

# **ANÁLISIS DIDÁCTICO DE PROCESOS DE ESTUDIO MATEMÁTICO BASADO EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO<sup>1</sup>**

---

*Juan D. Godino*

Universidad de Granada

*Vicenç Font*

Universidad de Barcelona

*Miguel R. Wilhelmi*

Universidad Pública de Navarra

Recibido: 7 marzo 2008 / Aceptado: 4 abril 2008

## *RESUMEN*

Entre las tareas principales del profesor se encuentran el diseño e implementación de procesos de estudio y la valoración de la propia práctica docente con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes. En este trabajo utilizamos algunas nociones teóricas para definir cinco niveles de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que pueden ayudar a reflexionar a los profesores de matemáticas sobre su práctica docente. La introducción de estos niveles abre también nuevas perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas. Las nociones utilizadas están basadas en el enfoque teórico denominado “ontosemiótico” (EOS) donde el conocimiento matemático se modeliza teniendo en cuenta las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional de la actividad matemática. Asimismo, se tienen en cuenta las dimensiones normativa y axiológica, las cuales son abordadas usando los tipos de objetos, procesos y significados propuestos en el enfoque ontosemiótico. Las herramientas teóricas que describimos son aplicadas al análisis de una experiencia de enseñanza de nociones estadísticas elementales.

*Palabras clave:* didáctica de las matemáticas; epistemología; cognición; instrucción; valoración; enseñanza y aprendizaje.

## *ABSTRACT*

The design and implementation of teaching and learning processes and the assessment of the teaching practice are considered among the main teacher's tasks. In this article we use some theoretical notions to define five levels of analysis of mathematics teaching

<sup>1</sup> Versión revisada de la Conferencia invitada en el *IV Congreso Internacional de Ensino da Matemática*. ULBRA, Brasil, 25-27 Octubre 2007.

and learning processes, which might help mathematic teachers to reflect about their own practice. The introduction of these levels of didactical analysis helps also to pose new research issues in mathematics education. The theoretical notion used are based on the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction where mathematical knowledge is conceived taken into account the epistemic, cognitive and instructional dimension of mathematical activity. The normative and axiological dimensions, using the different types of objects, processes and meanings introduced in the onto-semiotic approach are also considered. The theoretical tools described are applied in the analysis of a teaching experience where elementary statistical notions and techniques are used.

*Key words:* mathematics education; epistemology; cognition; instruction; assessment; teaching and learning.

## 1. INTRODUCCIÓN

La Didáctica de las Matemáticas debe asumir la responsabilidad de elaborar y sistematizar los conocimientos útiles para describir, diseñar, implementar y valorar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta disciplina incluye, por tanto, cuestiones que son habitualmente abordadas por otras disciplinas, como la epistemología, psicología, pedagogía, sociología, etc. Esta es la razón por la que en el “enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática” (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; D’Amore y Godino, 2007; Font, Godino y D’Amore, 2007) se adopta un modelo epistemológico sobre las matemáticas –basado en presupuestos antropológicos/ socioculturales (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006); un modelo de cognición matemática –sobre bases semióticas (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce, 1931-58); un modelo instruccional –sobre bases socio-constructivistas (Ernest, 1998; Brousseau, 1998); un modelo sistémico-ecológico (Morin, 1977) que relaciona las anteriores dimensiones entre sí y con el trasfondo biológico, material y sociocultural (Maturana y Varela, 1984) en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación matemática.

En este trabajo vamos a sintetizar las principales herramientas conceptuales adoptadas o elaboradas en el EOS y que configuran los modelos mencionados (epistemológico, cognitivo, instruccional, sistémico-ecológico). Estas herramientas están siendo aplicadas en nuestros programas de formación de profesores de matemáticas al considerarlas útiles para la reflexión y análisis del diseño, implementación y evaluación de la propia práctica docente.

En nuestro caso estamos implicados en la formación matemática de profesores de educación primaria, así como en su formación en didáctica de las matemáticas. Teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo usuales en los planes de formación de profesores estamos experimentando ciclos formativos en los cuales se articulan la formación matemática y la didáctica. Para ello, partimos de situaciones-problema que permiten a los profesores en formación desarrollar sus conocimientos y experiencia matemática. En este trabajo analizamos uno de dichos ciclos formativos usando algunas de las herramientas teóricas del EOS, en particular la “pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica” (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2007).

Comenzamos este trabajo describiendo una de tales situaciones-problema que vamos a usar para contextualizar las herramientas de análisis didáctico elaboradas en el marco del EOS. A continuación describimos las dimensiones de los procesos de estudio que tendremos en cuenta y las herramientas teóricas que propone el EOS para su análisis, ejemplificándolas para el caso particular del ciclo formativo mencionado. El análisis del ejemplo de enseñanza es realizado por los autores del trabajo como referencia para potenciales implementaciones con profesores.

## 2. UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA COMO CONTEXTO DE REFLEXIÓN

En esta sección describimos brevemente una experiencia de enseñanza de nociones elementales de estadística con futuros maestros de educación primaria<sup>2</sup>. En dicha experiencia se implementó una unidad didáctica basada en el uso de un proyecto de análisis de datos titulado: *¿Cuál ha sido la efectividad de un entrenamiento deportivo?* a partir del cual se pretende contextualizar tanto los contenidos estadísticos elementales como los contenidos didácticos correspondientes.

### El problema y los datos

Un profesor de Educación Física prepara a un grupo de 60 alumnos de 12 años para participar en una competición. Transcurridos 3 meses del entrenamiento (15 septiembre–15 diciembre) quiere evaluar la efectividad del entrenamiento. Para ello quiere comparar el tiempo en segundos que los alumnos tardan en recorrer 30 metros el 15 de septiembre y el 15 de diciembre, y también quiere conocer si hay diferencias entre los chicos y las chicas. Los datos se presentan en la tabla 1<sup>3</sup>.

Género	Tiempo en Septiembre	Tiempo en Diciembre	Género	Tiempo en Septiembre	Tiempo en Diciembre
CHICA	3,3	5,4	CHICA	5,9	2,9
CHICA	4,7	3,0	CHICA	5,9	4,2
...					

Tabla 1: Tiempo en recorrer 30 metros en Septiembre y Diciembre de un grupo de alumnos y alumnas

### Cuestiones

Realizad los cálculos y gráficos estadísticos que consideréis pertinentes para responder a las siguientes cuestiones:

<sup>2</sup> En nuestro caso hemos experimentado esta situación con estudiantes de Maestro, pero consideramos que también es apropiada para profesores de secundaria.

<sup>3</sup> En el enunciado original dado a los estudiantes, figuran 60 valores. Aquí no se transcriben por razón de espacio.

1. A la luz de los datos, ¿cómo se puede evaluar la efectividad del entrenamiento en el conjunto de la clase?
2. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 30 metros inicialmente (15 septiembre)?
3. ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 30 metros después del entrenamiento (15 diciembre)?
4. ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como “atípico” en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja o alta)?
5. ¿Quiénes han mejorado más, los chicos o las chicas?

