

UN ESTUDIO EXPERIMENTAL DE LAS VARIABLES EN LOS PROBLEMAS ELEMENTALES DE PROBABILIDAD

Juan Jesús Ortiz de Haro

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

RESUMEN

En este estudio analizamos los ejercicios y ejemplos de probabilidad presentados en una muestra de libros de texto de bachillerato publicados entre 1975-1991, las variables de tarea de los mismos y comparamos su distribución en dos textos. Nuestra intención es mostrar algunas características generales de los ejercicios y ejemplos presentados en los libros de texto similares a los analizados, que podrían influir en el significado de la probabilidad presentado al estudiante y que pueden servir para el análisis de otros libros de texto y en la construcción de materiales curriculares.

ABSTRACT

This article deals with the essay that we have made where we analyse the probability exercises in a sample set of books for bachillerato published between 1975 and 1991. We also examine the variables that they present and we compare their distribution in two textbooks. Our intention is to show some of the general characteristics of the exercises and examples in textbooks similar to the ones analysed, which might have an influence in the meaning of probability presented to the student. Likewise, this essay can be of help for the analysis of other textbooks and to elaborate curriculum materials.

1. INTRODUCCIÓN

Usualmente, los libros de texto, además de presentar el desarrollo teórico de cada tema, contienen ejemplos de los conceptos y propiedades, ejemplos de problemas resueltos y colecciones de actividades prácticas para ser propuestas a los alumnos, que suelen englobarse en uno o varios apartados dentro de cada tema, bajo la denominación de «problemas», «ejercicios», «cuestiones» o «actividades». En este trabajo emplearemos conscientemente la palabra «ejercicio» para referirnos a cualquiera de estas últimas actividades.

El fin pretendido con los ejercicios es principalmente el refuerzo del aprendizaje. El interés del estudio de los propuestos en los manuales escolares se deduce del hecho indudable que la facilidad de un estudiante para resolver problemas depende de la forma en que tuvo lugar la adquisición de destrezas así como el conocimiento requerido en este aprendizaje inicial. Al realizar un análisis de los manuales escolares, es preciso tener en cuenta, que, como indican Robert y Robinet (1989), los profesores no siempre asignan a sus alumnos todos los ejercicios de los manuales y con frecuencia añaden otros no contemplados en los libros de texto. Por ello, en un análisis «fuera de clase» sólo podemos obtener una idea parcial de las consecuencias de los ejercicios sobre los aprendizajes.

Dentro de las investigaciones sobre resolución de problemas, uno de los puntos esenciales ha sido la definición de variables sobre los mismos. Kilpatrick (1978) diferencia tres aspectos básicos relacionados con la resolución de problemas: el problema presentado; el sujeto y la situación de resolución. Para cada uno de ellos propone una categorización de las variables usadas en la investigación sobre resolución de problemas: variables de tarea; variables del sujeto y variables de la situación. Además divide las variables de tarea en variables de contexto, variables de estructura y variables de formato.

Goldin y McClintock (1980) definen a su vez cuatro categorías de variables de tarea: variables de sintaxis; variables de contenido y contexto; variables de estructura y variables de conducta heurística. Estas variables son relacionadas con las fases de Polya (1957) para resolver problemas: comprender el problema; idear un plan; llevarlo a cabo y revisar el plan de resolución y la solución hallada. Según estos investigadores las variables de sintaxis, contenido y contexto están ligadas a la comprensión del problema; las variables de estructura están ligadas a la puesta en

marcha del plan de resolución y las variables de conducta heurística al diseño del plan y a su revisión retrospectiva.

Para González (1993), las variables de sintaxis, contenido, contexto y estructura definen en gran medida las características esenciales de los problemas verbales y pueden observarse directamente del análisis del enunciado del problema. La última categoría - variables de conducta heurística - se deducen de la actuación del resolutor. Sin embargo, en los ejemplos y ejercicios resueltos en los libros de texto pueden estudiarse este tipo de variables, a partir de la solución presentada por el autor.

La importancia de la descripción de las variables en los problemas escolares es subrayada por Puig y Cerdán (1988). En la escuela los problemas se proponen, se enuncian o se presentan enunciados y se resuelven. Así que, situados ahora en el ambiente escolar, si queremos saber qué entendemos por un problema, habrá que descubrir las características de su enunciado y su resolución.

De la clasificación dada por Kilpatrick (1978) a las variables que se pueden considerar en la resolución de problemas, revisten un interés particular para nuestro estudio las que denomina variables de tarea. Se utiliza el término tarea porque se plantea para estudiar lo que los sujetos hacen y no con finalidades de enseñanza, y, por tanto, está aislada, sin relación con ninguna Situación o secuencia de aprendizaje. Es decir, son aquellas características del problema mismo que pueden hacer variar las conductas del resolutor e influir de modo más o menos acusado en el logro de la solución.

