

LÍMITE INFINITO DE SUCESIONES EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES: DESDE 1936 HASTA 2019

Mónica Arnal-Palacián, Javier Claros-Mellado y María T. Sánchez-Compañá

En este trabajo se realiza la búsqueda y el análisis de fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión en 35 libros de texto españoles de matemáticas editados desde el año 1936 hasta el año 2019. A partir de la construcción de un instrumento basado en los fenómenos caracterizados para el límite infinito de una sucesión y el análisis de la información recogida por este, se establece la identificación de estos fenómenos en los diferentes sistemas de representación y formatos. La evolución histórica de estos fenómenos y la comparación entre algunos periodos legislativos muestra que dichos fenómenos se presentan de manera aislada sin utilizar diferentes sistemas de representación y formatos, dificultando con ello su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Términos clave: Libros de texto; Límite infinito de una sucesión; Fenomenología; Legislación educativa española

Infinite Limit of Sequences in Spanish Textbooks: Since 1936 to 2019

In this paper, we carry out the research and the analysis of phenomena organized by the infinite limit of a sequence in 35 Spanish textbooks of Mathematics published from 1936 to 2019. From a construction of an instrument based on the phenomena characterized by an infinite limit of a sequence and the analysis of the information collected by it, we establish the identification of these phenomena in a different way of representation and formats. The historical evolution of these phenomena and the comparison between some of legislative periods shows these phenomena are presented in an isolated way without using different systems of representation and formats, making difficult with it their teaching-learning process.

Keywords: Textbooks; Infinite Limit of Sequences; Phenomenology; Spanish Educational Legislation.

Los libros de texto de Educación Secundaria en España han modificado la manera de presentar los contenidos durante todo el siglo XX y principios del siglo XXI. Estas modificaciones tienen relación tanto en la formulación de las definiciones como en los problemas propuestos a los alumnos (González-Astudillo y Sierra, 2004).

La noción de límite no ha sido ajena a estos cambios. Su presentación se ha modificado a lo largo del tiempo y además se ha visto influenciada por los diferentes periodos educativos. Estos cambios en los libros de texto, teniendo en cuenta la fenomenología en el sentido dado por Freudenthal (1983), los enfoques intuitivo y formal, los sistemas de representación y formatos, ya fueron estudiados para el límite finito de una sucesión (Claros, 2010) y límite finito de una función en un punto (Sánchez, 2012), así como la comparación de ambos en Claros et al. (2016). Además de los estudios de libros de texto, en el equipo investigador también se abordaron las nociones de límite finito de una sucesión con alumnado de bachillerato (Claros, 2010), el límite finito de una función en un punto para el profesorado en activo (Sánchez, 2012) y el límite infinito de una sucesión con el profesorado en formación (Arnal-Palacián, 2019).

Como consecuencia de estudiar de manera particular la evolución de cada uno de los límites indicados, surge el presente estudio para abordar la noción de límite infinito de una sucesión. Se establece como objetivo general del estudio:

Estudiar los fenómenos caracterizados a partir de una definición del límite infinito de una sucesión en los libros de texto de matemáticas de Educación Secundaria y Bachillerato en un periodo de más de 80 años, desde el año 1936 hasta el 2019.

Además, como objetivos específicos pretendemos:

- ◆ Identificar y comparar la existencia de estos fenómenos en los libros de texto tomando en consideración los diferentes sistemas de representación (verbal, tabular, gráfico y simbólico) y los distintos formatos (ejemplo y definición).
- ◆ Comparar a través de una evolución histórica la noción de límite infinito de una sucesión a partir de los fenómenos identificados en cada uno de los sistemas de representación y formatos.

Los fenómenos que pretendemos detectar en este estudio ya fueron observados en una definición de límite infinito de una sucesión (Arnal-Palacián et al., 2020) y tras un exhaustivo análisis de esta, se caracterizaron, siguiendo la fenomenología de Freudenthal (1983). Estos fenómenos fueron: Crecimiento Intuitivo Ilimitado, Decrecimiento Intuitivo Ilimitado e Ida y vuelta en sucesiones de límite infinito. Una vez identificados los fenómenos, se consideraron dos enfoques: el intuitivo y el formal, formas de presentación en las que aparece la enseñanza de la noción de límite en Bachillerato. Además, tuvimos en cuenta los sistemas de representación, es decir, las formas de expresar y simbolizar algunas estructuras numéricas aportando diferentes significados de

un mismo concepto y organizar los símbolos presentes en las nociones matemáticas (Castro et al., 1997). Entre ellos consideramos los sistemas verbal, tabular, simbólico y gráfico (Janvier, 1987; Rico, 2009). Asimismo, como ya estableciesen Claros (2010) y Sánchez (2012) para el estudio de otros límites, tendremos en cuenta las definiciones y ejemplos en las que se presentan los fenómenos, que denominaremos formatos.

El estudio empírico que se presenta incluye: una descripción de la muestra de 35 libros considerada; la descripción del instrumento utilizado para el análisis de cada uno de estos libros de texto, pudiendo ser replicable en futuros estudios, tanto de nociones asociadas al límite como para cualquier otro concepto matemático; los resultados muestran cómo ha evolucionado, desde 1936 hasta 2019, la noción de límite infinito de una sucesión, atendiendo a los fenómenos que se usan para presentarla, los sistemas de representación y los formatos. Finalmente realizamos un resumen de los resultados y las conclusiones obtenidas.

ANTECEDENTES

Este apartado se encuentra estructurado de la siguiente forma: investigaciones centradas en el análisis de libros de texto en educación matemática de manera general e investigaciones relativas al límite en estos manuales y el currículo.

Análisis de libros de texto

El límite infinito de una sucesión no se encuentra presente de forma explícita en las últimas leyes educativas españolas. Como establecen Conejo y Ortega (2014), el uso de los libros de texto determina la enseñanza de un país, incluso con mayor influencia que la ejercida por las órdenes ministeriales. Puesto que dicha noción sí está presente en los libros de texto como veremos más adelante, queda justificado su estudio.

Mengual et al. (2017), en la misma línea anterior, consideran el currículo potencial determinado por las diversas publicaciones docentes y materiales, entre ellos los libros de texto, desarrollando el currículo oficial desde un punto de vista teórico y práctico.

El libro de texto es un recurso habitual en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las aulas, e incluso su uso es el que determina el currículo real, siendo complicada su elección por parte del profesorado (Monterrubio y Ortega, 2009). Es por ello que un estudio de la noción del límite infinito de una sucesión a través de cómo los libros de texto presentan dicha noción nos puede dar pistas sobre cómo los docentes abordan su enseñanza dentro de las aulas. Esto proporciona, por lo tanto, un punto de partida para la mejora de la enseñanza que ayude a superar las dificultades señaladas por muchos autores, entre los que se encuentran Morales et al. (2013) e Irazoqui y Medina (2013).

Pepin et al. (2013) sostienen que actualmente el libro de texto todavía ocupa un lugar central para los profesores de matemáticas. El profesorado utiliza los manuales con mucha frecuencia, tanto en clase como para la preparación de las lecciones. Esta afirmación afianza la idea de Cockcroft (1985) quien aseguraba que los libros constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el aula.

Los libros no solamente pueden determinar la enseñanza de un país, sino que, desde el punto de vista de la investigación en Didáctica de la Matemática, las investigaciones de libros de texto es un tema interesante y recurrente, que ayuda a mejorar la enseñanza de las matemáticas (Marco-Buzunáriz et al., 2016).