Se pide a los estudiantes que resuelvan el proyecto y elaboren un informe adjuntando los cálculos y gráficos que consideren pertinentes.

En la figura 1 se incluye un resumen de las distribuciones de frecuencias de las variables del proyecto usando la técnica de los diagramas de “cajas adosadas”, mediante los cuales se pueden comparar la posición central (mediana y media), dispersión (recorrido intercuartílico), asimetrías y valores atípicos. Esta información permite responder a las cuestiones planteadas.

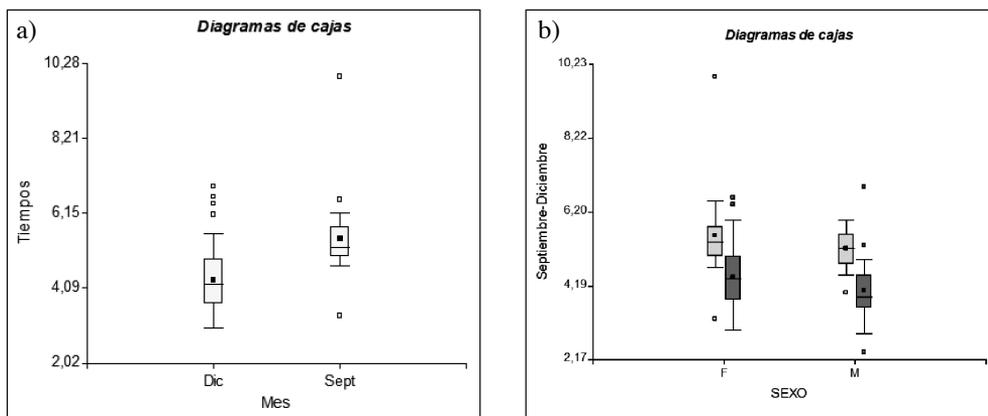


Figura 1: Distribución de los tiempos: a) clase completa; b) chicos y chicas

En nuestra experiencia con profesores en formación el proyecto fue abordado en una primera sesión de 90 minutos, trabajando en equipo en el aula de informática y usando como herramienta de cálculo y graficación la hoja Excel. El docente comenzó dando una copia del fichero de datos, resolviendo las dudas y discutiendo con el grupo las diversas interpretaciones de las cuestiones propuestas. Se dio a los estudiantes una semana para terminar, teniendo la oportunidad de consultar al docente en sesiones de tutoría. En el comienzo de la siguiente sesión del curso se presentaron y discutieron algunos de los informes elaborados por los equipos de trabajo. A continuación se inició la segunda fase del ciclo formativo, centrada en el

análisis didáctico de la situación y de su resolución. El profesor comentó brevemente los diferentes niveles de análisis didáctico que se explican en el siguiente apartado y propuso a los alumnos que realizaran un análisis del proyecto que contemplase estos cinco niveles.

### 3. NIVELES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

En diversos trabajos realizados en el marco del “enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático” (Font y Godino, 2006; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2007; D’Amore, Font y Godino, 2007)<sup>4</sup> se han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático (ya planificado<sup>5</sup> o bien ya implementado). Estos cinco niveles constituyen una ampliación progresiva de la capacidad de análisis de los procesos de estudio matemático.

1. *Sistemas de prácticas y objetos matemáticos (previos y emergentes)*. Este nivel de análisis:

- Se aplica, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en dicho proceso.
- Permite descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios y, para cada uno de ellos, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal.
- Permite describir una configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas y realizadas.

2. *Procesos matemáticos y conflictos semióticos*. En toda práctica se identifica un *sujeto agente* (institución o persona) y un *medio* en el que dicha práctica se realiza (que puede contener otros sujetos u objetos). Puesto que el sujeto agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema es necesario considerar también los objetos, procesos y significados matemáticos involucrados. Este nivel de análisis:

- Se centra en los objetos y, sobre todo, en procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también en los que emergen de ellas.

<sup>4</sup> Trabajos disponibles en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino>

<sup>5</sup> No abordamos aquí la problemática asociada a la planificación de un proceso de instrucción, puesto que ello implica caracterizar un significado de referencia del contenido en cuestión, lo que requiere realizar un estudio histórico-epistemológico-didáctico fuera del alcance de este trabajo.

- La finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

3. *Configuraciones y trayectorias didácticas*. Este nivel de análisis:

- Contempla el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, puesto que el estudio de las matemáticas tiene lugar bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes.
- Se orienta, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas).

4. *Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio*. Este nivel de análisis:

- Estudia la compleja trama de normas que soportan y condicionan las configuraciones didácticas, así como su articulación en trayectorias didácticas (según las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica).
- Se intenta dar explicaciones plausibles del porqué un sistema didáctico funciona de una forma y no de otra.

5. *Idoneidad didáctica del proceso de estudio*. Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo en un determinado sistema didáctico y por qué? La Didáctica de la Matemática debe aspirar además a la mejora del funcionamiento de estos sistemas, aportando una racionalidad axiológica o valorativa en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc. Necesita, pues, criterios de “idoneidad” que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora.

Estos niveles de análisis, según el momento del proceso de instrucción que se esté considerando, tienen un peso diferente. Por ejemplo, el primer y segundo nivel de análisis son fundamentales en el diseño curricular y en la planificación del proceso de instrucción. El tercero y cuarto nivel son particularmente útiles en el estudio de la implementación realizada. El quinto nivel hay que tenerlo en cuenta tanto en la fase de planificación como en la valoración de los procesos de instrucción.

#### 4. PRIMER NIVEL DE ANÁLISIS: SISTEMAS DE PRÁCTICAS Y OBJETOS MATEMÁTICOS

Este primer nivel de análisis se basa en la aplicación de las nociones de *práctica matemática* ligada a la solución de un tipo de problemas, *objetos emergentes* (e intervinientes), *significados sistémicos* institucionales y personales. Estas nociones están desarrolladas en Godino y Batanero (1994; 1998), precisadas en Godino y Font (2007a) y sintetizadas en las figuras 1 y 2.



Figura 1: Tipos de significados institucionales y personales

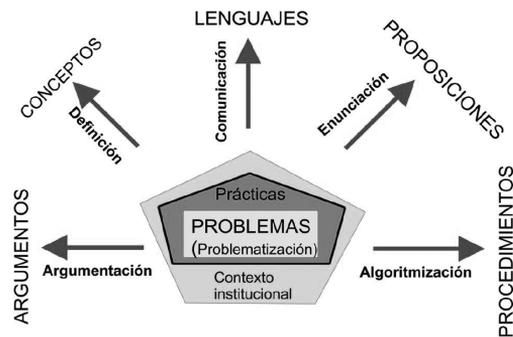


Figura 2: Objetos y procesos primarios

La aplicación de estas nociones teóricas permite formular, entre otras, las cuestiones que incluimos a continuación, las cuales son aplicadas al ejemplo del proyecto descrito en la sección 2<sup>6</sup>.