Webb (1984) indica que las variables de contenido están relacionadas con la información matemática dentro del problema y las variables de contexto describen la «forma» del problema, es decir, su marco de presentación. Entre las variables de contenido que se han mostrado su influencia en la dificultad del problema se han descrito la complejidad sintáctica, la existencia de información no necesaria (Carpenter y cols., 1980; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981) ya que los estudiantes tienden a incorporar en el problema todos los datos presentados, incluso aunque no sean necesarios.

En los apartados que siguen presentamos una clasificación teórica de los ejercicios de probabilidad en los libros de texto, y un estudio empírico de la frecuencia de aparición de distintas variables de tarea en dos de dichos manuales.

2. METODOLOGÍA

Un primer fin de nuestro análisis es analizar teóricamente y comprobar experimentalmente si en los libros estudiados se contemplan todos los tipos más importantes de actividades que serían deseables en este nivel de enseñanza. Queremos también analizar algunas variables de tarea de estos ejemplos y ejercicios desde el punto de vista teórico, justificando su interés en el aprendizaje de la probabilidad.

Trataremos de detectar diferencias importantes, desde el punto de vista didáctico, sobre los ejercicios y ejemplos propuestos en los diferentes manuales escolares, así como obtener una parrilla de análisis de los ejemplos y ejercicios de probabilidad que guíe el desarrollo curricular y la práctica de la evaluación sobre este tema en la enseñanza secundaria obligatoria.

Libros analizados

Se ha realizado un estudio estadístico detallado del total de ejercicios incluidos en dos libros de texto, elegidos a partir de un análisis previo de una muestra de 11 libros que se analizó respecto a su contenido teórico y el lenguaje analizado (Ortiz, 1999). También se realizó un análisis global más superficial de los problemas y ejercicios, que ha servido también para identificar los tipos de actividades propuestas en los manuales, así como para seleccionar los dos textos que en lo sucesivo denominaremos [A] y [B]. El texto [B] (Guzmán, M., Colera, J. y Salvador, A. (1988). Matemáticas, Bachillerato 1º, Madrid: Alhambra) se ha elegido porque en nuestro análisis teórico (Ortiz, 1999), fue el que mostró mayor riqueza conceptual, ofreciendo, desde nuestro punto de vista un significado muy completo de los conceptos probabilísticos elementales al alumno. Además la metodología seguida en este libro es predominantemente práctica, con una gran variedad de ejemplos y ejercicios, lo que lo hace especialmente adecuado para un análisis de las actividades propuestas. Elegimos también el texto [A] (Valdés, J. y Marsinyach, S. (1975). Matemáticas, Bachillerato, 1º. Madrid: Bruño), por presentar un enfoque mucho más estructuralista y una metodología basada, casi exclusivamente en el esquema teoría-práctica.

3. ACTIVIDADES EN LOS LIBROS DE TEXTO

Puesto que los libros, a veces, bajo una misma numeración presentan varios ejercicios independientes, se ha dividido cada uno en tantas unidades de análisis

como apartados tenía, resultando un total de doscientos sesenta y cinco ejercicios o ejemplos que se han analizado identificado las variables a analizar.

Se consideró que se trataba de un problema verbal, si el problema incluía una narrativa a partir de la cual el estudiante debe extraer la información relevante y seleccionar los algoritmos o estrategias apropiados para su resolución y no se incluye explícitamente las indicaciones de los pasos a seguir en la solución. En caso de que el problema se presentase resuelto o que se indicasen los pasos para su resolución y también aquellos casos en que realmente no se plantease al alumno un verdadero problema, se consideró como un ejemplo.

En primer lugar hemos analizado la distribución en los libros de los ejemplos y actividades y si se trata de un ejemplo o ejercicio introductorio, o un ejemplo o ejercicio posterior a la definición. Esta diferencia nos parece importante, pues en caso de que el ejercicio se introduzca antes del estudio teórico del concepto representaría para el alumno un verdadero problema, mientras que si se presenta después de las definiciones, se trataría más bien de un ejercicio de aplicación. Además, si en un libro de texto se da una proporción importante de ejercicios antes del estudio teórico, indicaría una posición más constructivista del libro y en caso contrario indicaría una orientación teoría-práctica.

