http://doi.org/10.30827/reugra.v25i0.128

EL ORIGEN DEL ERROR DE INVERSIÓN Y LAS BASES NEURONALES SUBYACENTES

THE ORIGIN OF THE REVERSAL ERROR AND THE UNDERLYING NEURAL BASES

Noelia Ventura-Campos[1]
David Arnau[2]
José Antonio González-Calero[3]
1. Universitat Jaume I
2. Universitat de València- Estudi General
3. Universidad de Castilla - La Mancha.

Proceso editorial
Recibido: 13/11/2018-30/07
Aceptado: 27/11/2018
Publicado: 28/11/2018
Contacto
Noelia Ventura-Campos
venturan@uji.es

CÓMO CITAR ESTE TRABAJO | HOW TO CITE THIS PAPER

Ventura-Campos, N., Arnau, D., y González-Calero, J. A. (2018). El origen del error de inversión y las bases neuronales subyacentes. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 25:* 281-297.

EL ORIGEN DEL ERROR DE INVERSIÓN Y LAS BASES NEURONALES SUBYACENTES

Resumen

Una línea de investigación importante en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, más concretamente en la resolución algebraica de problemas verbales, es la centrada en identificar los procesos cognitivos que se ponen en juego desde que un sujeto identifica una relación matemática en un problema hasta que la expresan mediante una expresión algebraica. Un caso en el que un número importante de estudiantes reconocen el esquema conceptual, pero no son capaces de plasmar una expresión matemática correcta sería el conocido como error de inversión. Este error aparece en los problemas en los que se plantean proposiciones verbales de comparación aditiva y multiplicativa. El nombre del error proviene de que ante la tarea "Escribe una ecuación para representar el enunciado siguiente: 'Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en esta universidad'. Usa *E* para el número de estudiantes y *P* para el número de profesores" (Clement, Lochhead y Monk, 1981, p. 288) la mayoría de las respuestas incorrectas fueron $P = 6 \cdot E$, lo que implicaría invertir el orden de las letras frente a la respuesta correcta $E = 6 \cdot P$. Diversos estudios han tratado de identificar el origen del error. Sin embargo, únicamente se han conseguido establecer relaciones entre variables y establecer hipótesis plausibles de posibles procesos cognitivos erróneos. En estos estudios no se ha tomado en consideración la importancia que tiene el desarrollo cerebral del alumnado en el aprendizaje ni su potencial explicativo para justificar las relaciones causales observadas entre características de los problemas y su dificultad.

El objetivo principal de esta investigación es identificar las bases neurales subyacentes ligadas a las diferencias individuales entre los participantes durante la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos, más concretamente en el error de inversión.

Palabras clave: resolución de problemas aritmético-algebraicos; error de inversión; neuroeducación; imágenes de resonancia magnética

THE ORIGIN OF THE REVERSAL ERROR AND THE UNDERLYING NEURAL BASES

Abstract

An important research line in mathematical teaching and learning and, more specifically, in the solving of word problems in an algebraic way, is focused on establishing the cognitive processes involved from the identification of a mathematical relationship of problem expressed verbally to the subsequent representation of algebraic expressions. A case in which a considerable number of students recognize the conceptual scheme, but are not able to translate this to a correct mathematical expression would be the error known as reversal error. This error takes place in word problems that involve additive and multiplicative comparison. The error is often made on tasks similar to the following: "Write an equation based on the following statement: 'There are six times as many students as professors at this university.' Use S for the number of students and P for the number of professors." A common incorrect answer is $P = 6 \cdot S$, caused by reversing the order of the letters from the correct answer S = 6 · P. The current literature has only been able to establish relationships between mathematical variables. However, concerning the reversal error these studies have not taken students' brain development into consideration when analysing students' learning or have not explored the causal relation between the features of problems and their difficulty.

The main objective of this research is to reveal the underlying neural bases linked to individual differences between students when solving arithmetic-algebraic word problems and, in particular, when reversal errors are made.

Keywords: problem solving; reversal error; neuroeducation; magnetic resonance imaging

LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS

La resolución de problemas es una tarea habitual en nuestra vida cotidiana (Halmos, 1980) y uno de los elementos centrales de la enseñanza de las matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Históricamente, la resolución de problemas verbales ha ocupado un lugar destacado tanto en la Educación Primaria como en Educación Secundaria. El hecho de que estos problemas puedan resolverse usando distintos métodos permite extender al álgebra su uso escolar inicialmente ligado a la aritmética. Tanto desde el punto de vista del currículo como de la investigación, la resolución de problemas ha tenido un importante protagonismo en España desde la última década del siglo XX. Sin embargo, los resultados de los estudios PISA (p.ej., OECD, 2014a) ponen de manifiesto que la resolución de problemas matemáticos escolares y los problemas de la vida real son algunas de las áreas en las que los estudiantes españoles muestran un menor rendimiento. De hecho, se constata que los estudiantes españoles obtienen una media en resolución de problemas inferior a lo esperado si se toma como referente su rendimiento en matemáticas (OECD, 2014a). Esta diferencia de resultados sugiere que el potencial de los estudiantes como resolutores de problemas no está desarrollado completamente desde la asignatura de matemáticas en España en comparación con otros países.