Esta importancia no ha sido reconocida hasta hace pocos años, a pesar de contar con manuales en el ámbito escolar desde el siglo XVIII. Estos estudios parten del libro de texto como apoyo y fuente de información para el alumnado y el profesorado, aunque sean en algunas ocasiones centro del debate educativo. Los libros de texto, o manuales escolares, surgieron para dar respuesta a los requerimientos del sistema educativo: para suplir la falta de profesorado con la formación necesaria, dar respuesta al modelo de enseñanza simultánea y adaptarse a las características del alumnado en los diferentes niveles educativos. El análisis de los libros de texto se realiza para determinar su elección como medio de instrucción, y posteriormente, para poder indagar en aquello que ha sido o es la práctica real de la enseñanza, al ser el único registro disponible del conocimiento matemático que la educación ha transmitido (Gómez, 2011).

El límite en los libros de texto y el currículo

Para poder avanzar en la investigación de libros de texto, los estudios deben partir de cuestiones descriptivas y tratar un tema de manera particular (Fan, 2013). Siguiendo estas recomendaciones en este estudio se ha trabajado de forma específica con el límite infinito de una sucesión, realizando un análisis descriptivo de la unidad en la que aparecía la noción de límite infinito de una sucesión.

La presencia de algunos límites en los libros de texto ya ha sido estudiada con anterioridad para la noción de límite de manera general (Blázquez, 1999; Sierra et al., 2003), para el límite finito de una sucesión (Claros, 2010), para el límite finito de una función en un punto (Sánchez, 2012), para la relación de los dos límites anteriores (Claros et al., 2016), entre otros. En todas estas investigaciones se consideran libros de texto desde la Ley Moyano hasta la LOGSE.

La noción de límite infinito de una sucesión tiene asociada una serie de dificultades, entre ellas la noción de infinito. La incorporación de la noción de infinito al currículo y los libros de texto presenta, según Belmonte y Sierra (2011), una singularidad frente a cualquier otra noción: no se define, ni se acompaña de manual de uso. Según los estudios de estos autores, hasta la finalización de bachillerato no es fácil encontrar referencias explícitas sobre el

significado de infinito en un contexto educativo. El infinito desempeña un papel exclusivamente simbólico o como sinónimo de muy grande o de muy pequeño.

En este contexto educativo, Herrera et al. (2013) tratan de esclarecer cual es la conceptualización más sencilla del límite, que puede ser más adecuada para su uso en los currículos de educación secundaria, bachillerato y el primer curso de carreras de ingeniería y similares.

En investigaciones anteriores del límite en manuales universitarios ya se detectó que la mayor parte de ellos potenciaban esta noción como un proceso, dando más importancia a las propiedades de cálculo que a la propia noción, acentuando todavía más este aspecto en las actividades que se proponen para afianzar los conocimientos (González-Ruiz et al., 2014).

Particularizando en un análisis histórico de la noción de límite nos encontramos el estudio de Sánchez y Contreras (1998), quienes distinguen varias concepciones ligadas a esta noción: concepción geométrica, concepción numérica, concepción analítica o métrica y concepción topológica. Los autores comprobaron que la noción de límite de una función presentaba modificaciones metodológicas en el transcurso del tiempo. En cada manual los autores consideraban las siguientes variables: forma de introducir la noción de límite, la definición que formalizaba la noción, qué ejemplos aparecían, que concepciones derivaban y obstáculos y dificultades extraídas de los contenidos. En este análisis detectan que desde el año 1990 el límite de una función se apoya en el conocimiento previo del límite de una sucesión. Además, se ha prescindido de la definición topológica en los últimos años, evitando la rigurosidad de los manuales de enseñanzas medias de los años 80, además de la ausencia de situaciones didácticas en las que apareciera la concepción geométrica del límite.

Lo realizado en este estudio nos dio pistas para el nuestro, en el que podríamos observar conclusiones similares para el caso del límite infinito de una sucesión. La aportación de nuestro estudio se centrará en la identificación en los libros de texto de los fenómenos organizados por el límite infinito de una sucesión, y el uso que los autores han hecho de ellos a lo largo de los tiempos.

Desde la perspectiva curricular española, Blázquez (1999) señala que la LOGSE intentaba remediar el exceso formalismo de la LGE introduciendo las nociones de una forma más intuitiva. La autora destaca que este exceso de formalismo provocaba la creencia en el profesorado de que el aprendizaje de las matemáticas fuese inasequible para el alumnado por su insuficiente madurez.

Tomando en cuenta estas mismas leyes educativas, Sierra et al. (1999) diferencian dos tratamientos del límite durante las diferentes etapas educativas en España. El primero de ellos va ligado a la noción de sucesión y variable. Este tratamiento es denominado “de modo oscuro”, y parte de la idea de infinitésimos e incrementos, además de contener representaciones gráficas muy escasas. En el segundo se ofrece una definición de límite y se completa con una interpretación geométrica y un aumento de las representaciones gráficas. Se utilizan también contraejemplos sobre la existencia de límite. En ambos tratamientos del límite, el

desarrollo es secuencial y formal y las demostraciones no son rigurosas, predominando como consecuencia de ello el enfoque intuitivo.

A lo largo de este estudio se podrá comprobar que la presentación de la noción de límite infinito de una sucesión se ve muy influida por la ley educativa vigente en el momento de publicación del libro. A pesar de esto, el desarrollo de los libros de texto no ha sido uniforme en cada uno de estos periodos educativos (entendemos por periodo educativo el tiempo en el que está vigente una ley educativa), existiendo diferencias entre ellos a pesar de que debiesen ajustarse a las leyes vigentes, coexistiendo por lo tanto libros de texto de planes distintos (Sierra et al., 2003). También sucede que un libro de texto, a pesar de ajustarse a la ley vigente, siga arrastrando en enfoque de otra ley educativa, ya que la realización del manual está muy condicionado por el autor del mismo (Claros, 2010).

FENÓMENOS DEFINIDOS PARA EL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Los fenómenos que se pretenden detectar en este estudio fueron presentados en la tesis doctoral de Arnal-Palacián (2019). En dicho trabajo se caracterizaron tres fenómenos, en el sentido dado por Freudenthal (1983), organizados a partir de una definición del límite infinito de una sucesión: Crecimiento Intuitivo Ilimitado (c-i.i.) y Decrecimiento Intuitivo Ilimitado (d-i.i.), desde un enfoque intuitivo, e Ida y vuelta en sucesiones de límite infinito o de retroalimentación (i.v.s.i.), desde un enfoque formal. Estos fenómenos habían sido caracterizados tomando la siguiente definición: “Sea K un cuerpo ordenado, y $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de K . La sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite “más infinito”, si para cada elemento H de K , existe un número natural v , tal que es $\{a_n\} > H$, para todo $n \geq v$ ” (Linés, 1983, p. 29).

La elección de esta definición vino determinada a partir de un cuestionario a expertos en educación matemática (Arnal et al., 2017).

Crecimiento Intuitivo Ilimitado

Observamos que una sucesión creciente cumple la idea de que los valores de la sucesión se van haciendo cada vez mayores. Si $n > m$, entonces $s(n) > s(m)$ ($s(n)$ término general de la sucesión). Al comprobarlo para varios valores, deducimos intuitivamente que la sucesión es creciente.

Las sucesiones crecientes pueden estar acotadas superiormente o ser no acotadas. En el primer caso, el límite será finito y no es el objeto de esta investigación dado que fue ya estudiado por Claros (2010). En el segundo caso, para las sucesiones crecientes no acotadas, no tendremos un número real mayor a todos los valores de la sucesión y por tanto tendremos un crecimiento ilimitado.

Decrecimiento Intuitivo Ilimitado

De forma análoga al Crecimiento Intuitivo Ilimitado, observamos que una sucesión decreciente cumple la idea de que los valores de la sucesión se van haciendo cada vez más pequeños, entendiendo por pequeños aquellos números negativos cuyo valor absoluto es cada vez mayor. Si $n > m$, entonces $s(n) < s(m)$. Al comprobarlo para varios valores, deducimos intuitivamente que la sucesión es decreciente.