Hemos tomado como un caso especial aquél en el que, aunque el ejercicio es introductorio se presenta después de haber incluido un ejemplo similar completamente resuelto. En este caso no se trataría de un verdadero problema para el alumno, puesto que éste puede copiar el método de resolución empleado en el ejemplo previo. Finalmente, hemos encontrado el caso de ejercicios dirigidos, en los que el autor indica al alumno los pasos a seguir en la solución, por lo que estaríamos en el caso anterior.

Respecto a los ejemplos, una presencia alta de éstos antes de introducir la definición indica que el autor utiliza los ejemplos para que el alumno se familiarice con el concepto que se trata de introducir, para, progresivamente dar paso a la definición formal del mismo y suavizaría algo la orientación teoría-práctica.

Tipo de actividad	Libro [A]	Libro [B]	Total
1. Ejemplo introductorio	35 (38,46)	25 (14,36)	60 (22,64)
2. Ejemplo posterior definición	19 (20,88)	19 (10,91)	38 (14,33)
3. Ejercicio introductorio	2 (2,20)	19 (10,91)	21 (7,92)
4. Ejercicio posterior definición	34 (37,36)	101 (58,04)	136 (50,94)
5. Ejercicio posterior a un ejemplo	0 (0)	9 (5,17)	9 (3,39)
6. Ejercicio dirigido	1 (1,10)	1 (0,57)	2 (0,75)
Total	91 (34,21)	174 (65,66)	265 (100,00)

Tabla 1. Frecuencia y (porcentaje) del tipo de actividad por libro

De acuerdo con la tabla 1, lo más frecuente entre las actividades analizadas son los ejercicios después de la definición (tipo 4), que representan más de la mitad del total de actividades en los libros analizados, por lo que deducimos que el enfoque de enseñanza en estos libros sigue predominantemente el esquema teoría-práctica. Es también importante la presencia de ejemplos introductorios de los conceptos, lo que supondría un apoyo para el alumno en la comprensión de dichos conceptos. También podemos observar que hay diferencias importantes entre los dos libros. En el libro [B] es mayor la cantidad de ejercicios antes de introducir una definición, es decir, que se trataría de verdaderos problemas, lo que señala a un influjo mayor de las tendencias constructivistas en estos autores. Tanto el número absoluto de ejemplos, como su proporción respecto al total de ejemplos y ejercicios es mayor dentro del texto [A], que usa los ejemplos introductorios para mostrar un ejemplo particular antes de introducir la definición.

No obstante, el número total de ejercicios es muy superior en el libro [B], lo que indica en este libro una mayor orientación al enfoque basado en resolución de problemas por parte del alumno y la mayor importancia dada a las aplicaciones, frente al aspecto teórico.

4. CONCEPTOS IMPLÍCITOS

La segunda variable analizada ha sido el concepto sobre el que trata el ejemplo o ejercicio. El estudio de esta distribución nos da una idea de los conceptos a los que

los autores prestan mayor atención por considerarlos más relevantes o más difíciles para el alumno.

En la tabla 2 se presentan los resultados, donde aparecen los textos analizados y los ejercicios y ejemplos relacionados con los conceptos siguientes: Experimento aleatorio, espacio muestral, sucesos y operaciones, frecuencia relativa, probabilidad, probabilidad condicional, dependencia e independencia, experimento compuesto y variable aleatoria.

De esta tabla deducimos que los conceptos más frecuentes son el experimento compuesto, la probabilidad y las frecuencias relativas, aunque también las operaciones con sucesos aparecen, así como la variable aleatoria. Hay que tener en cuenta que los ejercicios sobre operaciones con sucesos no son realmente “probabilísticos”. Hay pocos ejercicios sobre espacio muestral, experimento aleatorio, probabilidad condicional, dependencia e independencia, conceptos todos ellos básicos y que merecían mayor atención dentro de los libros. Hawkins y cols. (1992) indican que el experimento aleatorio es uno de los conceptos básicos en estadística y que los libros de texto no le dedican la atención que se debiera, lo que se muestra también en nuestro caso.