*¿Qué problemas y prácticas se contemplan (realizan) en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian?*

- La cuestión inicial propuesta lleva a plantear tres problemas de comparación de tres pares de distribuciones de frecuencias de variables estadísticas continuas, a fin de encontrar diferencias y semejanzas entre las mismas y tomar decisiones sobre el grado de efecto de un tratamiento: tiempo en recorrer 30 metros en Septiembre y Diciembre, en la muestra completa, subgrupo de chicas y de chicos, respectivamente. Se trata de un problema extramatemático —¿Ha sido efectivo el tratamiento?— que se modeliza mediante un problema intramatemático —¿Cómo comparar dos distribuciones de frecuencias?—. La solución del problema intramatemático requiere la *descripción* de cada una de las distribuciones, lo que conlleva el estudio de las distribuciones (el *cálculo* de los promedios, dispersiones, formas y valores atípicos). La representación gráfica simultánea de las distribuciones sobre un mismo sistema de coordenadas permite visualizar la forma de las

<sup>6</sup> El análisis del ejemplo no pretende ser exhaustivo sino meramente ilustrativo de la aplicación de las nociones teóricas introducidas.

distribuciones e *identificar* la presencia de valores atípicos, así como *justificar* el grado de efectividad del tratamiento. Este sistema de prácticas operativas y discursivas se focaliza para responder a las preguntas de indagación; es decir, no basta con realizar los cálculos / gráficos matemáticos, sino que hay que seleccionar cuáles serán útiles para responder las cuestiones y finalmente *interpretar* los resultados. Por tanto, se pasa por las diversas fases del proceso de modelización, no sólo por el trabajo con el modelo matemático.

- El problema se puede usar como situación de introducción o contextualización de las competencias estadísticas elementales en el nivel de educación secundaria (variables estadísticas, estadísticos de resumen de las distribuciones, tabulación y representación gráfica), y también como aplicación de dichos conocimientos. En este caso se añaden nuevos significados al comparar varias distribuciones de frecuencias, lo que motiva la introducción de técnicas de comparación de distribuciones de frecuencias, bien a nivel descriptivo, o inferencial en niveles superiores.
- Dado que el proyecto requiere el tratamiento de muestras de datos relativamente grandes (dos variables estadísticas con 60 valores, números reales) es necesario que los sujetos conozcan el manejo de un dispositivo de cálculo y graficación, como la hoja Excel (preparación de columnas de datos, ordenación, cálculo de estadísticos...). En caso contrario, habrá que contemplar una fase previa al estudio que aborde el logro de estos conocimientos. En nuestra experiencia se dispone, como recurso de cálculo y graficación, de la hoja Excel que los estudiantes conocen.
- El contexto del problema, una sencilla investigación sobre la efectividad de un entrenamiento deportivo, permite relacionar la estadística con otra área curricular; los alumnos de secundaria están familiarizados con el tipo de experiencias que se describen. Los datos podrían incluso haberse tomado por los propios alumnos en su clase de Educación Física.

*¿Qué objetos (lenguajes, problemas, propiedades, conceptos, procedimientos y argumentos) intervienen en las prácticas? ¿Cuáles son previos y cuáles emergentes?*

La primera cuestión, “¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?”, requiere poner en práctica la siguiente configuración epistémica global:

#### *Lenguajes*

Previos (Términos y expresiones usadas para referir a los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes):

- Ordinario (efectividad del entrenamiento; conjunto de la clase...).
- Numérico, tabular.
- Funcional (uso de las funciones estadísticas de Excel, promedio, desviación típica).
- Términos y representaciones estadísticas (media, gráficos de barras...).
- Algebraico (variables, valores, coordenadas, transformación).
- Métrico (magnitudes y su medida, medida del tiempo, longitud...).
- Aritmético (números enteros, decimales, fracciones, proporciones, porcentajes).

**Emergentes:**

- Gráficos adosados (tronco, caja, barras adosadas).
- Diagramas de dispersión.
- Valores atípicos expresados como puntos alejados de los promedios.

En la solución del problema tienen lugar diversos procesos de producción, transformación e interpretación de signos (semiosis): ordenación de las series de datos, conversión de tablas de valores a gráficos...

**Conceptos****Previos:**

- Dato estadístico, variable estadística, valor, frecuencia absoluta y relativa, distribución.
- Promedios (media, mediana, moda, intervalo modal); dispersión (desviación típica, recorrido, recorrido intercuartílico).
- Conceptos relacionados con el uso elemental de la hoja Excel.
- Sistemas numéricos.
- Variables, sistemas de coordenadas, escalas en un gráfico.

**Emergentes (dependientes de los conocimientos previos de los estudiantes):**

- Distribución de las variables.
- Gráfico del tronco y su interpretación.
- Diferencias en distribuciones de frecuencias (emergentes de las prácticas de comparación de las distribuciones).
- Gráficos de caja y su uso (si el profesor los introduce).
- Valor atípico; valores centrales (50% central).
- Simetría /asimetría en una distribución.
- Cambio en las distribuciones (desplazamiento de valores centrales con un tratamiento).
- Diferencias estadísticas significativas (en el caso de que se haga un estudio de la inferencia a partir de las prácticas de comparación de las distribuciones); nociones propias de la inferencia.

**Propiedades****Previas:**

- La media aritmética es una medida en torno a la cual se distribuyen el conjunto de los datos.
- La desviación típica es una medida de la mayor o menor dispersión de un conjunto de datos respecto de la media.
- El recorrido intercuartílico mide la amplitud del intervalo central de valores; es una medida de dispersión asociada a la mediana.
- La comparación de dos distribuciones de frecuencias debe hacerse teniendo en cuenta tanto el promedio como la dispersión.

**Emergentes:**

- El entrenamiento deportivo ha sido efectivo en el conjunto de la clase.
- La clase ha disminuido su homogeneidad en la variable "tiempo en recorrer 30 m".

- Los tiempos en recorrer 30 m el 15 de diciembre han sido más heterogéneos que el 15 de septiembre.
- La media queda afectada por el valor atípico; la moda o mediana no.
- La moda o mediana representan mejor el conjunto si hay valores atípicos; se debe suprimir el valor atípico al calcular los promedios.
- El valor atípico queda separado del resto en los gráficos.

#### *Procedimientos*

##### Previos:

- Preparar una tabla en Excel de dos columnas y 60 filas, con los datos de las dos variables para toda la clase; una tercera columna puede indicar además la variable género (chico, chica).
- Si se opta por usar la media y desviación típica como resúmenes estadísticos de las distribuciones es necesario aplicar las funciones estadísticas correspondientes de Excel a cada una de las tablas de valores.
- Si se opta por usar los estadísticos de orden, se requiere ordenar los vectores columna de datos de menor a mayor e identificar la mediana, cuartiles, etc.