Las sucesiones decrecientes, podrán estar acotadas inferiormente o no estar acotadas. En el primer caso, el límite será finito y no es el objeto de esta investigación (véase Claros, 2010). En el segundo caso, para las sucesiones decrecientes no acotadas, no tendremos un número real menor a todos los valores de la sucesión y por tanto tendremos un decrecimiento ilimitado. Dado que la sucesión tiene infinitos términos y la sucesión no está acotada inferiormente, decrece de forma ilimitada.

Ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (retroalimentación)

Para el límite más infinito podemos observar dos procesos que determinan el fenómeno de Ida y vuelta en sucesiones de límite más infinito:

- ◆ El primer proceso, denominado “ida” corresponde al fragmento: “si para cada elemento H de K , existe un número natural v ”.
- ◆ El segundo proceso, denominado “vuelta” corresponde al fragmento “tal que es $a_n > H$, para todo $n \geq v$ ”.

La retroalimentación se manifiesta al observar de forma conjunta estos dos procesos. En concreto, al interpretar y aplicar los procesos incluidos en la definición de límite infinito de una sucesión. Esto exige la construcción de una función $H \rightarrow n(H)$.

Establecido un H “vamos” desde él hasta un v perteneciente a los números naturales (no único) y “volvemos” considerando $n \geq v$ para el que tendremos $a_n > H$. De esta manera se construye una función real que toma valores naturales y que denotamos de manera simplificada como $(H, n(H))$.

DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO EMPÍRICO DE LIBROS DE TEXTO

Se ha llevado a cabo un estudio empírico de carácter exploratorio, en el que se muestra cómo los diferentes autores de libros de texto seleccionados usan los fenómenos intuitivos y de retroalimentación cuando tenían que presentar la noción de límite infinito de una sucesión. La metodología seguida ha implicado dos pasos importantes, la descripción de la muestra empleada y el análisis de los textos seleccionados. Para realizar dicho análisis se ha diseñado un instrumento específico creado por el equipo investigador, que se describe más adelante.

La construcción de este instrumento puede verse en Arnal-Palacián (2019) y tuvo en cuenta el análisis de contenido de Rico et al. (2008) usado por Picado y

Rico (2011). La principal diferencia del instrumento de Arnal-Palacián (2019) y el análisis de contenido es que en el primero se recogen los conceptos, sistemas de representación y fenomenología de manera conjunta y no como tres categorías diferentes. Esto puede verse en la ficha fenomenológica en la que se recogen conjuntamente los fenómenos, los sistemas de representación y la noción de límite. Además, en nuestro instrumento se ha usado una ficha para identificar el libro analizado, así como una codificación específica para el recuento de los fenómenos en cada libro.

Este apartado se encuentra estructurado en dos subapartados. En el primero de ellos, se describe la muestra utilizada, compuesta por 35 libros de texto, mientras que en el segundo se precisa el instrumento utilizado para el análisis de cada uno de los manuales.

Descripción de la muestra

En este estudio se ha considerado una muestra de 35 libros de texto, de 18 editoriales diferentes y publicados entre 1936 y 2019 en España. Para estudiar la evolución histórica que se presentará en el apartado 5.2 se han considerado los siguientes periodos legislativos, atendiendo a las leyes educativas vigentes en España: 1936-1974, 1975-1994, 1995-2004, 2005-2014 y 2015-2019.

En consecuencia, se ha considerado la siguiente legislación educativa española: Ley Moyano, Ley General de Educación (LGE), Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), Ley Orgánica de Educación (LOE) y Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). Otras, como la LOECE, LODE, LOPEG y LOCE no se han tomado en consideración; bien porque no se modificase el currículo anterior, en el caso de la LOECE, LODE y LOPEG, bien por su corta duración, la LOCE.

Existe un ligero desfase entre el comienzo de la ley en vigor y el comienzo del periodo considerado para este estudio, motivado por su implantación en el curso donde aparece el límite infinito de una sucesión: 6º curso, para Ley Moyano; 2º BUP, para LGE; y 1º Bachillerato, para LOGSE, LOE y LOMCE.

La muestra utilizada es intencional, ya que se han analizado aquellos libros de texto a los que se han tenido acceso, además de considerar diferentes editoriales de publicación. Algunos de ellos ya formaron parte de la muestra de Claros et al. (2016), mientras que otros surgieron de una nueva búsqueda para completar los últimos quince años y también sustituir a libros de texto ya empleados que no pudieron utilizarse por no aparecer la noción estudiada en el presente manuscrito. Para ello se ha recurrido a bibliotecas de las facultades de Educación de la Universidad Complutense de Madrid y Universidad de Zaragoza, y de sus departamentos. Además, se han consultado los libros de texto del Instituto de Enseñanza Secundaria Pedro Espinosa de Antequera (Málaga), y diferentes fondos particulares. Para acceder a los manuales más antiguos, editados entre los años 1936 y 1969, en la Ley Moyano, tuvimos que acudir a la Biblioteca Nacional de España (BNE). Véase tabla 1.

Tabla 1

Resumen de la muestra de libros de texto por periodos legislativos

Periodo legislativo	Nº de libros	Nº editoriales	Editoriales
Ley Moyano	8	5	Ministerio de Educación y Ciencia, Nuevas gráficas, SAETA, Stylos, Summa
LGE	13	10	AKAL, Alhambra, Anaya, ECIR, Edebé, Edelvives Librería central, Magisterio Español, SM, Vicens-Vives
LOGSE	6	4	Bruño, Oxford, Santillana, SM
LOE	4	3	Anaya, Santillana, SM
LOMCE	4	3	Edebé, Santillana, SM

Forman la muestra solo aquellos libros de texto en los que se ha identificado alguno de los tres fenómenos caracterizados a partir de una definición del límite infinito de una sucesión. Han sido causa de exclusión aquéllos en los que no apareciese el límite infinito de una sucesión y también aquéllos en los que no se identificase ninguno de estos fenómenos.

Descripción del instrumento

Para este estudio empírico se ha realizado un análisis minucioso de cada una de las unidades didácticas de los libros de texto donde apareciese la noción límite infinito de una sucesión. Para ello se elaboró un instrumento que facilitase dicho análisis, inspirado en el utilizado en Claros (2010), Sánchez (2012) y Claros et al. (2016). Este instrumento se compuso de: ficha del libro, fenómenos identificados y ficha fenomenológica. Cada uno de estos 3 criterios permite recuperar la información del manual y ser capaces de comprender cada uno de los pasos realizados, además de poder replicarlo en estudios futuros a otros límites.

Ficha del libro

La ficha del libro (véase figura 1) facilita la organización e identificación de cada uno de los manuales. Recoge los siguientes datos: código, título, autor, año, ley en vigor y editorial.

Código			
Título			
Autor			
Año		Ley en vigor	
Editorial			

Figura 1. Ficha del libro.

- ◆ El código identifica de forma unívoca cada uno de los libros de texto. Las tres primeras letras para indicar “límite infinito de una sucesión”, modificando el código LS utilizado por Claros (2010) para el límite finito de una sucesión. Así las dos primeras siglas indican que nos referimos al límite de una sucesión (en el caso del límite funcional fue LF) y la tercera hace referencia a infinito. El conjunto LSI indica límite infinito de sucesiones. Los tres dígitos siguientes para la década del libro; y los dos últimos el identificativo del libro. Ejemplo: LSI99001.
- ◆ El título se recoge de la portada. En él es habitual observar la asignatura o materia y el curso para el que ha sido desarrollado.
- ◆ El autor o autores del libro de texto se han obtenido de la portada, de la primera página o de la última. El orden plasmado en la ficha del libro es el mismo que establece el manual.
- ◆ El año corresponde a la fecha de publicación, recurriendo en algunos casos a la fecha que indica el depósito legal.
- ◆ La ley en vigor, tomado en relación con el año de publicación. En algunos manuales se indica de forma explícita, pero en la gran mayoría se ha tenido que recurrir a su fecha de publicación y establecer la ley vigente para ese curso.
- ◆ La editorial, recogida de la portada.