Conceptos	Libro [A]	Libro [B]	Total
1. Experimento aleatorio	4 (4,40)	2 (1,14)	6 (2,26)
2. Espacio muestral	8 (8,79)	1 (0,57)	9 (3,39)
3. Sucesos y operaciones	21 (23,08)	7 (4,02)	28 (10,56)
4. Frecuencia relativa	7 (7,69)	38 (21,83)	45 (16,98)
5. Probabilidad	15 (16,48)	52 (29,88)	67 (25,28)
6. Probabilidad condicional	4 (4,40)	0 (0)	4 (1,50)
7. Dependencia/Independencia	4 (4,40)	2 (1,14)	6 (2,26)
8. Experimento compuesto	22 (24,18)	55 (31,60)	77 (29,05)
9. Variable aleatoria	6 (6,59)	17 (9,77)	23 (8,67)
Total	91 (34,21)	174 (65,66)	265 (100,00)

Tabla 2. Frecuencia y (porcentaje) de la distribución de conceptos en los ejemplos y ejercicios por libro

Respecto al concepto de independencia, numerosos autores como Steinbring (1986) y Truran y Truran (1997) han señalado la dificultad de comprensión de este concepto, que es mayor precisamente desde el punto de vista de su aplicación, que desde el punto de vista teórico. Por ello creemos que los libros de texto debieran dedicar mayor proporción de ejercicios a este punto, donde se mostrara al alumno ejemplos de experimentos dependientes e independientes. Sin embargo, el alumno debe discriminar entre experimentos dependientes e independientes para resolver los problemas de cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, ya que la fórmula del producto es diferente en cada uno de estos casos. Por ello es posible que el profesor en clase realice este tipo de ejercicios con los alumnos aunque explícitamente no se contemplan apenas en los textos analizados.

Observamos que el libro [B] tiene mayor proporción de ejemplos y ejercicios de frecuencia relativa, probabilidad y experimentos compuestos, mientras que el texto [A] tiene mayor proporción de espacio muestral, sucesos y operaciones. Ello es una indicación de que el libro [A] se adaptaba más al enfoque predominante al principio del período de la matemática moderna, en el que la teoría de conjuntos se intentaba ejemplificar en las diferentes ramas de las matemáticas. La probabilidad no fue una excepción y las operaciones con sucesos proporcionaron un excelente ejemplo de aplicación de los conceptos abstractos de operaciones conjuntistas. Además este ejemplo tenía una aplicación inmediata, al servir posteriormente de herramienta en el cálculo de probabilidades. En el texto [B] esta influencia ha dejado de tener impacto, dando un mayor peso al cálculo con frecuencias y probabilidades, sin prestar apenas atención al álgebra de sucesos.

5. TIPO DE ESPACIO MUESTRAL

Hemos considerado de interés analizar el tipo de espacio muestral del experimento aleatorio que interviene en las situaciones propuestas al alumno, diferenciando entre espacio muestral infinito, finito, con dos elementos equiprobables; finito, con más de dos elementos equiprobables, finito, con sucesos no equiprobables, e impreciso.

1. Espacio muestral infinito: Este tipo de espacio muestral puede ser difícil para el alumno. En primer lugar, no le es posible describir todos los elementos del mismo por extensión, por lo cual su definición debe darse por comprensión. Además, el hecho de que la probabilidad de los sucesos elementales sea nula, a pesar de que se trate de sucesos no imposibles puede ser contradictorio. Otras dificultades conceptuales están relacionadas con el continuo.

2. *Espacio muestral finito, con dos elementos equiprobables*: Es el tipo más simple de experimento aleatorio. El alumno puede concebir claramente los casos favorables y desfavorables y la equiprobabilidad coincide con su intuición, ya que autores como Lecoutre y Durand (1988) o Batanero, Serrano y Garfield (1996), han descrito la tendencia de los alumnos a considerar todos los sucesos como equiprobables. En este tipo de espacios muestrales el alumno puede aplicar con facilidad la regla de Laplace, puesto que se cumple el principio de indiferencia.

3. *Espacio muestral finito, con más de dos elementos equiprobables*. En este espacio muestral el alumno puede tener mayor dificultad para diferenciar los casos favorables y desfavorables que en el anterior. Sin embargo, la equiprobabilidad coincide también con su intuición, y el alumno puede aplicar con facilidad la regla de Laplace, puesto que se cumple el principio de indiferencia.

4. *Espacio muestral finito, con sucesos no equiprobables*: No es posible en este caso aplicar el principio de indiferencia y además, choca contra la intuición del alumno quien debe resolver el problema, bien por métodos combinatorios o por asignación de probabilidades frecuenciales.

5. *Impreciso*. Hemos incluido esta categoría, porque en algunos problemas, el espacio muestral no se llega a precisar con claridad, por ejemplo, cuando se trata de un ejercicio en que se piden demostrar algunas propiedades de la probabilidad o de la frecuencia relativa, sin hacer referencia a espacios muestrales concretos.