Como parte de los contenidos de aritmética y álgebra, y a lo largo de la educación primaria y secundaria, es habitual plantear problemas de enunciado verbal que describen situaciones posibles del mundo (en adelante, problemas verbales o problemas verbales aritmético-algebraicos). La presencia de este tipo de problemas es uno de los tres criterios utilizados en la evaluación PISA 2012 para medir el grado de exposición a la oportunidad de aprender a resolver problemas (OECD, 2014b). En este aspecto, España está muy por encima de la media de la OCDE en el uso de problemas verbales en el aula (OECD, 2014b). Sin embargo, estas oportunidades de aprendizaje no parecen reflejarse en el rendimiento en la resolución de problemas verbales.

Partimos de la definición de *proceso de resolución de un problema* como "la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (Puig, 1996, p. 31). Esta actividad puede ser observada, explicada y caracterizada desde muchos puntos de vista y ha sido una de las áreas que más se ha desarrollado en la investigación en educación matemática en las últimas décadas (Weber y Leikin, 2016). Desde un punto de vista cognitivo, la resolución aritmético-algebraica de problemas verbales supone un proceso analítico que reduce el enunciado a información de tipo matemático donde se identifican y conectan cantidades. Durante este proceso de análisis, el resolutor intenta acoplar esquemas conceptuales (Marshall, 1995; Riley, Greeno y Heller, 1983; Sweller, 1988) que son evocados por la situación descrita en el problema. Por ejemplo, cuando en el enunciado de un problema se explicita que hay 59 alumnos en dos aulas, el proceso de análisis exigiría aplicar el llamado *esquema de combinación* (o modificar la situación representada hasta hacerla compatible con otro esquema) que permitiría concluir que la existencia de la relación número de alumnos de un aula más número de alumnos de la otra aula es igual a 59. Por ejemplo, un problema en que se haga referencia a la edad actual y futura de una persona nos evocará *esquemas de cambio* propios del transcurso del tiempo como que la diferencia de la edad de una persona en distintos momentos proporciona el tiempo transcurrido.

De hecho, en el campo de la investigación en educación matemática, es habitual clasificar los problemas verbales de una etapa (los que se resuelven mediante una única operación aritmética) atendiendo al esquema conceptual necesario para resolverlo. Esto es así porque se puede establecer una relación directa entre las características semánticas del enunciado y el esquema conceptual correspondiente (Riley, Greeno y Heller, 1983; Vergnaud, 1983). De esta forma, la habitual clasificación de problemas verbales de una etapa de suma y de resta puede ser sustituida por otra más fina formada por 20 tipos de problemas (Puig y Cerdán, 1988) que además es capaz de explicar las diferencias de dificultad observadas entre problemas que se resuelven mediante una misma operación. Ha habido intentos de clasificar los problemas de más de una etapa atendiendo a esta categorización u otras similares (véase, por ejemplo, Castro *et al.*, 1998; Puig, 1998). Sin embargo, la clasificación de los problemas de más de una etapa no se ha extendido, ya que "la estructura de los problemas de más de una etapa presenta elementos distintos de los semánticos y que son más pertinentes para comprender el proceso de resolución" (Puig y Cerdán, 1988, p. 106).

En nuestro marco teórico, usamos la idea de que el proceso de análisis que se lleva a cabo para resolver un problema puede ser considerado como una combinación de análisis de subproblemas de una etapa y la integramos en el modelo de comprensión y resolución de problemas formulado por Kintsch y Greeno (1985), para la resolución aritmética y generalizado en Nathan, Kintsch y Young (1992) para la resolución algebraica. Durante estos análisis parciales se llevará a cabo la activación a nivel cognitivo de un esquema conceptual para conseguir establecer una relación entre cantidades.

Evidentemente, una escasa habilidad a la hora de identificar alguno de los esquemas conceptuales puede actuar como obstáculo para completar el proceso de resolución. Como consecuencia, este modelo podría explicar los errores de un estudiante en algunos pasos de la resolución de un problema en base al desconocimiento o dificultad a la hora de identificar el esquema conceptual que permitiría identificar una relación entre cantidades. Sin embargo, es posible que, tras una identificación correcta del esquema conceptual, se produzca una formulación incorrecta de la relación o una plasmación incorrecta de la expresión matemática desde una relación correcta. Un ejemplo de esta situación podría darse cuando se comete el error de inversión en los problemas de una etapa en los que se evocan esquemas conceptuales de comparación aditiva o multiplicativa.