Fenómenos identificados

En este criterio se recogen cada uno de los fragmentos en los que se ha identificado alguno de los tres fenómenos caracterizados en este estudio: c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i. En cada uno de ellos, además de indicar el fenómeno, se especifica el sistema de representación: verbal, gráfico, tabular o simbólico, y el formato: definición o ejemplo, en el que se encuentra. Consideramos como formato ejemplo aquellos ejercicios resueltos facilitados en el libro de texto, y no a las diferentes tareas planteadas para ser resueltas por el estudiante. Las tareas propuestas fueron revisadas en Arnal-Palacián (2019), pero no han sido incluidas en este estudio porque no incluían los fenómenos descritos, al tratarse solamente de enunciados que debían ser resueltos por los estudiantes. A continuación, se presenta un ejemplo de la codificación utilizada para los fragmentos (véase figura 2).

LSI99001.02 c-i.i. (v-d)

Figura 2. Ejemplo de código de un fragmento.

El orden tomado para su presentación es exactamente el mismo en el que aparece en el libro de texto y su código identificativo contiene dos aspectos: el código de ubicación y el código del fenómeno.

El código de ubicación concatena, separado por un punto, el código establecido para el libro de texto con el orden en el que aparece. Como muestra de ello, en el ejemplo presentado aparece el código del libro, LSI99001, al que se le concatena, separado por un punto, 02; siendo así el segundo fragmento donde se ha identificado alguno de los fenómenos en este libro de texto.

El código del fenómeno contiene en primer lugar el fenómeno identificado, seguido de un paréntesis con dos letras, las cuales se encuentran separadas por un guion "-". La primera de ellas presenta el sistema de presentación: verbal (v), gráfico (g), tabular (t) o simbólico (s), mientras que la segunda indica el formato: definición (d) o ejemplo (e). En el caso particular del ejemplo considerado: c-i.i. (v-d).

En ocasiones, cuando en un fragmento aparece más de un sistema de representación o formato, a este código se le concatenó numeración correlativa.

Ficha fenomenológica

La ficha fenomenológica recopila en una tabla (véase figura 3) los tres fenómenos, según su sistema de representación y su formato. Esta se cumplimenta para cada libro de texto con el código identificativo de cada uno de los fragmentos.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Una vez elaboradas las 35 fichas de los libros analizados y después de realizar un análisis cuantitativo exhaustivo, se detallan los siguientes resultados estructurados en dos apartados: sistemas de representación y formatos en los que se identifican cada uno de los fenómenos caracterizados, y la evolución histórica por periodos legislativos de cada uno de los fenómenos. El análisis detallado de cada uno de los libros que componen la muestra puede verse en Arnal-Palacián (2019), donde se presentó, de manera individual para cada libro de texto, la información recopilada a través del instrumento descrito. Posteriormente, se aunó esta información y se analizó de manera conjunta para los 35 libros de texto, teniendo en cuenta las diferentes leyes educativas y presentando los resultados obtenidos en este manuscrito.

		FENÓMENOS					
		Formal		Intuitivo			
		i.v.s.i.		c-i.i.		d-i.i.	
		Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	Verbal	LSI99005.01.04 LSI99005.02 LSI99005.05.04 LSI99005.06	LSI99005.01.02 LSI99005.04.02 LSI99005.05.02 LSI99005.08.02		LSI99005.03		LSI99005.07
	Gráfico				LSI99005.04.01		LSI99005.08.01
	Tabular				LSI99005.01.01		LSI99005.05.01
	Simbólico		LSI99005.01.03 LSI99005.05.03				

Figura 3. Ejemplo de ficha fenomenológica.

Resultados: sistemas de representación y formatos

El análisis de los libros de texto ha comenzado con el recuento de cada uno de los fragmentos encontrados asociados a cada uno de los fenómenos caracterizados, considerando su sistema de representación y formato, y que se presentaban en cada una de las unidades didácticas donde se encontraba la noción de límite infinito de una sucesión.

Sistemas de representación y formatos en los que se ha identificado c-i.i.

Se ha identificado el fenómeno c-i.i. en 56 fragmentos. En ellos, no se ha registrado el sistema de representación simbólico para ninguno de los formatos. Tampoco se perciben definiciones en el sistema de representación gráfico y tabular en ninguno de los libros de texto consultados. Además, el sistema de representación verbal presenta una mayor incidencia, 78.57%, siendo 33.93% de los casos definiciones y 44.64% ejemplos. El formato ejemplo es superior, casi el doble, al formato definición. Véase tabla 2.

Por otro lado, la sucesión $b_n = 2n$ verifica que sus términos se hacen cada vez mayores; es decir, *tienden a* $+\infty$: $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 6, b_4 = 8, b_5 = 10...$

Se dice que el límite de la sucesión es $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

Figura 4. Fragmento c-i.i. (Alcaide et al., 2016)

Tabla 2
Recuento del fenómeno c-i.i.

	Verbal	Gráfico	Tabular	Simbólico	Subtotales
Definición	33,93%	0%	0%	0%	33,93%
Ejemplo	44,64%	14,29%	7,14%	0%	66,07%
Subtotales	78,57%	14,29%	7,14%	0%	100%

Sirva a modo de ejemplo uno de los fragmentos considerados para el fenómeno c-i.i. en el sistema de representación tabular y formato ejemplo. Véase figura 4.

Sistemas de representación y formatos en los que se ha identificado d-i.i.

El fenómeno d-i.i. se ha identificado en 23 ocasiones. A pesar de que en todo momento hablamos de una analogía entre el c-i.i. y el d-i.i., su presencia en los libros de texto se reduce en más de la mitad. Pese a esta diferencia en el número de veces en el que es identificado, al igual que sucediese para el fenómeno c-i.i., no se ha identificado el fenómeno d-i.i. en el sistema de representación simbólico para ninguno de los formatos. Tampoco se han identificado en definiciones los sistemas de representación gráfico y tabular. Además, el sistema de representación verbal es el que tiene una mayor frecuencia, 69.57%, presentándose de forma equilibrada ambos formatos. Los ejemplos, de nuevo, concurren en mayor medida que las definiciones. Véase tabla 3.

Tabla 3
Recuento del fenómeno d-i.i.

	Verbal	Gráfico	Tabular	Simbólico	Subtotales
Definición	39,13%	0%	0%	0%	39,13%
Ejemplo	30,44%	17,39%	13,04%	0%	60,87%
Subtotales	69,57%	17,39%	13,05%	0%	100%

Sirva a modo de ejemplo uno de los fragmentos considerados para el fenómeno d-i.i. en el sistema de representación tabular y formato ejemplo. Véase figura 5.

¿Si n se hace cada vez mayor, a qué valor se aproximan los términos de la sucesión $a_n = -n^2 + 1$?

Dando valores a n cada vez mayores se obtiene la siguiente tabla:

n	1	10	100	1 000	...	→	$+\infty$
a_n	0	-99	-9 999	-999 999	...	→	$-\infty$

Figura 5. Fragmento d-i.i. (Vizmanos y Anzola, 1996)

Sistemas de representación y formatos en los que se ha identificado i.v.s.i.