Espacio muestral	Libro [A]	Libro [B]	Total
Infinito	1 (1,10)	12 (6,90)	13 (4,91)
Finito 2 sucesos equiprobables	12 (13,19)	25 (14,37)	37 (13,96)
Finito sucesos equiprobables	63 (69,23)	91 (52,30)	154 (58,11)
Finito sucesos no equiprobables	7 (7,69)	39 (22,41)	46 (17,36)
Impreciso	8 (8,79)	7 (4,02)	15 (5,66)
Total	91 (34,34)	174 (65,66)	265 (100,00)

Tabla 3. Frecuencia y (porcentaje) de tipos de espacio muestral en los ejemplos y ejercicios por libro

El espacio muestral asociado al experimento se analiza en la tabla 3. Generalmente los ejemplos y ejercicios se refieren a espacios muestrales finitos con más de dos elementos donde se puede aplicar la regla de Laplace. Es decir, se trataría de experimentos tales como lanzar un dado, extraer una carta de una baraja, extracción de bolas en urnas, etc. Junto con los casos de espacio muestral con dos resultados equiprobables (como lanzar una moneda) constituye el 72% del total de las actividades. Ello indica también una concepción predominante de probabilidad en los ejemplos y ejercicios, que es la laplaciana.

En un 5.66% de casos el espacio muestral no se especifica. Se trata de un problema abstracto en el cual no se concreta el experimento aleatorio, o bien de un caso de estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia relativa, en que no se da la composición del espacio muestral.

Observamos que el libro [B] contiene una pequeña proporción de espacios muestrales infinitos, y una proporción importante de espacios muestrales en los que los sucesos elementales no son equiprobables, que haría necesario el aplicar las concepciones frecuencial o subjetiva de la probabilidad. En consecuencia, en este libro hay una mayor variedad de espacios muestrales y de concepciones de probabilidad en los ejemplos y ejercicios propuestos. Observamos una mayor proporción en el texto [A] de espacios muestrales donde los sucesos son equiprobables y algunos casos en que no se especifica el espacio muestral.

6. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Un punto importante es la asignación de probabilidades a los sucesos. Hemos diferenciado los tipos siguientes:

1. *Regla de Laplace.* Cuando es posible asignar las probabilidades a los sucesos sobre la base de consideraciones de simetría física; o aplicando el principio de indiferencia. En este caso el significado subyacente de la probabilidad es el clásico.
2. *Información estadística disponible:* Cuando no es posible asignar probabilidades usando la regla de Laplace, pero se presenta al alumno datos estadísticos de los cuales él puede obtener un valor aproximado para la probabilidad de los sucesos. En este caso, el significado subyacente de la probabilidad es el frecuencial.
3. *Realización o simulación de experimentos.* Cuando no es posible usar la regla

de Laplace, ni se proporciona información estadística sobre los diferentes sucesos, pero el alumno puede obtener este tipo de información mediante la experimentación o mediante la simulación del experimento. Este tipo de actividad también lleva consigo el significado frecuencial de la probabilidad. Pero, además, exige del alumno una participación más activa en la recogida de la información estadística.

4. Consideración de probabilidad subjetiva: No siendo posible ninguno de los métodos anteriores de asignación de probabilidades, se pide al alumno asignar una probabilidad sobre la base de su experiencia previa o sus creencias personales. Nos encontramos ante una situación que enfatiza el significado subjetivo de la probabilidad.

5. Consideración geométrica de la probabilidad: Cuando el alumno puede asignar probabilidades basándose en criterios geométricos, por ejemplo, cuando se presentan con frecuencias problemas referidos a ruletas divididas en sectores de igual o diferente amplitud.

6. Leyes físicas. En el caso de presentar ejemplos de fenómenos deterministas es usual hacer referencia a leyes físicas, como la gravedad, o la ecuación del movimiento uniforme u otras conocidas por el alumno.

Las distintas formas de asignación de probabilidad a los sucesos que aparecen en los ejercicios y ejemplos de los textos analizados, se muestran en la tabla 4. Generalmente se hace aplicando la regla de Laplace, que supone un peso importante del cálculo combinatorio. Este cálculo, no obstante, no siempre es asequible al alumno, como se ha mostrado en las investigaciones de Navarro-Pelayo (1994) y en Batanero y cols. (1997 a) y b)). En un 20 % de casos la asignación de probabilidades se hace a partir de información estadística presentada al alumno lo que puede servir para establecer un puente entre estadística y probabilidad. Apenas aparecen actividades de experimentación por lo que no hay un verdadero enfoque frecuencial de la probabilidad, ya que al no hacer los experimentos por sí mismo se priva al alumno de la observación del fenómeno de la convergencia de las frecuencias relativas hacia la probabilidad y de las fluctuaciones aleatorias de la frecuencia relativa.