ERROR DE INVERSIÓN

El nombre del error de inversión proviene de que ante la tarea "Escribe una ecuación usando las variables E y P para representar el enunciado siguiente: 'Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en esta universidad'. Usa E para el número de estudiantes y P para el número de profesores" (Clement, 1982, p. 17) la mayoría de las respuestas incorrectas fueron $P = 6 \cdot E$, lo que implicaría invertir el orden de las letras frente a la respuesta correcta $E = 6 \cdot P$. Básicamente existen dos explicaciones para este fenómeno (Clement, 1982; Clement, Lochhead y Monk, 1981): la *coincidencia en el orden de las palabras* y la *comparación estática*. En la coincidencia en el orden de las palabras, se plantea como causa una conversión literal de las palabras del enunciado a símbolos matemáticos sin que exista a nivel mental una representación de la situación. Esto supone una traducción lineal del enunciado de izquierda a derecha, término por término, desde el lenguaje natural al algebraico y proporciona una explicación plausible a que ante "Hay *seis* veces tantos *estudiantes* como *profesores*" se dé la respuesta incorrecta $6 \cdot E = P$. En la comparación estática, se parte de que el estudiante comprende que el número de estudiantes es mayor que el de profesores, y hace una representación mental en consecuencia. Sin embargo, en el proceso de conversión al lenguaje del álgebra se limita a expresar esta información mediante un uso idiosincrásico de los símbolos algebraicos. Así, ante la imagen mental de "1 profesor" por cada "6 estudiantes", el resolutor la expresarían mediante $1P = 6S$ y de ahí a $P = 6S$. En este caso, la letra S no estaría siendo considerada como una variable que representa el número de estudiantes, sino como una etiqueta o denominador; mientras que el signo igual representaría una asociación y no una equivalencia.

La mayoría de las investigaciones en el tema han tratado de determinar cuál de los modelos propuestos en Clement (1982) tienen mayor potencial explicativo. Con este fin, en los montajes experimentales se han utilizado cuestionarios en los que se usaban baterías de problemas similares al problema "Estudiantes y Profesores" y en los que se introducían variaciones tanto en las características del enunciado como en la manera de representar la ecuación. Por ejemplo, el hecho de que la comparación estática suponga que los estudiantes usan las letras como etiquetas o abreviaturas del nombre condujo a Rosnick (1981) a diseñar un experimento con el que pretendía determinar la interpretación (como etiquetas o como variable) que hacían los alumnos de las letras en el problema "Profesores y Estudiantes". La investigación se desarrolló sobre una muestra de 152 alumnos universitarios. Se suministró el enunciado "En esta universidad, hay seis veces tantos estudiantes como profesores. Este hecho está representado por la ecuación $S = 6P$" y se les preguntó "En esta ecuación, ¿qué representa la letra P?". La respuesta la debían seleccionar de una colección de ítems "1. Profesores 2. Profesor 3. Número de profesores 4. Ninguna de las anteriores 5. Más de una de las anteriores (si es así, indica cuáles) 6. No lo sé". Los resultados mostraron que más del 40% de los alumnos estudiados fueron incapaces de identificar la letra P con el "número de profesores". Como conclusión el autor planteó la hipótesis de que la mayoría de los estudiantes que creen que P representa "profesor" también pensarán que 6 estudiantes = 1 profesor ($6S = P$).

Otros estudios han pretendido determinar si la familiaridad de la situación descrita favorece la aparición del error de inversión. Wollman (1983) propuso a estudiantes universitarios enunciados análogos estructuralmente a "Profesores y Estudiantes"; pero en los cuales no existía información contextual que pudieran ayudar en la construcción de la ecuación. Así, recurrió a enunciados del tipo "En una clase hay cinco veces tantos chicos como chicas", donde de antemano parece imposible prever si el número de chicos será superior al de chicas. Esto contrasta con la situación ofrecida en el problema "Profesores y Estudiantes", donde se puede utilizar el hecho de que normalmente el número de alumnos es mayor que el de profesores. Este autor encontró que el éxito en la tarea o la aparición del error de inversión no se veía influido por el conocimiento contextual durante la traducción.

En González-Calero, Arnau y Laserna-Belenguer (2015), se realizó un estudio llevado con 235 estudiantes universitarios para determinar cuál de los modelos explicativos era más potente. Los resultados apuntan a que el factor fundamental, aunque no único, sería la coincidencia en el orden de las palabras. De verificarse esta observación esto implicaría que cuando el esquema conceptual está asociado a unas marcas textuales implícitas en el enunciado (veces tantos como, veces más que o veces menos que) se producirían atajos que llevarían del texto a la expresión matemática en una lectura de izquierda a derecha y sin la construcción intermedia de la relación entre las cantidades. Si bien estos resultados fortalecerían la interpretación de la coincidencia del orden de las palabras, hasta la fecha no se han realizado estudios en los que se analice el error de inversión desde la perspectiva de la neuroeducación.