El fenómeno i.v.s.i. ha podido identificarse en 107 ocasiones, un número superior de veces a la suma de los dos fenómenos intuitivos. Este fenómeno ha sido posible reconocerlo en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico; mientras que no se ha encontrado ningún fragmento que correspondiese al sistema de representación tabular. Además, el sistema de representación gráfico solo se ha identificado en definiciones y acompañado en un mismo fragmento de otros sistemas de representación, al contrario de lo que ocurriese para los fenómenos c-i.i. y d-i.i. donde este sistema de representación había sido identificado para ejemplos y un porcentaje más elevado. De nuevo, el sistema de representación predominante es el verbal, 77.57%, mientras que el formato predominante es la definición. Véase tabla 4.

Tabla 4

Recuento del fenómeno i.v.s.i.

	Verbal	Gráfico	Tabular	Simbólico	Subtotales
Definición	44,86%	2,80%	0%	9,35%	57,01%
Ejemplo	32,71%	0%	0%	10,28%	42,99%
Subtotales	77,57%	2,80%	0%	19,63%	100%

Sirva a modo de ejemplo uno de los fragmentos considerados para el fenómeno i.v.s.i. en el sistema de representación simbólica y formato definición. Véase figura 6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{N} / \forall n > K, a_n > M$$

figura 6. Fragmento i.v.s.i. (González et al., 1986)

Relación entre los tres fenómenos en función de los sistemas de representación y formatos en los que se identifican

Durante toda esta investigación se ha otorgado una gran relevancia a los sistemas de representación y los formatos en los que apareciesen los fenómenos. Por este motivo se presentan algunos gráficos que recogen la información enfatizando estos dos aspectos.

El primer aspecto que se ha tenido en cuenta es el sistema de representación. En la figura 7 se observan las frecuencias absolutas.

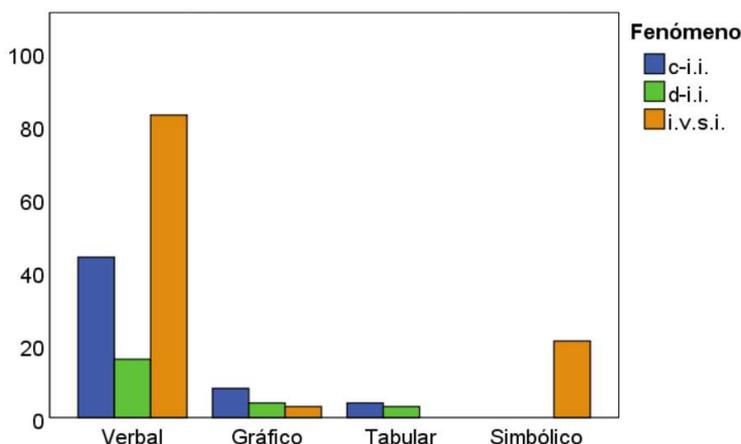


Figura 7. Sistemas de representación

El fenómeno c-i.i. se ha identificado un total de 44 veces en el sistema de representación verbal, 8 en el gráfico y 4 en el tabular. El sistema de representación simbólico no ha sido identificado en ninguno de los 35 libros que componen la muestra.

Lo mismo sucede con el fenómeno d-i.i. en cuanto a la dominancia del sistema de representación verbal, pero el número de veces que ha sido identificado ha sido muy inferior al fenómeno c-i.i. El sistema de representación verbal se ha identificado 16 veces. El sistema de representación simbólico, de nuevo, no ha sido identificado en los libros de texto de la muestra.

Aunque la identificación del fenómeno i.v.s.i. no tenga apenas similitudes en cuanto al sistema de representación en el que se encuentra respecto de los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, de nuevo el sistema de representación verbal es el dominante. En esta ocasión, el sistema de representación verbal está presente en un total de 83 fragmentos. El sistema de representación tabular no se ha identificado para este fenómeno en ninguno de los 35 libros de texto analizados de la muestra.

El segundo aspecto que se ha tenido en cuenta son los formatos. En la figura 8 se examina a través de las frecuencias absolutas.

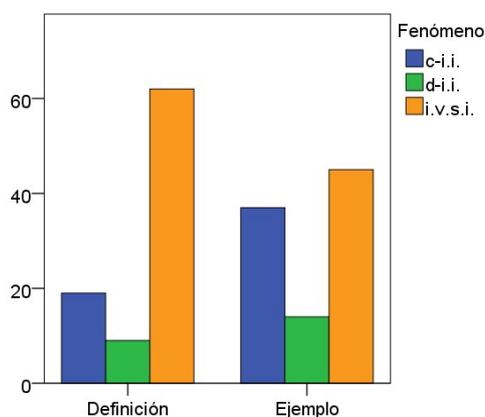


Figura 8. Formatos definición y ejemplo

El fenómeno c-i.i. se ha identificado un total de 56 veces, 19 veces en el formato definición y 37 en el formato ejemplo. El fenómeno d-i.i. se ha identificado un total de 23 veces, 9 en el formato definición y 14 en el formato ejemplo. Para el fenómeno i.v.s.i., se ha identificado una frecuencia mayor del formato definición que del formato ejemplo: 61 definiciones y 46 ejemplos.

Puede observarse que el enfoque de cada uno de los fenómenos se relaciona con la frecuencia absoluta del formato dominante, es decir, en el caso de los fenómenos de enfoque intuitivo, c-i.i. y d-i.i., tiene una mayor ocurrencia el formato ejemplo; mientras que, en el fenómeno de enfoque formal, i.v.s.i., tiene una mayor ocurrencia el formato definición.

En la siguiente figura, dedicada a los sistemas de representación y formatos, se observa la relación existente entre los fenómenos c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i., atendiendo al código fenomenológico.

Debemos considerar que las frecuencias absolutas no están equilibradas. El fenómeno i.v.s.i. tiene una mayor ocurrencia, 107, que los fenómenos c-i.i. y d-i.i., que aparecen en 56 y 23 ocasiones respectivamente. Véase figura 9.

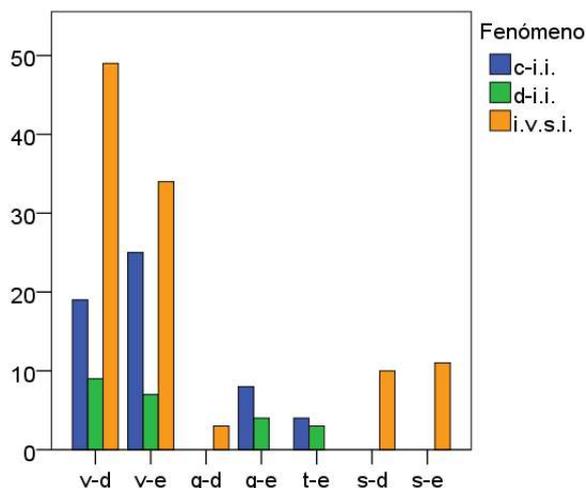


Figura 9. Relación de los códigos fenomenológicos

Desde esta premisa podemos establecer las siguientes relaciones entre los diferentes fenómenos:

- ◆ En el sistema de representación verbal, tanto en el formato definición como en el formato ejemplo predomina el fenómeno i.v.s.i. Las mayores frecuencias de los fenómenos de enfoque intuitivo, c-i.i. y d-i.i., también se dan en este sistema de representación, pero con una incidencia menor que para el fenómeno i.v.s.i.
- ◆ En el sistema de representación gráfico el único fenómeno que se presenta es el fenómeno i.v.s.i. en el formato definición, y el fenómeno c-i.i. en el formato ejemplo.