Asignación de probabilidades	Libro [A]	Libro [B]	Total
1. Regla de Laplace	76 (83,52)	114 (65,52)	190 (71,70)
2. Información estadística	11 (12,09)	44 (25,29)	55 (20,75)
3. Realización/simulación experimentos	0 (0)	11 (6,32)	11 (4,15)
4. Subjetiva	1 (1,10)	4 (2,30)	5 (1,89)
5. Geométrica	1 (1,10)	1 (0,57)	2 (0,75)
6. Física	2 (2,20)	0 (0)	2 (0,75)
Total	91 (34,34)	174 (65,66)	265 (100,00)

Tabla 4. Frecuencia y (porcentaje) de la asignación de probabilidades en los ejemplos y ejercicios por libro

Son también casi inexistentes los ejercicios basados en la concepción subjetiva de la probabilidad o probabilidades geométricas. Lo más destacable de estas diferencias es que, en el libro [A], prácticamente toda la asignación de probabilidades está basada en la regla de Laplace, y, por tanto, en el cálculo combinatorio, mientras que el tipo de asignación es más variado en el texto [B].

7. CONTEXTOS

Suydam y Weaver (1977) mostraron que los niños tienen mejores resultados cuando el contexto del problema les resulta familiar que si se trata de un nuevo contexto. Aunque los estudiantes muestran diferentes preferencias respecto a los problemas, parece claro que sus preferencias no influyen en su capacidad de resolver los problemas y que en general los problemas verbales referidos a situaciones no familiares o a situaciones abstractas son más difíciles que si el contexto es familiar.

Aunque este tipo de variables ha sido descrito teniendo como fin principal la resolución de problemas, creemos que son también aplicables al análisis de ejercicios en los libros de texto para proporcionar una clasificación de los mismos que nos indique los aspectos particulares del mismo.

1. Juego. La mayoría de los problemas y un gran número de aplicaciones se presentan en el contexto de juegos de azar, describiendo los resultados obteni-

dos por generadores aleatorios, tales como cartas, bolas en urnas, ruletas o dados. No en vano los juegos de azar dieron origen a la teoría de probabilidades y además, son interesantes para los alumnos. Este es el contexto encontrado con mayor frecuencia en los ejercicios y ejemplos analizados.

2. *Biología*. Un segundo contexto importante lo representan los fenómenos biológicos, como la herencia, las características físicas de los alumnos, o la ecología.

3. *Física*. Como ya hemos indicado, y en particular en el caso de ejemplos referidos a fenómenos deterministas, encontramos referencia a fenómenos en el campo de la física.

4. *Meteorología*. Es un caso especialmente importante, ya que los fenómenos atmosféricos son un ejemplo típico de aleatoriedad, diferente de los juegos y que el alumno puede encontrar en su vida diaria.

5. *Sociedad, trabajo, etc.* Incluimos en este apartado la descripción de fenómenos referidos a la vida social o política, tales como empleo, datos de producción, comercio, elecciones, etc.

6. *Experiencia del alumno*. Nos referimos a ejemplos particulares de la vida cotidiana del niño que no queden específicamente englobados en los contextos descritos anteriormente. Por ejemplo, resultados de exámenes, etc.

En la tabla 5 presentamos los contextos presentes en los ejercicios y ejemplos analizados y que son los siguientes: Juegos de azar; fenómenos biológicos, como herencia, características físicas de los alumnos o la ecología; fenómenos de tipo físico; meteorología; descripción de fenómenos referidos a la vida social o política, tales como, empleo, datos de producción, comercio, etc. y por último hemos considerado la experiencia previa del alumno sobre el experimento presentado, como por ejemplo los resultados de exámenes.

Los contextos más frecuentes son los juegos y la biología así como los relativos a la experiencia del alumno. El gran predominio del contexto relativo a juegos de azar se relaciona, por un lado, con los tipos de espacios muestrales (sucesos equiprobables) y la asignación de probabilidades (laplaciana). Puede indicar también un intento de hacer más interesante el tema a los alumnos, quienes, en general, se interesan por los juegos de azar. No obstante, creemos que se aprecia una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumno.

Contexto	Libro [A]	Libro [B]	Total
1. Juego	76 (83,52)	123 (70,69)	199 (75,09)
2. Biología	1 (1,10)	18 (10,34)	19 (7,17)
3. física	1 (1,10)	5 (2,87)	6 (2,26)
4. Meteorología	0 (0)	1 (0,57)	1 (0,38)
5. Sociedad	0 (0)	4 (2,309)	4 (1,519)
6. Experiencia alumno	10 (10,99)	23 (13,22)	33 (12,45)
7. No se especifica	3 (3,30)	0 (0)	3 (1,13)
Total	91 (34,34)	174 (65,66)	265 (100,00)

Tabla 5. Frecuencia y (porcentaje) de tipos de contexto en los ejemplos y ejercicios por libro

La principal diferencia es que el rango de aplicaciones es algo mayor en el libro [B], sobre todo con relación a la biología, ya que se han usado ejemplos de genética, características biológicas y nacimientos, entre otros.

8. PRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Entre las variables de contexto la forma de presentación se ha mostrado que influye en la conducta del resolutor (Webb, 1984). Suydam y Weaver mostraron que los problemas aritméticos que incluyen un gráfico, dibujo u otra representación gráfica, resultan más sencillos que los que no los incluyen. Resultados semejantes fueron obtenidos por Carpenter y cols. (1980) y Cohen y Stover (1981).

1. *Verbal*. Es la forma usual de presentar los ejemplos y ejercicios. Incluimos en esta categoría aquellos casos en que la información de tipo verbal es la única disponible.

2. *Tabla*. Cuando, además del enunciado verbal, se suministra al alumno datos estadísticos dispuestos en una tabla. La interpretación del enunciado del problema requerirá, por tanto, la capacidad de lectura de la tabla de datos, en la que, con frecuencia, aparecen convenios implícitos, como, por ejemplo, notación que se refiere a las frecuencias absolutas o relativas que el alumno debe conocer.

3. *Gráfico estadístico*. Cuando, además del enunciado verbal del problema, se

presenta al alumno algún gráfico estadístico, que debe interpretar para obtener los datos del problema. Como en el caso anterior, requiere unos conocimientos adicionales del alumno sobre la construcción e interpretación de gráficos.

4. *Diagrama de árbol.* En algunas ocasiones, el enunciado es completado mediante diagramas en árbol, sobre todo en el caso de que el concepto a estudiar se refiera a los experimentos compuestos, su espacio muestral o las probabilidades asociadas.

5. *Gráficos, diagramas de flechas.* Cuando aparecen en el enunciado gráficos no estadísticos o diagramas de flecha.

6. *Fotos o dibujos* que se añaden al problema para aumentar la motivación del alumno, aunque, en realidad no contienen una parte significativa de los datos.

7. *Tabla y gráfico.* Caso de que se incluyan estos dos tipos de información.

En la tabla 6 aparecen las distintas formas en que los textos analizados presentan la información para la resolución de ejercicios o en la propuesta de ejemplos. Los ejercicios y ejemplos se presentan, preferentemente en formato exclusivamente verbal, como se muestra en la tabla. También hay un peso importante de la presentación por medio de tablas estadísticas con o sin gráficos asociados, así como fotos, dibujos o ilustraciones.

Presentación de la información	Libro [A]	Libro [B]	Total
1. Verbal	70 (76,92)	114 (65,52)	184 (69,43)
2. Tabla	2 (2,20)	28 (16,09)	30 (11,32)
3. Gráfico Estadístico	0 (0)	2 (1,15)	2 (0,75)
4. Diagrama de árbol	0 (0)	4 (2,30)	4 (1,51)
5. Gráficos, diagramas, flechas	2 (2,20)	0 (0)	2 (0,75)
6. Fotos, dibujos...	4 (4,40)	20 (11,49)	24 (9,06)
7. Tabla y gráfico	6 (6,59)	6 (3,45)	12 (4,53)
8. Diagrama de Venn	6 (6,59)	0 (0)	6 (2,26)
9. D. de Venn y grafos o diagramas de flechas	1 (1,10)	0 (0)	1 (0,38)
Total	91 (34,34)	174 (65,66)	265 (100,00)

Tabla 6. Frecuencia y (porcentaje) de la presentación de la información en los ejemplos y ejercicios por libro

Es prácticamente inexistente el uso del diagrama en árbol, a pesar de la importancia que se le ha atribuido en la enseñanza de la probabilidad y combinatoria por Fischbein (1975). Creemos que los autores de los libros no son conscientes de las posibilidades de este recurso como modelo de la situación y como recurso generador en la resolución de problemas probabilísticos.

Las principales diferencias son que el libro [B], presenta en mayor proporción los datos usando tablas y/o gráficos estadísticos, lo que concuerda con la mayor presencia de la asignación frecuencial y los espacios muestrales con sucesos no equiprobables en este texto. En el texto [A], la información es predominantemente verbal y también hay una pequeña proporción de ejercicios que usan diagramas de Venn o grafos para presentar la información, debido al enfoque basado en la teoría de conjuntos que ya hemos indicado.