##### Emergentes:

- Para comparar dos distribuciones de frecuencias se harán los siguientes pasos: calcular los promedios y medidas de dispersión; construir gráficas adosadas; identificar valores atípicos y tratarlos de manera independiente; comparar las diferencias...

#### *Argumentos*

- El entrenamiento ha sido efectivo en el conjunto de la clase porque se comprueba que el tiempo medio en recorrer 30 m el 15 de diciembre es menor que el correspondiente al 15 de septiembre.
- El conjunto de la clase ha aumentado la dispersión en la variable “tiempo en recorrer 30 m” porque la desviación típica del tiempo el 15 de diciembre es mayor que la correspondiente al 15 de septiembre.
- La decisión sobre la efectividad del tratamiento se justifica deductivamente a partir de las definiciones de los objetos conceptuales (definiciones) de distribución de frecuencia y los correspondientes estadísticos resumen (representatividad de los promedios; medida de la variabilidad mediante las medidas de dispersión).
- También se usa argumentación empírica-visual: la distribución de tiempos el 15 de diciembre se “ve” desplazada hacia la izquierda en los gráficos.

## **5. SEGUNDO NIVEL DE ANÁLISIS: PROCESOS MATEMÁTICOS Y CONFLICTOS SEMIÓTICOS**

El segundo nivel de análisis aporta información sobre la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática puesta en juego y, por tanto, posibles explicaciones de los conflictos semióticos en el estudio del tema. Se basa en la aplicación de la noción

de proceso matemático y la tipología de procesos elaborada teniendo en cuenta los tipos de objetos primarios y secundarios (dualidades o atributos contextuales). Estas nociones están desarrolladas en Godino (2002), precisadas en Godino y Font (2007b) y sintetizadas en la figura 3.



Figura 3: Objetos y procesos secundarios

La aplicación de estas nociones permite formular, entre otras, las cuestiones que incluimos a continuación, las cuales son aplicadas al ejemplo del proyecto descrito en la sección 2.

*¿Qué procesos y objetos matemáticos son activados en las prácticas matemáticas realizadas?*

*Procesos de materialización – idealización (dualidad ostensivo – no ostensivo):*

- La tabla de datos en el enunciado de la tarea tiene que ser transformada en la hoja Excel para que puedan calcularse los estadísticos en una tabla con 60 filas. Esta disposición material (ostensiva) es la que evoca la idea de variable estadística a la que se aplican las funciones promedio y desviación típica.
- El objeto no ostensivo “distribución de frecuencias” se evoca mediante los diagramas del tronco, de cajas y polígono de frecuencias, aunque no se usa la representación de histogramas.
- La “forma de la distribución” se visualiza en los diagramas citados anteriormente, especialmente el de cajas. También podría comprobarse mediante la posición relativa de media, mediana y moda.
- El diagrama de dispersión es un objeto ostensivo que evoca el objeto no ostensivo “dependencia estadística”.

*Procesos de particularización – generalización (dualidad extensivo – intensivo):*

- Cada valor de la variable corresponde a un sujeto particular; es un dato. Pero el razonamiento estadístico se aplica a la muestra, al conjunto de datos. Esto es debido a que, mientras cada resultado particular de un experimento aleatorio es impredecible, el conjunto de resultados, debido a la *ley del azar* (teoremas de los grandes números), es predecible (en el ejemplo, las distribuciones tenderían a la normal con un tamaño suficiente de muestra). En un estudio inferencial, comparando las medias y desviaciones típicas podemos asegurar la diferencia de la distribución (al ser los parámetros del modelo probabilístico).
- Los estadísticos de centralización y dispersión representan el conjunto de datos. El dato aislado interesa sólo cuando se estudian los sujetos atípicos (para lo que se requiere el patrón de comparación de la clase), y con frecuencia para prescindir de ellos en el análisis estadístico descriptivo o inferencial. El juicio sobre la efectividad del tratamiento no se aplica a los sujetos aislados, sino a la clase o grupo (muestra o población), por la razón dada anteriormente.
- Todavía podrá aparecer un nuevo proceso de generalización cuando la clase se considera como una muestra respecto de una población. El juicio sobre la efectividad de un tipo de tratamiento interesa generalizarlo a la población de la cual la muestra se pueda considerar como representante. Este proceso de generalización es característico de la inferencia estadística. Se hace posible por las propiedades de las distribuciones muestrales, en muestras representativas de la población, que asegura que los estadísticos en las muestras sean buenos estimadores (insesgados, consistentes, etc.) de los parámetros de la población.

*Procesos de descomposición – reificación (dualidad sistémico – unitario):*

- El problema global se debe descomponer en problemas elementales. Cada distribución es un sistema que debe ser descrito mediante las medidas de centralización, dispersión y forma. En cada uno de estos subproblemas las nociones de media y desviación típica intervienen como objetos unitarios y son proporcionados por un procedimiento en cierto modo reificado en Excel.
- Todo este sistema de datos e informaciones debe ser sintetizado en una respuesta que podría ser unitaria: “el entrenamiento ha sido efectivo porque la media el 15 de diciembre es menor que el 15 de septiembre”, pero también se puede matizar: “sin embargo, no mejoró tanto en chicas como en chicos” o “hubo alumnos que perdieron, pero el resto (la mayoría) mejoró”, “mejoró, pero poco, habría que seguir más tiempo el entrenamiento, o modificarlo (total o parcialmente) para que sea más efectivo”.
- Tras el proceso de estudio correspondiente los nuevos conceptos y propiedades emergentes, que inicialmente deben ser tratados como sistémicos, deberán ser reificados (vistos como objetos unitarios) por los estudiantes a fin de ser aplicados a la solución de nuevos problemas. Dependiendo de los conocimientos iniciales de los estudiantes, el desarrollo del proyecto se orientará al dominio (reificación) de distintas nociones y procedimientos, como, por ejemplo, la comparación de distribución.

*Procesos de representación – significación (dualidad expresión – contenido):*

- Los procesos de representación y significación son “densos” en la trama de configuraciones epistémicas y procesos matemáticos que se ponen en juego en la resolución del problema, y pueden ser motivo de conflictos semióticos potenciales. Los alumnos podrían no estar acostumbrados al proceso completo de modelización, por lo que se quedarían sin completarlo, limitándose a trabajar con el modelo, pero sin interpretar los resultados en el contexto del problema.

- El desarrollo del proyecto se apoya en el uso de diversas representaciones gráficas (diagramas de dispersión, histogramas, gráfico de cajas...), así como en el uso de términos y símbolos estadísticos.
- La atribución de significado a la expresión “ha sido efectivo el entrenamiento” requiere del sujeto familiarización con el contexto deportivo, y más concretamente con cuestiones profesionales de los profesores de educación física. En este caso el tiempo en recorrer 30 metros el 15 de diciembre debe ser menor que el correspondiente al 15 de septiembre. Algunos estudiantes pueden no reconocer este significado de manera inmediata.
- La expresión “en el conjunto de datos” quiere decir que no interesa saber si un alumno concreto ha mejorado o no, sino la clase globalmente; de hecho, el análisis de los datos tendrá que discriminar valores atípicos y diferenciar entre efectividad personal y grupal. La atribución de significado a esta expresión requiere familiaridad con las prácticas operativas y discursivas de la estadística descriptiva (e inferencial); así como con el concepto de aleatoriedad, antes citado; en caso contrario, será necesario orientar el proceso de estudio del problema a que los estudiantes compartan esos significados.
- Cada concepto que interviene en el proceso de resolución debe ser referido por las correspondientes expresiones lingüísticas.