BASES NEURALES ASOCIADAS AL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de resolución de problemas se ha abordado desde perspectivas cognitivas o afectivas. Desde el punto de vista de los factores afectivos se ha analizado la influencia en el éxito de la resolución de las variables independientes motivación, interés, ansiedad, estrés o perseverancia (Charles y Lester, 1982). Los estudios abordados desde la perspectiva cognitiva han intentado relacionar características de la tarea con el éxito en la resolución. Dentro de las características de la tarea se ha estudiado la influencia de la sintaxis del enunciado o de su semántica, así como aspectos relacionados con la complejidad de la estructura matemática del problema. En las distintas investigaciones, tanto de corte cognitivo como afectivo, únicamente se ha conseguido establecer relaciones, en ocasiones débiles, entre variables. Sin embargo, en estos estudios no ha sido habitual tener en cuenta la importancia que tiene el desarrollo cerebral del alumnado en el aprendizaje ni su potencial explicativo para justificar las relaciones causales observadas entre las características de los problemas y su dificultad.

Los estudios sobre el desarrollo cerebral han incrementado nuestro conocimiento sobre la maduración del cerebro humano (Blakemore, 2012). En particular, los estudios con imágenes de Resonancia Magnética (RM) estructurales revelan un aumento de volumen de Sustancia Blanca (SB) durante la infancia y la adolescencia lo que sugiere un aumento de la conectividad en el cerebro en desarrollo (Giedd y Rapoport, 2010) y, en consecuencia, el decremento en Sustancia Gris (SG) en las distintas áreas cerebrales; este proceso es el que se conoce como maduración cerebral. Así, el volumen de SG se caracteriza, durante el desarrollo, por la forma de una U invertida que alcanza su punto máximo a diferentes edades en diferentes regiones cerebrales (Blakemore, 2012; Giedd *et al.*, 1999), lo que sugiere una trayectoria heterogénea y no lineal donde las competencias maduran con distintas velocidades y tiempos dependiendo de las regiones del cerebro que son más importantes para una habilidad dada. Por ejemplo, es conocido que el sentido intuitivo del número, o lo que conocemos como sentido numérico, es una habilidad temprana, que puede ser observado en bebes, y que permite predecir su competencia matemática para una edad más avanzada (Starr, Libertus y Brannon, 2013). Estudios realizados en bebés ya han observado que son capaces de distinguir hasta colecciones de 3 elementos en los primeros meses de vida (Izard, Dehaene-Lambertz y Dehaene, 2008; Nieder y Miller 2004; Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan y Dehaene, 2004). No obstante, este sentido numérico básico no explica la complejidad del conocimiento matemático en los adultos, de manera que la mayor parte de los conocimientos y habilidades se desarrollan en la escolarización y con la participación del lenguaje.

Además, los estudios de imágenes de RM estructurales y funcionales proporcionan una visión relevante para la educación matemática. Por ejemplo, un estudio del desarrollo utilizando RM funcional con una tarea de cálculo aritmético (adición y sustracción) ha demostrado que el patrón de activación cerebral cambia con la edad del estudiante (Rivera, Reiss, Eckert y Menon 2005). Es importante destacar que estos cambios relacionados con la edad se asociaron con la maduración funcional en lugar de alteraciones en la densidad de SG. Además, los estudios de RM funcional nos pueden ayudar a dilucidar el papel que desempeñan regiones cerebrales específicas durante el procesamiento matemático. Por ejemplo, se ha sugerido que la comprensión intuitiva de las cantidades está asociada con la actividad en el surco intraparietal (Dehaene, 1997) y, en general, la corteza parietal participa en diversas tareas matemáticas desde la comparación numérica al procesamiento más complejo como proporciones o razonamiento deductivo (Kroger, Nystrom, Cohen y Johnson-Laird, 2008; Vecchiato *et al.*, 2013). No obstante, se necesitan más estudios adicionales para establecer los vínculos existentes entre el desarrollo de las estructuras cerebrales y su maduración funcional.