9. CONCLUSIONES

Este breve análisis nos ha servido, en primer lugar, para identificar algunas variables de tarea que el profesor debe tener en cuenta al ser significativas para los problemas de probabilidad.

También hemos observado que no todos los conceptos se tratan por igual en los problemas y ejercicios, siendo más tratados, aquellos, como el experimento compuesto, la probabilidad y las frecuencias relativas, que permiten más actividades de cálculo y dándose menos importancia a conceptos como el de probabilidad condicional, dependencia e independencia, que requieren una mayor actividad interpretativa.

En general los ejemplos y ejercicios se refieren a espacios muestrales finitos con más de dos elementos donde se puede aplicar la regla de Laplace, indicando una concepción predominante de probabilidad, que es la laplaciana. Esto coincide con la asignación de probabilidades, generalmente se hace aplicando la regla de Laplace, que supone un peso importante del cálculo combinatorio, aunque los niños de esta edad no siempre tienen un razonamiento combinatorio suficiente. Son casi inexistentes los ejercicios basados en la concepción subjetiva de la probabilidad o probabilidades geométricas.

El gran predominio del contexto relativo a juegos de azar sugiere un intento de hacer más interesante el tema a los alumnos, pero supone una restricción importante en el dominio de las aplicaciones de la probabilidad mostradas al alumno.

Todos estos puntos así como el escaso uso del diagrama en árbol, ordenador o experimentos por parte de los alumnos nos sugieren criterios para mejorar la enseñanza de la probabilidad y el desarrollo de libros y materiales más de acuerdo con las propuestas actuales del ministerio para este nivel de enseñanza.

BIBLIOGRAFÍA

- BATANERO, C., SERRANO, L. y GARFIELD, J. (1996). Heuristics and biases in secondary students' reasoning about probability. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX PME Conference*, (v.2, pp. 43-50). Universidad de Valencia.
- BATANERO, C, GODINO, J. D. y NAVARRO-PELAYO (1997 a). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education*, (pp. 239-252). Amsterdam: IOS Press e International Statistical Institute.
- BATANERO, C, NAVARRO-PELAYO y GODINO, J. D. (1997 b). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.
- CARPENTER, T. B., CORBITT, M. K., KEPNER, H. S., LINDQUIST, M. M. y REYS, R. E. (1980). *Solving verbal problems: Results and implications from the national assessment*. *Arithmetic Teacher*, 28(2), 8-12.
- CARPENTER, T. B., HIEBERT, J. y MOSER, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution.
- COHEN, S. A. y STOVER, G. (1981). Effects of teaching sixth grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly*, 16, 175-199.
- FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1998 a). Building and experimenting a model for a meaningful instruction on data analysis. En L. Pereira et al.

- (Eds.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching Statistics*, V. 12, (pp. 905-912). Voorburg: International Statistical Institute.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1998 b). Meanings of mathematical objects as analysis units in didactics of mathematics. Presentado en la *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Osnabrueck, Alemania.
- GOLDIN, G. A. y MC CLINTOCK, C.E. (Eds.) (1980). *Task Variables in Mathematical Problem Solving*. Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.
- GONZÁLEZ, R. M. (1993). *A descriptive study of verbal problems in selected mathematics text books at the high school*. Ph. D. UMI: 9404811.
- HAWKINS, A., JOLLIFFE, F. y GLICKMAN, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. London: Longman.
- KILPATRICK, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hartfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving. Papers from a research workshop*. Columbus. Ohio: ERIC/SMEAC.
- LECOUTRE, M. P. y DURAND, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: ...tude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357- 368.
- NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- ORTIZ, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- POLYA (1957). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

- PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid. Síntesis.
- ROBERT, A y ROBINET, J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels*. (IREM). Universidad de París.
- SERRANO, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- STANIC, G. M. y KILPATRICK, J. (1989). Historical perspectives on Problem Solving in the Mathematical Curriculum. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assesing of mathematical problem solving*. Lawrence Erlbaum Associate Publishers. New Jersey: Hillsdale.
- STEINBRING, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en didactique des Mathematiques*, 7, (3), 5-49.
- STEINBRING, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: a study of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503-522.
- SUYDAM, M. y WEAVER, J. F. (1977). Research on problem solving: Implications for elementary school classroom. *Journal of Experimental Psychology General*, 112, 634-656.
- TRURAN, J. y TRURAN, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for classroom practice. En B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education presented ay ICME-8* (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.
- WEBB, N. (1984). Content and context variables in problem tasks. En G. A. Goldin y E. Mc. Cintoock (Eds.), *Task variables in pproblem solving*, (pp. 69-102). Philadelphia: The Franklin Institute Press.