*Procesos de personalización - institucionalización (dualidad personal – institucional):*

- En una primera fase del proceso de estudio será necesario lograr que los estudiantes asuman el problema y se involucren en la solución (*devolución* inicial del problema, Brousseau (1998); proceso de problematización). Es decir, que el problema sea interesante para ellos. El logro de la personalización requiere una atención constante del profesor a la gestión de los conocimientos que pueden quedar bajo la responsabilidad de los estudiantes y los que reclaman su intervención.
- La presentación colectiva de los resultados alcanzados por los estudiantes, bien individualmente o trabajando en equipos, su discusión colectiva y las intervenciones de regulación final por el profesor serán cruciales para el progreso colectivo del aprendizaje y el logro de las competencias de análisis de datos pretendidas.

*¿Qué conflictos (a priori o a posteriori) pueden tener los estudiantes para la realización de las prácticas matemáticas?*

Sobre dificultades y conflictos potenciales hay que tener en cuenta la gran cantidad de investigaciones en didáctica de la estadística que han aportado información valiosa sobre errores y dificultades de los sujetos ante diferentes tareas y circunstancias (Batanero, 2001; Shaughnessy, 2007). En la implementación del proyecto sobre el entrenamiento deportivo hemos encontrado, entre otros, los siguientes conflictos:

- No reconocer que la variable tiempo es continua, medida con la precisión de décimas de segundo, y que el número de datos (60) es elevado, por lo que si opta por construir tablas de frecuencias es necesario elegir una amplitud de intervalos de clase adecuada.
- Utilizar la moda como medida de tendencia central cuando los datos son continuos. No discriminar cuando es pertinente usar la mediana, en lugar de la media, y en consecuencia calcular los tres promedios.
- Comparar gráficamente el rendimiento de los chicos y chicas mediante las frecuencias absolutas, sin tener en cuenta el tamaño diferente de ambas muestras.

## 6. TERCER NIVEL DE ANÁLISIS: CONFIGURACIONES Y TRAYECTORIAS DIDÁCTICAS

El centro de atención del análisis didáctico debiera progresar desde la situación-problema (o del concepto/ estructura conceptual) a la configuración epistémica/ cognitiva, y de ésta hacia la configuración didáctica –que incluye no sólo el saber y los sujetos sino también el papel del profesor, los recursos y las interacciones entre los diversos componentes–. En la siguiente etapa el análisis didáctico debe contemplar la trayectoria o secuencia de configuraciones didácticas, esto es, el progresivo “crecimiento matemático” de los aprendizajes. Estas nociones son desarrolladas en Godino, Contreras y Font (2006) y sintetizadas en la figura 4.

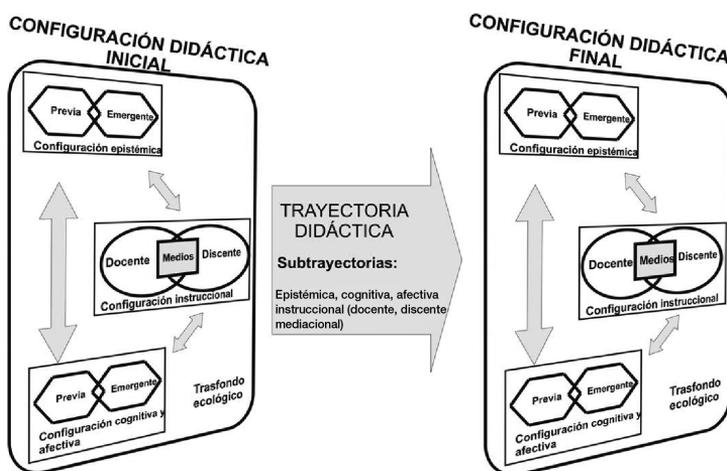


Figura 4: Interacciones didácticas

Las nociones introducidas para el análisis de los procesos de estudio permiten formular, entre otras, las cuestiones que se incluyen a continuación, las cuales son aplicadas al ejemplo del proyecto descrito en la sección 2.

*¿Cuáles, y de qué tipo, son las configuraciones didácticas en que se divide el proceso de instrucción? ¿Qué conflictos han tenido lugar y cómo se han afrontado en cada una de las configuraciones?*

- La Guía de estudio ha incluido una secuencia de cuestiones que afrontar, que fija una secuencia de configuraciones epistémicas. Estas configuraciones están centradas en el abordaje de cada una de las cuestiones. No obstante, dependiendo de los significados personales de los estudiantes, las cuestiones pueden ser descompuestas para ser abordadas mediante configuraciones didácticas diferentes. Por ejemplo, el estudio de la forma de las distribuciones de frecuencias puede hacerse elaborando un gráfico de “tronco y

hojas”, que a su vez permite identificar los estadísticos de orden. Pero si los alumnos no conocen estas técnicas el profesor puede organizar una configuración didáctica, con un mayor énfasis magistral, para introducirlas.

- La enseñanza de la estadística por el “método de proyectos”, como aquí se propone, permite implementar trayectorias didácticas en las que predominan las configuraciones de tipo personal y de trabajo cooperativo, esto es, con un nivel mayor de autonomía en el aprendizaje matemático. No obstante, cada configuración didáctica (ligada al desarrollo de una configuración epistémica específica) debe contemplar los momentos de regulación (procesos de definición, enunciación, fijación de procedimientos y justificaciones) en los que el docente fije los significados institucionales que serán compartidos por la clase. En nuestro caso, se trata de atribuir significado a la “comparación de distribuciones de frecuencias” teniendo en cuenta no solo los promedios, sino también las dispersiones y características de forma de las mismas (simetrías, valores atípicos...). El debate de la “significatividad” de las diferencias puede abrir las puertas a la inferencia estadística.
- La elección de los dispositivos de ayuda al cálculo estadístico y la representación gráfica es determinante para el desarrollo de la trayectoria didáctica por sus interacciones con las trayectorias epistémica, docente, discente, así como con las trayectorias cognitivas de los estudiantes. El uso de la hoja Excel es una de las opciones posibles, dada su potencial utilidad para temas diversos, su disponibilidad en todos los ordenadores y ser sugerida por los currículos oficiales.