Muchos estudios de neuroimagen se han centrado en el desarrollo de habilidades aritméticas en niños y adultos (para revisión véase Zamarian, Ischebeck y Delazer, 2009). De nuevo, se muestra que diferentes partes de la corteza parietal, tales como el surco intraparietal bilateral y el giro angular izquierdo, tienen un papel crucial en el cálculo mental (De Smedt, Holloway y Ansari, 2011). Por el contrario, otras áreas cerebrales que parecen madurar relativamente más tarde, tales como las áreas prefrontales, se cree que están involucradas en la cognición matemática y otros procesos de orden superior que se desarrollan a lo largo de la infancia y la adolescencia (Blakemore, 2012). Tal percepción podría arrojar algo de luz sobre la transición desde la aritmética concreta hasta el lenguaje simbólico del álgebra, donde los estudiantes tienen que desarrollar habilidades de razonamiento abstracto que les permitan generalizar, modelizar y analizar ecuaciones matemáticas y teoremas (Anderson, Fincham, Qin y Stocco, 2008; Lee *et al.*, 2007; Qin *et al.*, 2004;). En esta línea, un estudio longitudinal utilizando RM funcional con adolescentes y adultos durante la práctica de resolución de problemas verbales (Qin *et al.*, 2004), muestra que después de la práctica tanto los adultos como los adolescentes tienen una reducción de áreas prefrontales. Sin embargo, solo en adolescentes se produce una reducción de activación en áreas parietales y un incremento en el putamen, asociado con la planificación de respuesta. El aumento de activación en el putamen apoya la idea de que los adolescentes podrían necesitar un mayor esfuerzo para realizar cálculos complejos, apoyándose en las regiones del cerebro que no son necesarias en el desempeño de adultos. Esto sugiere que la respuesta cerebral de los adolescentes es más plástica y se produce un mayor cambio con la práctica. Además, el estudio de desarrollo cerebral de Wierenga *et al.* (2014) muestra que el volumen de SG del putamen decrementa con la edad, mostrándose todavía en proceso de maduración durante la adolescencia. También, debemos de observar que las regiones prefrontal, parietal y putamen todavía están madurando durante la adolescencia (Blakemore, 2012; Gogtay *et al.*, 2004; Sowell y Jernigan, 1998). Por tanto, es importante investigar no solo aquellas áreas cerebrales involucradas en la aritmética básica sino avanzar en el estudio de tareas matemáticas más complejas que nos ayuden a vislumbrar cuáles son los procesos cerebrales que nos ayudan a resolver por ejemplo los problemas aritmético-algebraicos.

Varios estudios de neurociencia con adultos, si bien escasos todavía, han examinado los procesos usados para la resolución problemas verbales y cómo son adquiridos tales procesos. Lee *et al.* (2007) en un estudio durante la traducción de enunciado del problema verbal a ecuación, encontraron activación en áreas cerebrales de la corteza prefrontal y parietal asociadas con la memoria de trabajo y procesos atencionales. La activación de estas áreas irían en la línea de los módulos que propone Anderson *et al.* (2008) durante el proceso de resolución de problemas verbales: un módulo visual asociado con el giro fusiforme que extrae información sobre la ecuación, un módulo “de imágenes” localizado en la corteza parietal que participa en la representación de la ecuación y la transformación en ecuación y, un módulo responsable de la recuperación de las reglas algebraicas, previamente aprendidas, asociado con la corteza prefrontal. Este modelo es importante ya que nos puede ayudar a idear métodos para realizar un seguimiento de los estados mentales durante la resolución de problemas aritmético-algebraicos (Anderson, Betts, Ferris y Fincham, 2012).

OBJETIVOS

Partiendo de la base de que existe un conocimiento muy escaso sobre si el error de inversión puede estar originado en los procesos de enseñanza-aprendizaje que experimentan los estudiantes o sobre los procesos cerebrales ligados a la comisión del error de inversión, nos planteamos la siguiente cuestión: ¿por qué hay un número tan elevado de estudiantes de secundaria y universidad, supuestamente competentes en la resolución algebraica de problemas verbales, que aun así cometen errores de inversión?

A la hora de abordar esta problemática planteamos hacerlo desde una óptica relativamente innovadora, dado que hasta la fecha los estudios de RM funcional con tarea para la resolución de problemas verbales son escasos. El conocimiento de las bases neurales asociadas a la resolución de estos problemas podría ser útil a la hora de comprender las posibles relaciones entre el grado de desarrollo cerebral del resolutor y las dificultades que manifiesta en la resolución de problemas verbales. De este modo, se establece una nueva vía de investigación entre el campo de la educación y la neurociencia: la neuroeducación. Resultados relevantes en relación con el error de inversión podrían ilustrar en qué medida el campo de la neuroeducación puede tener un impacto en la educación matemática proporcionando información sobre, por ejemplo, qué currículo matemático se debe proponer y a qué edad nuestro cerebro está capacitado para asumir los conocimientos de dicho currículo, o qué tipos de intervenciones educativas fomentan un mejor aprendizaje matemático.

Así, el objetivo de esta investigación es estudiar los procesos cerebrales funcionales que llevan a cometer el error de inversión, estudiando las áreas involucradas en este proceso durante la realización de la tarea dentro de la máquina de RM. En este manuscrito nos limitaremos a ofrecer la base teórica sobre la que se apoya el estudio y el diseño del montaje experimental.

METODOLOGÍA

Participantes

La muestra de este estudio la formarán un mínimo de 40 participantes universitarios, con un rango de edad entre 18 y 25 años, que no difieren en género, años de escolarización ni inteligencia. Además, se tendrá en cuenta los siguientes criterios de exclusión: presencia de enfermedad neurológica y médica grave, traumatismo con pérdida de consciencia de más de una hora, a parte de los criterios típicos de exclusión para resonancia (p.ej., prótesis ferromagnéticas, claustrofobia, etc.).

