *Escuela abierta: Revista de Investigación educativa* 17, 29-40.
- Ayllón, M., Gallego, J. y Angustias, I. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos* 38, 51-67
- Brown, S. & Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, S. & Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1-15). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo Ricardo; Gómez Bernardo; Camacho Matías; Blanco Lorenzo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" / Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Comares.
- Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Castro, E., Rico, L. & Gil, F., (1992). Enfoque de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias*, 10(3), 243-253.
- Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM* (pp 63-76). Granada: SEIEM.

- Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.
- Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: Editorial la Muralla
- Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio*. Trabajo de Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Espinoza, J., Lupiáñez J. L. & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en Educación Matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* (14)2, 1-12.
- Espinoza, J., Lupiáñez J. L. & Segovia, I. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Revista Uniciencia* (29)1, 58-81.
- Ellerton N. (1986). Children's made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271.
- English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Shoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education*. (pp 123-148). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.
- Moses, B., Bjork, E. & Goldenberg, E. R. (1990). Beyond problem solving: problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s* (pp. 83-91). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA: El autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School of Mathematics*. Reston, VA: El autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princenton, NJ: Princenton University Press.
- Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

- Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E. & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.
- Silver, E. & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135.
- Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S. & Kenney, P. (1996). Posin matehematical problem: An exploratory study. *Journal for research in matehematics education*. 27(3), 293-309.
- Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp 164-185). Edit Cowan University: MASTEC.