*¿Cuál ha sido la trayectoria epistémica? ¿Y la cognitiva-afectiva? ¿Y la instruccional? ¿Cuál ha sido la interacción de estas tres subtrayectorias?*

La aplicación de las nociones de trayectoria epistémica, cognitiva-afectiva e instruccional (docente, discente y mediacional) permite realizar análisis detallados de la progresiva construcción de los significados institucionales implementados, de los aprendizajes y de su dependencia de los formatos de interacción que efectivamente tienen lugar, así como del uso de los recursos y del tiempo asignado a cada configuración epistémica. En este tipo de análisis el foco de atención será el reconocimiento de los conflictos cognitivos e interaccionales que tienen lugar y sobre cómo son abordados por el docente y los propios estudiantes. Por razones de espacio no aplicamos aquí estas herramientas al caso del proyecto deportivo.

*¿Cómo se articulan entre sí las configuraciones didácticas para formar la trayectoria didáctica? ¿Qué conflictos semióticos interaccionales han surgido como consecuencia del formato de interacción entre los distintos tipos de configuraciones?*

- La trayectoria comienza usualmente con la presentación del proyecto a los estudiantes, resolviendo las dudas en cuanto a la interpretación de las consignas y compartiendo posibles maneras de enfocar la resolución. Sigue una fase de trabajo personal, o en equipo, en la que, en el intervalo de una o dos semanas, los estudiantes elaboran respuestas a las cuestiones. Durante dicha semana los estudiantes pueden consultar al docente en horarios de tutoría, aunque usualmente dicha consulta no tiene lugar. Finalmente se presentan en el grupo algunas de las respuestas dadas por los estudiantes, se comparan entre sí, se explican y justifican las estrategias y soluciones. El docente finalmente explica la configuración epistémica pretendida, mostrando las limitaciones y desviaciones de las soluciones aportadas por los estudiantes.
- En la fase de trabajo personal, cuando los estudiantes no hacen uso de la tutoría, se ha dado el caso de que han invertido bastante tiempo en proseguir una estrategia incorrecta, o poco

eficaz, bien por una deficiente interpretación del trabajo a realizar, por desconocimiento de las técnicas pertinentes, o no recordar algún conocimiento previo necesario. Por ejemplo, los alumnos no se percatan de que la variable tiempo es continua y que, en este caso, si se opta por realizar tablas de frecuencias y los correspondientes histogramas, es necesario agrupar los datos en intervalos de clase con una amplitud adecuada. De este modo las trayectorias cognitivas se desvían en una dirección poco eficaz, con la consiguiente pérdida de tiempo y, posiblemente, la generación de un cierto sentimiento de frustración.

## 7. CUARTO NIVEL DE ANÁLISIS: DIMENSIÓN NORMATIVA

La educación, como cualquier actividad social, es una actividad regulada, en algunos aspectos de manera explícita y en otros implícitamente. Desde el nivel más general de las directrices curriculares, fijadas con frecuencia con decretos oficiales, incluso mediante leyes orgánicas, hasta los comportamientos de cortesía y respeto mutuo entre profesor y alumnos, los procesos de enseñanza y aprendizaje están regulados por normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones... Todos estos elementos reguladores conforman lo que se denomina la “dimensión normativa de los procesos de estudio”. Una empresa prioritaria del análisis didáctico debe ser el estudio de esta “dimensión normativa” para, por un lado, poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados y, por otro, incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario) para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de las matemáticas. La noción de dimensión normativa (que incluye también los aspectos metanormativos) ha sido introducida en Godino, Font, Wilhelm y Castro (2007) y en D’Amore, Font y Godino (2007) (Figura 5).

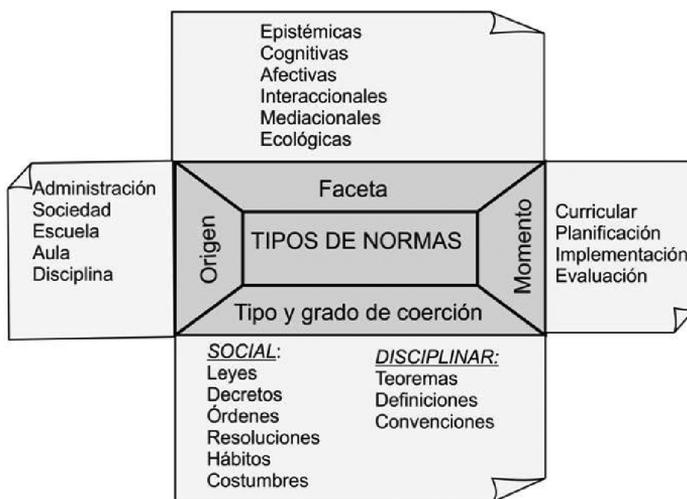


Figura 5: Dimensión normativa

Estas nociones permiten formular, entre otras, las cuestiones siguientes:

*¿Cuáles son las principales normas que intervienen en las distintas facetas del proceso de estudio y cómo afectan al desarrollo del mismo?*

- La implementación del proyecto de análisis de datos cumple los requisitos de los currículos oficiales en cuanto al bloque de contenidos de “tratamiento de la información”. La Estadística es una parte de los currículos de matemáticas de educación primaria y secundaria en España incluyéndose en las nuevas propuestas curriculares (MEC, 2007) un módulo sobre “tratamiento de la información, azar y probabilidad” desde el primer ciclo de primaria (6-8 años). La recogida y análisis de datos de encuestas, experimentos y observaciones y el uso de un conjunto de técnicas (incluyendo tablas de doble entrada) son recomendadas para el segundo ciclo (8-10 años), mientras que para el ciclo final (10-12 años) se mencionan la media, la moda, el rango, así como la aleatoriedad y la probabilidad. El uso de recursos tecnológicos es también reclamado por la normativa curricular.
- Los profesores tienen, no obstante, mucha libertad para fijar el tipo de situaciones que usarán, y sobre todo para fijar los tipos de prácticas operativas y discursivas que exigirán a los estudiantes (normas epistémicas); estas dependerán de la propia disciplina estadística y del contexto del aula en que se desarrolla el proceso de estudio (medios tecnológicos, conocimientos previos y las motivaciones de los estudiantes).
- La Didáctica de la matemática “recomienda” el uso del método de proyecto (Nolan y Speed, 1999; Connor, Davies y Holmes, 2006) para abordar el desarrollo de las competencias estadística de los estudiantes, como medio de lograr que los estudiantes atribuyan significado a las técnicas y el discurso estadístico, y favorecer los procesos de personalización de los conocimientos. Se trata pues de una norma externa al aula que condiciona y orienta el trabajo del profesor. Esta norma ecológica/ cognitiva puede entrar en conflicto con la práctica habitual en el estudio de las matemáticas, donde se considera que primero se presentan los conceptos y procedimientos, ilustrados con ejemplos sencillos, y después se aplican a otras situaciones más realistas. También es usual no tener en cuenta las distintas fases de los procesos de modelización matemática.
- Una orientación socio-constructivista del aprendizaje, que valora positivamente la autonomía y el trabajo cooperativo, es una fuente de normas para el docente: “Planifica e implementa las actividades de modo que los alumnos tengan una “estrategia de base” para abordar las tareas, bien individualmente y trabajando en equipo, y que “construyan” los conocimientos de manera autónoma”. Pero en la evolución de las trayectorias cognitivas de los estudiantes pueden aparecer bloqueos y conflictos que obligarán al profesor a modificar esas reglas iniciales socio-constructivistas, implementando configuraciones de tipo magistral. Esta circunstancia aumenta considerablemente la responsabilidad del profesor, al menos al principio de implementar este sistema, aunque con la práctica los tipos de conflictos de los estudiantes (que se repiten curso a curso) serán familiares al profesor, que dispondrá pues de indicadores para el control y mejora del funcionamiento del sistema didáctico.
- Una norma metaepistémica. La respuesta a la pregunta, “¿ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?”, requiere aplicar las normas epistémicas de la estadística. Cuando esta cuestión se aborda en secundaria obligatoria rige otra norma: “las diferencias entre distribuciones se comprueban mediante técnicas descriptivas y son referidas a las muestras usadas, no a las poblaciones de donde provienen”. Como se dijo anteriormente, esta “debilidad” subjetiva en cuanto a la importancia relativa de las diferencias estadísticas también afecta a las técnicas inferenciales donde es necesario adoptar un