Instrumentos de evaluación

Todos los participantes serán sometidos a una valoración neuropsicológica utilizando la Escala de Inteligencia para Adultos de Wechsler (WAIS III) incluyendo en la valoración las pruebas de Matrices, para la evaluación del razonamiento perceptivo y la pruebas de Dígitos, tanto Directos como Inversos y Letras y Números para la evaluación de la memoria de trabajo. Después de la adquisición de las imágenes de RM y con el fin de recoger los datos de error de inversión se utilizará la aplicación informática (González-Calero, Arnau, Laserna-Belenguer, 2015, figura 1), en la que se deben construir las ecuaciones de los enunciados proporcionados. Los problemas que se enuncian están formados por una colección de 16 ítems (2 x 2 x 2 x 2) atendiendo a: 1) las comparaciones son multiplicativas o aditivas; 2) las comparaciones son crecientes (veces más que, más que) o decrecientes (veces menos que, menos que); 3) presencia o no de pistas contextuales que permitan determinar qué cantidad es mayor; 4) las cantidades que se relacionan son continuas o discretas. La incidencia del error de inversión dividirá la muestra en dos grupos: los que no cometan error de inversión y los que realizan más del 50% de error de inversión. Obteniendo de esta forma, y teniendo en cuenta los aciertos y errores realizados dentro de RM (ver apartado siguiente), los dos grupos a estudio.

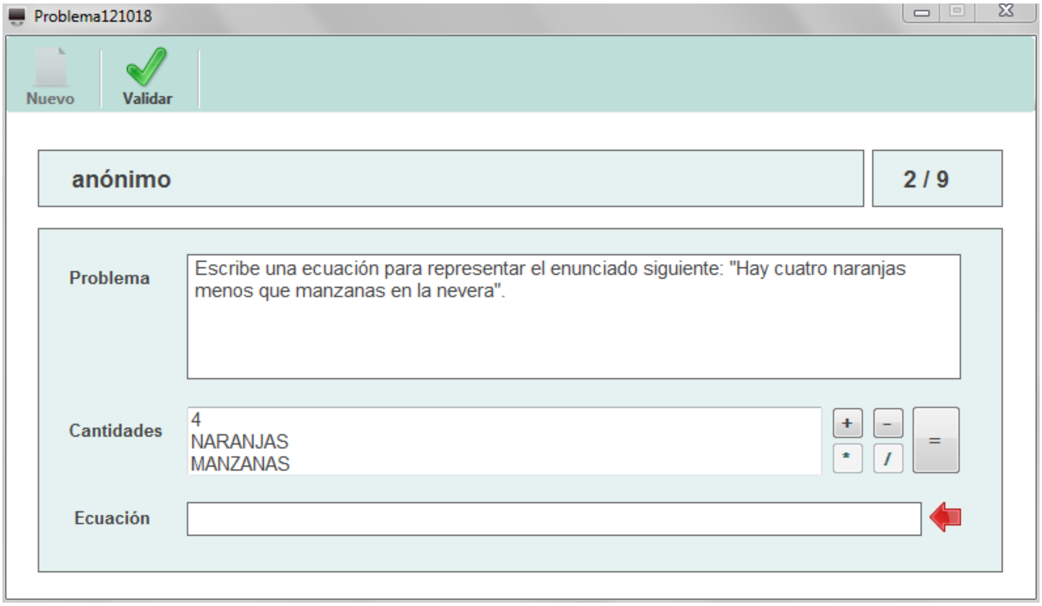

Figura 1. Aplicación implementada para la recogida de datos en los estudios sobre el error de inversión (González-Calero *et al.*, 2015)

Metodología de Neuroimagen

La adquisición de las imágenes de RM funcional será llevada a cabo en un escáner Philips con una inducción magnética de 3 T. El programa utilizado para el procesado y análisis estadístico de las imágenes funcionales de RM será fundamentalmente el SPM v.12 (Wellcome Trust Centre for Neuroimaging, Londres, UK). La programación de la tarea incluyendo la presentación de los estímulos y el registro de respuestas son controlados desde un ordenador PC mediante el programa E-Prime 3.0 (Psychology Software Tools, Pittsburgh, PA). La presentación de estímulos visuales y recogida de respuesta se realiza por el equipo *Visuastim* digital (Resonance Technologies, Inc) mediante un sistema de gafas y de manoplas compatibles con la RM, respectivamente. Por último, para la sincronización entre el escáner y la presentación de estímulos se utiliza un equipo *SyncBox (Nordic Neurolab*).