- ◆ El sistema de representación tabular y formato ejemplo se encuentra en los fenómenos c-i.i. y d-i.i. En el formato definición no se presenta ninguno de los fenómenos caracterizados.
- ◆ El sistema de presentación simbólico se presenta solo para el fenómeno i.v.s.i., con incidencia similar en ambos formatos.
- ◆ El fenómeno i.v.s.i. es el fenómeno con mayor frecuencia absoluta si contabilizamos todos los sistemas de representación y formatos.
- ◆ El fenómeno d-i.i. es el fenómeno con menor frecuencia absoluta si los comparamos con el resto de los fenómenos, independientemente del sistema de representación y formato.

Evolución histórica por periodos legislativos

En este apartado se encuentra la evolución histórica de cada uno de los fenómenos, teniendo en cuenta los diferentes periodos educativos. Cuando hablamos de periodos educativos, entendemos el periodo en el que está vigente la correspondiente ley educativa. Además, algunos sistemas de representación y formatos han sido identificados en más de un fenómeno, pudiendo ofrecerse así una evolución durante los últimos 80 años.

Hay que señalar que no se consiguió el mismo número de libros para cada uno de los periodos legislativos. Por este motivo se hizo indispensable realizar una adecuación de los datos. Se tomó la decisión, después de barajar diferentes opciones, de dividir la frecuencia absoluta entre el número de libros de cada periodo ($n_1=8$, $n_2=13$, $n_3=6$, $n_4=4$ y $n_5=4$), obteniendo así el número de fenómenos por libro. Con ello, podemos realizar la comparación entre los diferentes periodos educativos, pese a contar con distinto número de libros de texto en cada uno de ellos.

Fenómeno c-i.i.

En la tabla 5 se muestra el número medio por libro de texto del fenómeno c-i.i. atendiendo a su código fenomenológico y la ley educativa en vigor en el momento en el que acaecen.

Tabla 5

Nº medio de fenómenos por libro. c-i.i. Periodos legislativos

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. v-d	0,63	0,62	0,5	0,5	0,25
c-i.i. v-e	0,38	0,85	0,67	0,75	1
c-i.i. g-d	0	0	0	0	0
c-i.i. g-e	0	0,15	0,67	0,5	0
c-i.i. t-d	0	0	0	0	0

Tabla 5

Nº medio de fenómenos por libro. c-i.i. Periodos legislativos

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0,25
c-i.i. s-d	0	0	0	0	0
c-i.i. s-e	0	0	0	0	0
Subtotales	1	1,62	2,34	1,75	1,5

Percibiendo los datos anteriores de una forma más visual se presenta la figura 10:

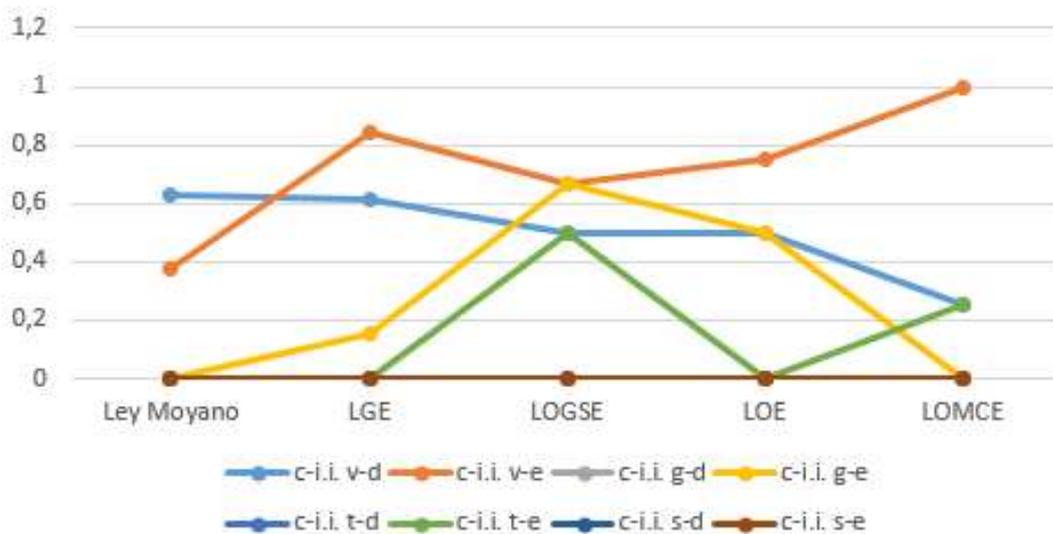


Figura 10. Evolución nº medio de fenómenos c-i.i. por libro

Con los resultados arrojados de esta evolución puede afirmarse que:

- ◆ El sistema de representación dominante para el fenómeno c-i.i. es el verbal. Durante la Ley Moyano predominó este sistema de representación en el formato definición, mientras que desde la LGE lo hizo en el formato ejemplo.
- ◆ El sistema de representación gráfico se presenta en la LGE, en la LOGSE y en la LOE, pero no durante la Ley Moyano y la LOMCE.
- ◆ El sistema de representación tabular y formato ejemplo solo se presenta en la LOGSE y la LOMCE.
- ◆ El número medio por libro de texto del fenómeno c-i.i. fue superior en la LOGSE.
- ◆ Los códigos fenomenológicos t-d, g-d, s-d y s-e no se identifican en ninguno de los periodos educativos.

Fenómeno d-i.i.

De forma análoga al fenómeno c-i.i. se presenta el fenómeno d-i.i. En la tabla 6 se muestran el número medio por libro de texto de este fenómeno atendiendo a su código fenomenológico.

De forma análoga al fenómeno c-i.i. se presenta el fenómeno d-i.i. En la tabla 6 se muestran el número medio por libro de texto de este fenómeno atendiendo a su código fenomenológico.

Tabla 6

Nº medio de fenómenos por libro. d-i.i. Periodos educativos

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
d-i.i. v-d	0,25	0,31	0,17	0,25	0,25
d-i.i. v-e	0	0,31	0,33	0,25	0
d-i.i. g-d	0	0	0	0	0
d-i.i. g-e	0	0,08	0,5	0	0
d-i.i. t-d	0	0	0	0	0
d-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0
d-i.i. s-d	0	0	0	0	0
d-i.i. s-e	0	0	0	0	0
Subtotales	0,25	0,70	1,5	0,5	0,25

Se dispone del mismo modo que para el fenómeno c-i.i. la figura 11:

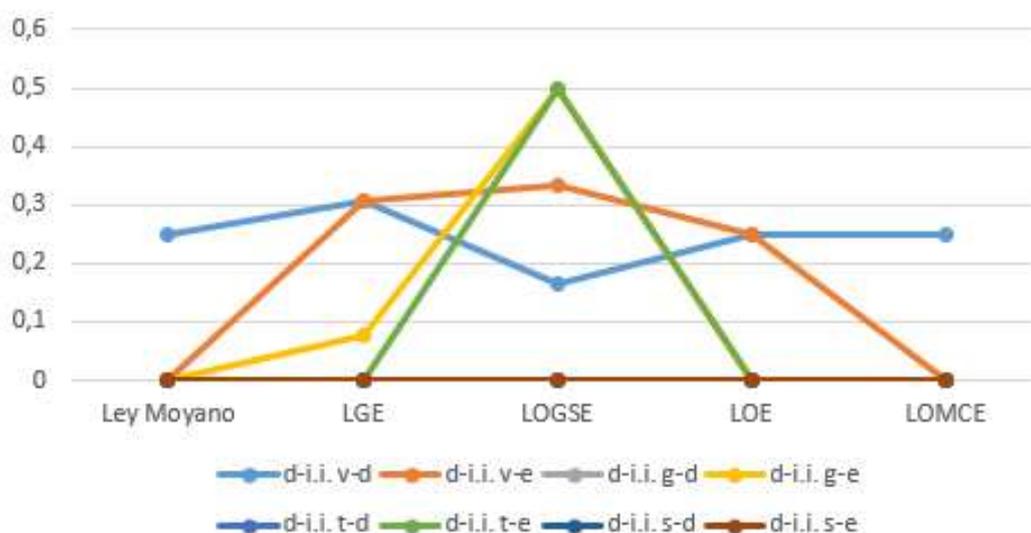


Figura 11. Evolución nº medio de fenómenos d-i.i. por libro

De esta evolución histórica puede afirmarse que:

- ◆ El sistema de representación dominante para el fenómeno d-i.i. es el verbal en la Ley Moyano, LGE, LOE y LOMCE. En la LOGSE los sistemas de representación gráfico y tabular, en formato ejemplo; y el sistema de representación verbal en ambos formatos, son los que se presentan un mayor número de veces.
- ◆ El sistema de representación gráfico y formato ejemplo se identifica en la LOGSE y de forma casi insignificante en la LGE.
- ◆ El sistema de representación tabular y formato ejemplo solo se presenta en la LOGSE.
- ◆ Desde la implantación de la LOE el número de apariciones del fenómeno d-i.i. ha disminuido considerablemente.
- ◆ En la LOMCE solo se ha encontrado este fenómeno en el sistema de representación verbal y formato definición.

Fenómeno i.v.s.i.

Facilitando la percepción de la evolución histórica del fenómeno i.v.s.i., como ya sucediese con los fenómenos que tienen un enfoque intuitivo, se presenta la tabla 7 y la figura 12:

Tabla 7

Nº medio de fenómenos por libro. i.v.s.i. Periodos legislativos

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
i.v.s.i. v-d	0,88	1,54	2	1,75	0,5
i.v.s.i. v-e	0,5	1,23	2	0,75	0
i.v.s.i. g-d	0	0,15	0	0,25	0
i.v.s.i. g-e	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-d	0	0	0	0	0
i.v.s.i. t-e	0	0	0	0	0
i.v.s.i. s-d	0	0,46	0	1	0
i.v.s.i. s-e	0	0,31	1,17	0	0
Subtotales	1,38	3,69	5,17	3,75	0,5

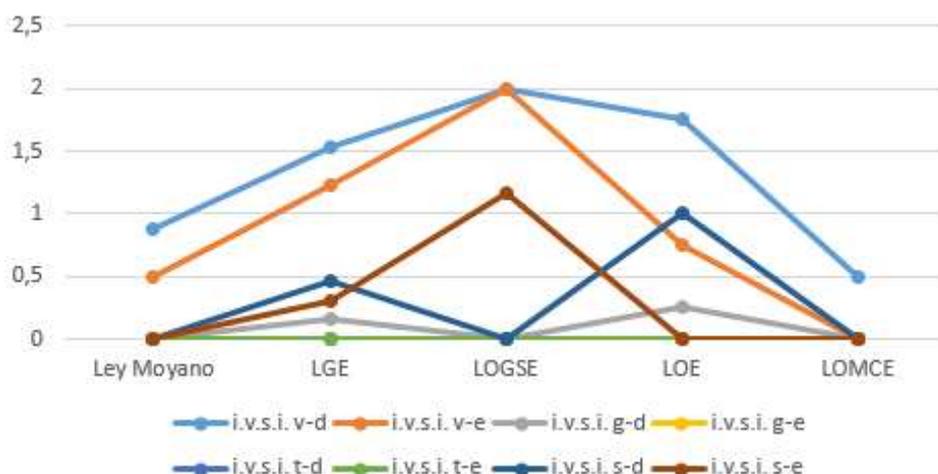


Figura 12. Evolución nº medio de fenómenos i.v.s.i. por libro.

Observando la tabla 7 y la figura 12 puede afirmarse lo siguiente:

- ◆ El sistema de representación verbal y formato definición es el dominante para el fenómeno i.v.s.i.
- ◆ El sistema de representación gráfico y formato definición solo se presenta en la LGE y en la LOE.
- ◆ El sistema de representación simbólico fue identificado en la LGE, LOGSE y LOE; así, en la LGE en ambos formatos, en la LOGSE en formato ejemplo, y en la LOE en formato definición.
- ◆ El auge de este fenómeno se evidencia en la LOGSE, coincidiendo con el auge del sistema de representación verbal.
- ◆ En la última ley educativa, LOMCE, solo se ha encontrado este fenómeno en el sistema de representación verbal y formato definición, pero resulta casi inexistente.

Comparación de fenómenos

Es posible llevar a cabo la comparación de cuatro de los códigos fenomenológicos: v-d (tabla 8), v-e (tabla 9), g-e (tabla 10) y t-e (tabla 11). Para estos dos últimos solo han podido tomarse en cuenta los fenómenos de enfoque intuitivo, por ausencia de fragmentos para el enfoque formal.

Tabla 8

Comparación sistema de representación verbal y formato definición

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. v-d	0,63	0,62	0,5	0,5	0,25
d-i.i. v-d	0,25	0,31	0,17	0,25	0,25
i.v.s.i. v-d	0,88	1,54	2	1,75	0,5

El sistema de representación verbal y formato definición se ha identificado históricamente con mayor frecuencia para el fenómeno i.v.s.i. Este incrementó su incidencia en los libros de texto desde la Ley Moyano hasta la LOGSE, momento en el que alcanzó su punto álgido. Desde entonces, su presencia ha ido disminuyendo, teniendo actualmente un impacto menor del que tenía 80 años atrás. Los fenómenos intuitivos se han mantenido más o menos estables durante las 5 leyes educativas estudiadas, siendo la presencia de c-i.i. mayor que para d-i.i., excepto en la LOMCE, donde se identifica exactamente la misma. Véase la figura 13.



Figura 13. Evolución histórica. v-d.

Tabla 9

Comparación sistema de representación verbal y formato ejemplo

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. v-e	0,38	0,85	0,67	0,75	1
d-i.i. v-e	0	0,31	0,33	0,25	0
i.v.s.i. v-e	0,5	1,23	2	0,75	0

El fenómeno dominante en el sistema de representación verbal y formato ejemplo ha ido cambiando durante las diferentes leyes educativas. Durante la Ley Moyano, la presencia de i.v.s.i. era ligeramente superior a la de c-i.i., mientras que d-i.i. todavía no era identificado. En la LGE, todos los fenómenos ven incrementada su incidencia en los libros de texto. Mientras que c-i.i. y d-i.i. permanecen más o menos estables en LOGSE, el fenómeno i.v.s.i. casi duplica su existencia, logrando su mayor incidencia. En la LOE, ambos fenómenos, c-i.i. e i.v.s.i. tienen la misma presencia; motivada por la estabilidad de c-i.i. y la reducción a la tercera parte de i.v.s.i. Con la llegada de la LOMCE, desaparecen de los libros de texto los fenómenos d-i.i. e i.v.s.i. Véase la figura 14.

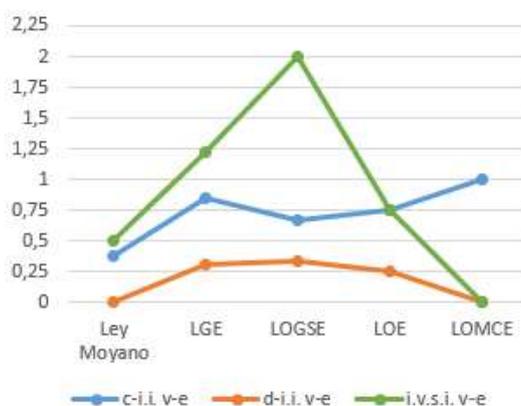


Figura 14. Evolución histórica. v-e.