nivel de significación en los contrastes de hipótesis que depende de factores contextuales, en cierto modo subjetivos.

- Una norma metainstruccional. La norma instruccional “El análisis de datos debe realizarse usando recursos tecnológicos de cálculo y representación gráfica” debe ser complementada con esta otra: “El uso de recursos tecnológicos debe evitar el fenómeno de *deslizamiento metadidáctico* (Brousseau, 1998) (aprender la tecnología, en lugar de desarrollar competencia estadística)”.

## 8. QUINTO NIVEL DE ANÁLISIS: IDONEIDAD DIDÁCTICA

Los análisis precedentes tienen una orientación descriptiva (¿qué puede ocurrir o qué ha ocurrido?...), y explicativa (¿por qué han actuado del tal modo el profesor y los estudiantes?...). Estos análisis deben proporcionar información para emitir un juicio valorativo sobre el proceso de estudio, abordable en el EOS mediante la aplicación de la noción de *idoneidad didáctica* (Figura 6), desarrollada en Godino, Contreras y Font (2006); Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007).

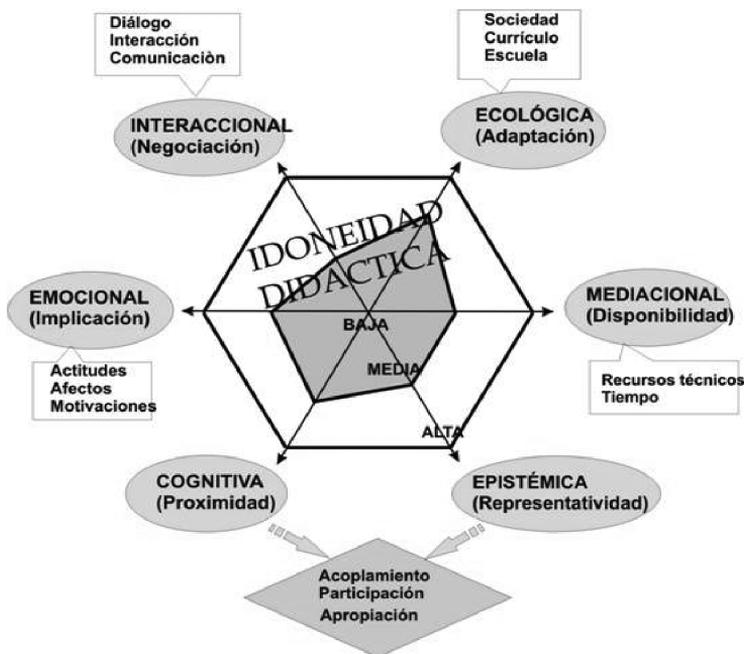


Figura 6: Idoneidad didáctica

La aplicación de la noción de idoneidad didáctica requiere la reconstrucción de un significado de referencia para los objetos matemáticos y didácticos pretendidos, por lo que la primera cuestión que se debe plantear se refiere a la caracterización de tales significados:

*¿Qué elementos de referencia deben utilizarse para valorar cada dimensión de la idoneidad didáctica?*

- Los elementos de referencia para valorar la idoneidad epistémica del proceso implementado deben ser los correspondientes al significado institucional pretendido por el docente. En cambio, para la idoneidad epistémica de la planificación habrá que indagar los elementos del significado del análisis elemental de datos e investigaciones publicadas relativas a su estudio en niveles educativos similares.
- Los elementos de referencia para las restantes dimensiones o facetas (cognitivo-afectiva, interaccional-mediacional y ecológica) deberán indagarse en los textos y publicaciones de investigaciones didácticas sobre dichos aspectos.

Trabajos de síntesis como los de Batanero (2001) pueden ser de gran ayuda en la reconstrucción de los significados de referencia a usar en una investigación particular.

*¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de estudio planificado/ implementado en cada una de sus dimensiones?*

*Idoneidad epistémica:*

- La situación-problema creada en torno a la pregunta, “¿ha sido efectivo el entrenamiento deportivo en el conjunto de la clase?”, permite contextualizar y poner en juego los “contenidos” de estadística descriptiva abordables en educación secundaria obligatoria. También se puede orientar hacia la estadística inferencial propia de niveles superiores, test de hipótesis, intervalos de confianza, análisis de varianza. La inclusión de variables adicionales, como peso y altura de los sujetos, permite ampliar el estudio hacia los temas de correlación y regresión, tanto desde un punto de vista descriptivo como inferencial.
- Se pueden poner en juego diversos modos de representación de los datos, sus traducciones y tratamientos (tablas, gráficos, lenguaje ordinario) que apoyan la argumentación estadística de las conclusiones sobre el efecto de las variables (tratamiento y sexo).
- Emergen nuevos conocimientos estadísticos referidos a la comparación de distribuciones de frecuencias, apoyados en los conceptos, propiedades y procedimientos previos (medidas de posición central, dispersión y forma).

*Idoneidad cognitiva:*

- El proyecto es graduable y adaptable a distintos niveles de competencia estadística inicial de los estudiantes. Con el apoyo del docente, y el trabajo cooperativo, las nuevas competencias suponen un cierto reto cognitivo que está en la zona de desarrollo potencial de los sujetos.
- Es posible definir subtareas adaptables a distintos niveles de capacidad de los estudiantes, tanto más elementales como avanzadas.

*Idoneidad afectiva:*

- El contexto del proyecto es de interés potencial para los estudiantes de secundaria, al referirse al tema del entrenamiento deportivo.