Tarea para RM funcional

La tarea de resolución de problemas es mostrada de forma visual dentro de la máquina de RM. Esta tarea está formada por dos condiciones: control (donde el enunciado no supone ningún error de inversión) y experimental (enunciados que pueden conllevan al error de inversión). Los enunciados de los problemas se presentan en ocho bloques alternando la condición de control y la experimental, y en cada bloque se presentan tres enunciados de la condición correspondiente. Para la creación de los enunciados de los problemas de la tarea se han utilizado ocho ítems (2 x 2 x 2): 1) comparaciones multiplicativas o aditivas; 2) comparaciones crecientes o decrecientes; 3) presencia o no de pistas contextuales que permitan determinar qué cantidad es mayor. Los enunciados tienen una presencia en pantalla de 8s cada uno. A continuación, se presenta la solución expresada como ecuación en la que los participantes deben responder si la solución presentada es correcta o incorrecta, mediante la utilización de las manoplas. Para evitar la activación motora cerebral debida a la respuesta manual, el 50% de los participantes indican la respuesta correcta pulsando con el pulgar derecho e incorrecta con el pulgar izquierdo, la otra mitad indican su respuesta con el pulgar izquierdo y derecho, respectivamente. Para validar la solución los participantes disponen de 3s (figura 2).

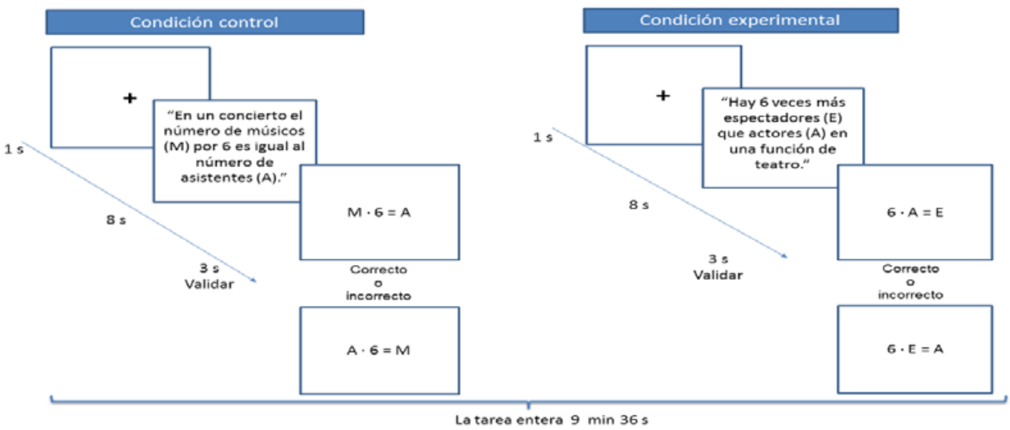

Figura 2. Diseño de la tarea que se realiza dentro del escáner de RM

RESULTADOS ESPERADOS

La hipótesis de partida de este estudio es que las técnicas de neuroimagen serán útiles para comprender los procesos cerebrales producidos durante la resolución de problemas verbales y, más concretamente, en el error de inversión. De igual manera, se pretende dilucidar las áreas subyacentes a las diferencias individuales entre los participantes que comenten más de un 50% de error de inversión y aquellos que no cometen error de inversión.

Basándonos en el estudio de Lee *et al.* (2007) y Quin *et al.* (2004), esperamos encontrar diferencias entre los grupos en los procesos cerebrales utilizados para la realización de los problemas de la tarea en la corteza prefrontal y parietal asociado con la memoria de trabajo, funciones atencionales y módulo numérico, así como en los ganglios basales, específicamente en el putamen asociado con la memoria implícita y la planificación de la respuesta.

También debemos de considerar que el uso de imágenes de RM funcional impone ciertas restricciones sobre la resolución de la tarea. Una de ellas sería que los participantes tienen un tiempo limitado para contestar. Esto podría traducirse en un número superior de *reversals* que en un entorno de lápiz y papel pues, tal y como se apunta explícitamente en trabajos como Wollman (1983) o Pawley *et al.* (2005), la validación de la ecuación propuesta es un paso que habitualmente acometen resolutores competentes y que puede hacer que determinados participantes corrijan errores de inversión a posteriori. Sin embargo, en nuestra investigación la restricción del tiempo de resolución de la tarea se alinea con el propósito de determinar qué procesos neuronales se articulan en el proceso de construcción de la ecuación, y no tanto en procesos de monitorización post-hoc.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, J. R., Betts, S., Ferris, J. L., y Fincham, J. M. (2012). Tracking children's mental states while solving algebra equations. *Hum. Brain Mapp. 33*, 2650–2665. doi: 10.1002/hbm.21391

Anderson, J. R., Fincham, J. M., Qin, Y., y Stocco, A. (2008). A central circuit of the mind. *Trends Cogn. Sci.* 12, 136–143.

Blakemore, S. J. (2012). Imaging brain development: the adolescent brain. *Neuroimage 61*, 397–406. doi: 10.1016/j.neuroimage.2011.11.080

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, A., ... Fernández, F. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M.

Sierra (Eds.), *Actas del Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 63-76). Zamora: SEIEM.

Charles, R., y Lester, F. (1982) Teaching problem solving. What, Why, How. Palo alto, CA: Dale seymour Pu.

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16–30.