- La forma de trabajo cooperativo y el uso de recursos tecnológicos puede ser otro factor motivador.
- No obstante, será necesario que el profesor reconozca las dificultades potenciales de algunos estudiantes a fin de que al menos algunos aspectos del proyecto estén a su alcance. De lo contrario puede ser un factor de rechazo, ansiedad y temor al estudio de cuestiones que pueden ser demasiado complejas y fuera de su alcance.

*Idoneidad interaccional:*

- El desarrollo del proyecto facilita la implementación de momentos de trabajo personal y en cooperación (en horas de trabajo fuera del aula; en casa, o en salas de estudio). Este formato de interacción facilitará los procesos de personalización, reconocimiento de conflictos y su potencial solución en el seno de los equipos de trabajo.
- El uso de horas de tutoría deberá complementar las fases de trabajo individual para aclarar puntos y resolver potenciales conflictos.
- La discusión colectiva y la institucionalización final del profesor debe permitir resolver los conflictos y compartir los significados institucionales pretendidos.

*Idoneidad mediacional:*

- Será necesario atender a las dificultades potenciales de los alumnos con el uso de la hoja Excel, o los dispositivos de cálculo que se usen.
- El tiempo didáctico debe ser suficiente en sus diversas modalidades (estudio personal, cooperativo, tutorial, presencial).
- La duración de los intervalos de interacción con el profesor, en particular la interrupción de los momentos de trabajo autónomo de los alumnos, y los momentos de institucionalización tras las correspondientes fases de discusión serán aspectos críticos del proceso de aprendizaje.

*Idoneidad ecológica:*

- El proyecto cumple con los requisitos dados por las orientaciones curriculares para el estudio del bloque temático de tratamiento de la información.
- Incorpora sugerencias aportadas por la investigación didáctica relativas al uso del método de proyectos en la educación estadística y las distintas fases de los procesos de modelización matemática.
- El proyecto incorpora relaciones con otras áreas curriculares (evaluación de resultados de pruebas de entrenamiento deportivo).

Una vez descrita la idoneidad de cada una de las dimensiones, es necesario preguntarse por la “mejora del proceso”, esto es, ¿se puede modificar algún aspecto de las dimensiones para hacer el proceso más idóneo? La concepción sistémica de la Didáctica de las Matemáticas permite afirmar que un cambio en cualquiera de los componentes del sistema didáctico determina un desequilibrio de dicho sistema y un equilibrio posterior. Este equilibrio último debe ser valorado globalmente y no únicamente según el componente sobre el cual se ha incidido. Con otras palabras, la búsqueda de mejora de la idoneidad de una de las dimensiones modifica la idoneidad didáctica global, no únicamente la dimensión “intervenida”. Todo cambio supone una revisión global del proceso y, en particular, la determinación de restricciones, limitaciones o implicaciones sobre otras dimensiones.

## 9. REFLEXIONES FINALES

El análisis de las tareas sobre las que se organizan las correspondientes configuraciones didáctica, a nivel de prácticas operativas y discursivas relativas al contexto institucional fijado y de procesos cognitivos asociados, es un paso previo necesario para la elaboración de instrumentos de evaluación de los aprendizajes. El modelo epistémico y cognitivo que caracteriza al “enfoque ontosemiótico” del conocimiento matemático proporciona herramientas de análisis, como las aplicadas en el ejemplo descrito en este trabajo, que permiten diseñar trayectorias didácticas e instrumentos de evaluación con *validez ecológica*, esto es, adaptadas al contexto, a las competencias matemáticas iniciales de los estudiantes y a los objetivos de aprendizaje pretendidos e implementados. En consecuencia, la formación de profesores de matemáticas debe contemplar el desarrollo de competencias instrumentales específicas que les permitan realizar los tipos de análisis que hemos presentado en este trabajo.

La noción de idoneidad didáctica proporciona una *síntesis global* sobre los procesos de estudio matemático, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales y la identificación de conflictos semióticos potenciales. La idoneidad interaccional y mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles. El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio y, por tanto, la valoración de la idoneidad ecológica.

La idoneidad didáctica es una herramienta para el *análisis* y la *síntesis* didáctica que puede ser útil para la formación de profesores. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores. “La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva” (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202).

Pensamos que entre estas herramientas deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente, las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas, o experiencias de enseñanza observadas. Consideramos importante introducir en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas criterios para valorar la idoneidad de los procesos de estudio matemático, tanto si son basados en el uso de libros de texto, como si se trata de procesos apoyados en el uso de materiales y documentos de trabajo elaborados por el propio profesor.

La noción de idoneidad didáctica y las herramientas para su análisis y valoración que introducimos en este trabajo permiten establecer un puente entre una didáctica descriptiva-explicativa y su aplicación para el diseño, implementación y evaluación de intervenciones educativas específicas. En consecuencia, la formación de profesores de matemáticas puede orientarse de manera global y sistemática hacia el análisis y valoración de la idoneidad didáctica de propuestas curriculares, programaciones de aula, así como de experiencias de enseñanza y aprendizaje.

Es necesario que los profesores planifiquen la enseñanza teniendo en cuenta los significados institucionales que se pretenden estudiar, adoptando para los mismos una visión amplia, no reducida a los aspectos discursivos (idoneidad epistémica). Asimismo, es necesario diseñar e implementar una trayectoria didáctica que tenga en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes (idoneidad cognitiva), identificar y resolver los conflictos semióticos que aparecen en todo proceso de estudio, empleando los recursos materiales y temporales necesarios (idoneidad interaccional y mediacional). Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, uno de cuyos indicadores empíricos puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/ implementados (idoneidad cognitiva).

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>
- Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London, UK: The Macmillan Press.
- Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Connor D., Davies N., Holmes P. (2006). Using real data and technology to develop statistical thinking. En G. Burrill (Ed.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance* (pp. 185- 194). NCTM, 68 Yearbook.
- D'Amore, B., Font, V. y Godino, J.D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, Vol. XXVIII, N° 2, 49-77.
- D'Amore, B. y Godino, J.D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 191-218.

- Eco, U. (1976). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.
- Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York, NY: SUNY.
- Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.
- Font, V., Godino, J.D., y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.
- Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 22 (2/3), 237-284
- Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J.D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.
- Godino, J.D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J.D. y Font, V. (2007a). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. URL: [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)
- Godino, J.D. y Font, V. (2007b) Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas. URL: [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)
- Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R. y Castro, C. de (2007). Una aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas. *Conferencia invitada en la RELME 21*, Maracaibo.
- Hiebert, J., Morris, A.K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An “experiment” model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 66, 201-222.
- Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje* (1971). Madrid: Gredos.
- Maturana, H. y Varela, F. (1984). *El árbol del conocimiento*. Madrid: Debate, 1996.
- Morin, E. (1977). *El método I; la naturaleza de la naturaleza* (1986). Madrid: Cátedra.
- Nolan D., Speed T.P. (1999). Teaching statistics theory through applications. *American Statistician*, 53, 370-375.
- Peirce, C.S. 1931-1958. *Collected Papers*. Vols. 1-8, C.Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 39-65.
- Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En Frank K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Charlotte NC: NCTM e IAP.