Clement, J., Lochhead, J., y Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly, 88*(4), 286–290. doi:10.1080/17470211003787619

De Smedt, B., Holloway, I. D., y Ansari, D. (2011). Effects of problem size and arithmetic operation on brain activation during calculation in children with varying levels of arithmetical fluency. *NeuroImage*, *57*(3), 771–781.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense*. NewYork, NY: Oxford University Press.

Giedd, J. N., Blumenthal, J., Jeffries, N. O., Castellanos, F. X., Liu, H., Zijdenbos, A.,... Rapoport, J.L. (1999). Brain development during childhood and adolescence: a longitudinal MRI study. *Nat.Neurosci. 2*, 861–863. doi: 10.1038/13158

Giedd, J. N., y Rapoport, J. L. (2010). Structural MRI of Pediatric Brain Development: What Have We Learned and Where Are We Going? *Neuron, 67*(5), 728–734.

Gogtay, N., Giedd, J.N., Lusk, L., Hayashi, K.M., Greenstein, D., Vaituzis, A.C.,... Thompson P.M. (2004) Dynamic mapping of human cortical development during childhood through early adulthood. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. *101*, 8174–8179

González-Calero, J. A., Arnau, D., y Laserna-Belenguer, B. (2015). Influence of additive and multiplicative structure and direction of comparison on the reversal error. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 133-147.

Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 87* (7), 519-524.

Izard, V., Dehaene-Lambertz, G., y Dehaene, S. (2008) Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. *PLoS Biol 6*,e11.

Kintsch, W., y Greeno, J. G. (1985). Understanding and Solving Word Arithmetic Problems. *Psychological Review, 92*(1), 109–129.

Kroger, J. K., Nystrom, L. E., Cohen, J. D., y Johnson-Laird, P. N. (2008). Distinct neural substrates for deductive and mathematical processing. *Brain Res., 1243*, 86–103. doi:10.1016/j.brainres.2008.07.128

Lee, K., Lim, Z. Y., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V., y Chee, M. W. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: neuroanatomical correlates. *Brain Res., 1155*, 163–171.

Lopez-Real, F. (1995). How important is the reversal error in algebra? En S. Flavel *et al.* (Eds.), *GALTHA (Proceedings of the 18th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 390–396). Darwin, Australia: MERGA.

MacGregor, M., y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 217-232.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

Nathan, M. J., Kintsch, W., y Young, E. (1992). A Theory of Algebra-Word-Problem Comprehension and Its Implications for the Design of Learning Environments. *Cognition and Instruction*, *9*(4), 329–389.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Nieder, A. y Miller, E.K. (2004) A parieto-frontal network for visual numerical information in the monkey. *Proc Natl Acad Sci U S A, 101(19)*,7457-7462.

OECD (2014a), PISA 2012 *Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V).* PISA, OECD Publishing.

OECD (2014b). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I)*. PISA, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264201118-en

Pawley, D., Ayres, P., Cooper, M., y Sweller, J. (2005). Translating words into equations: a cognitive load theory approach. *Educational Psychology, 25*(1), 75-97.

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., y Dehaene, S. (2004) Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron, 44*, 547-555.

Psychology Software Tools, Inc. [E-Prime 3.0]. (2016). Retrieved from https://www.pstnet.com.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

Puig, L. (1998). La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora. En *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp. 63–75). Bogotá: una empresa docente.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Qin, Y., Carter, C. S., Silk, E. M., Stenger, V. A., Fissell, K., Goode, A.,...Anderson, J.R (2004) The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving. Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 101, 5686–5691

Riley, M. S., Greeno, J. G., y Heller, J. L. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Rivera, S. M., Reiss, A. L., Eckert, M. A., y Menon, V. (2005). Developmental changes in-mental arithmetic: evidence for increased functional specialization in the left inferior parietal cortex. *Cereb. Cortex, 15*, 1779–1790. doi: 10.1093/cercor/bhi055

Rosnick, P. (1981). Some Misconceptions concerning the Concept of Variable. *Mathematics Teacher, 74*(6), 418-420.

Sowell, E. R., y Jernigan, T.L. (1998) Further MRI evidence of late brain maturation: limbic volume increases and changing asymmetries during childhood and adolescence. *Dev. Neuropsychol. 14*, 599–617

Starr, A., Libertus, M. E., y Brannon, E. M. (2013). Number sense in infancy predicts mathematical abilities in childhood. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 110*, 18116–18120. doi: 0.1073/pnas.1302751110

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*(2), 257-285.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Weber, K., y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En A. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 353–382). Rotterdam: Sense Publishers.

Wierenga L, Langen M, Ambrosino S, van Dijk S, Oranje B y Durston S. (2014). Typical development of basal ganglia, hippocampus, amygdala and cerebellum from age 7 to 24. Neuroimage, *96*, 67-72.

Wollman, W. (1983). Determining the Sources of Error in a Translation from Sentence to Equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(3), 169-181.

Zamarian, L., Ischebeck, A., y Delazer, M. (2009). Neuroscience of learning arithmetic—Evidence from brain imaging studies. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, *33*(6), 909–925.