Tabla 10

Comparación sistema de representación gráfico y formato ejemplo

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. g-e	0	0,15	0,67	0,5	0
d-i.i. g-e	0	0,08	0,5	0	0

En este caso solo se ha realizado la comparación entre los fenómenos c-i.i. y d-i.i., ya que el fenómeno i.v.s.i. no ha sido identificado en ningún libro de texto. Los fenómenos con enfoque intuitivo no fueron observados hasta la instauración de la LGE, aunque de forma casi testimonial. Como otros sistemas de representación, durante la LOGSE se aprecia una mayor presencia. En la LOE, las observaciones del fenómeno c-i.i. decrecen, mientras que las de d-i.i. desaparecen. Véase la figura 15.

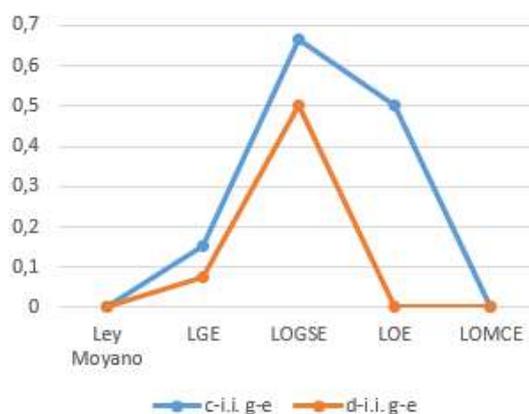


Figura 15. Evolución histórica. g-e.

Tabla 11

Comparación sistema de representación tabular y formato ejemplo.

	Ley Moyano	LGE	LOGSE	LOE	LOMCE
c-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0,25
d-i.i. t-e	0	0	0,5	0	0

En la comparación de la representación tabular en el formato ejemplo no se presenta gráfico de evolución, ya que existe una igualdad desde la Ley Moyano hasta la LOE, y no podría percibirse la evolución individual de c-i.i. y d-i.i.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

Como ha podido apreciarse durante este documento, ha quedado latente que a partir de un estudio empírico de carácter exploratorio de 35 de libros de texto es posible identificar los fenómenos caracterizados a partir de una definición del límite infinito de una sucesión en algunos de los sistemas de representación, como son: verbal, gráfico, tabular y simbólico, y formatos, ya sean como definición o ejemplo.

Además, no solo se han identificado, sino que ha sido posible establecer una relación entre ellos y diferentes periodos temporales, considerando las leyes educativas españolas.

El fenómeno c-i.i. fue identificado en los sistemas de representación verbal, en los formatos definición y ejemplo; y gráfico y tabular, en el formato ejemplo. El sistema de representación verbal fue el que mayor frecuencia tuvo, un 78,57%.

De la misma forma ocurrió para su análogo en el límite menos infinito de una sucesión, el fenómeno d-i.i., para el que no se identificó ningún fragmento en el sistema de representación simbólico, y tampoco ninguna definición en los sistemas de representación gráfico y tabular. El sistema de representación verbal, de nuevo, fue el de mayor porcentaje, un 69,57%.

El fenómeno i.v.s.i. se identificó en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico. En esta ocasión el sistema de representación no identificado en ningún fragmento fue el tabular. Además, el sistema de representación gráfico solo fue identificado en el formato definición. Como ya sucediese con los fenómenos de enfoque intuitivo, el sistema de representación predominante en este fenómeno es el verbal, un 77,57%.

En comparación con los estudios anteriores, Claros (2010), Sánchez (2012) y Claros et al. (2016), los fenómenos de enfoque intuitivo tienen una incidencia mayor en el sistema de representación verbal y formato definición, mientras que sus análogos para el límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto lo eran en el sistema de representación gráfico y formato ejemplo, y sistema de representación verbal y formato ejemplo respectivamente.

En el enfoque formal, i.v.s.i. prevalece en el sistema de representación verbal; mientras que su análogo para el límite finito de una sucesión lo es en el sistema de representación simbólico y formato ejemplo, y para el límite finito de una función en un punto el dominante es el sistema de representación gráfico en ambos formatos.

Centrándonos en el periodo actual LOMCE muestran que los fenómenos, c-i.i. y d-i.i., tienen una frecuencia menor que en los últimos tres periodos educativos (LGE, LOGSE y LOE) anteriores, decayendo hasta situarse en valores similares a la Ley Moyano. La peor situación que se encuentra es para el fenómeno i.v.s.i., que prácticamente ha desaparecido de los libros de texto, siendo su frecuencia en LOMCE menor que en el cualquiera de los periodos educativos.

Todo esto añade una dificultad a la presentación de la noción de límite. Lo que se indica con este estudio es que, aunque los fenómenos (c-i.i., d-i.i. e i.v.s.i.) siguen apareciendo cuando se presenta la noción de límite infinito de una sucesión, se presentan de manera aislada, sin usar diferentes sistemas de representación ni diferentes formatos.

Este estudio pone de manifiesto la necesidad de presentar la noción de límite infinito de una sucesión usando estos fenómenos en diferentes sistemas de representación, dado que ayuda a la comprensión de la noción (Janvier, 1987; Rico, 2009) y en diferentes formatos. La presentación de estos fenómenos en los libros de texto es muy importante porque su inclusión determinará la enseñanza que los docentes harán del límite infinito de una sucesión, dado el uso intensivo que hacen de ellos (véase Conejo y Ortega (2014)).

Nuestra propuesta, por lo tanto, es que el límite infinito de una sucesión se presente usando los fenómenos (crecimiento intuitivo ilimitado (c-i.i.), decrecimiento intuitivo ilimitado (d-i.i.) e ida y vuelta en sucesiones de límite infinito (i.v.s.i.)), en los sistemas de representación (verbal, tabular, gráfico y simbólico) y en los formatos (definición y ejemplo), como instrumento que ayuda a resolver muchas de las dificultades asociadas a la enseñanza-aprendizaje de la noción de límite infinito de una sucesión.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el grupo S60_20R-Investigación en Educación Matemática en el ámbito de la Comunidad Autónoma de Aragón para el periodo 2020-2022 y en el grupo HUM-324 del PAIDI de la Comunidad Autónoma de Andalucía.

REFERENCIAS

- Arnal, M., Claros, J., Sánchez, M. T. y Baeza, M. Á. (2017). Límite infinito de sucesiones y divergencia. *Épsilon*, 97, 7-22.
- Arnal-Palacián, M. (2019). *Límite infinito de una sucesión: fenómenos que organiza* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.
- Arnal-Palacián, M., Claros-Mellado, J. y Sánchez-Compañá, M. T. (2020). Infinite Limit of Sequences and Its Phenomenology. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(3), em0593. <https://doi.org/10.29333/iejme/8279>
- Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V., Sanz, L. y Barbero, F. (2016). *Matemáticas II*. Editorial SM.
- Belmonte, J.L. y Sierra, M. (2011). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 139-171.
- Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. In *Actas del III SEIEM: Valladolid, 1999* (pp. 167-184). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 361-371.
- Claros, J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Claros, J., Sánchez, M.T. y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación matemática*, 28(1), 125-152.
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: informe Cockcroft* (Vol. 20). Ministerio de Educación.
- Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *NÚMEROS, Revista de didáctica de las Matemáticas*, 87, 5-23.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), 765-777.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Reidel Publishing Company.
- Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), 49-65.
- González, A., González, J., Laborda, M. (1986). *Matemáticas 2º BUP. Proyecto Ariadna*. Editorial AKAL.

- González-Astudillo, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 385-394). SEIEM.
- Herrera, F., Salazar, E., Hernández, M. y Trejo, R. (2013). Noción de límite basada en la tipología de Brousseau. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (pp. 1-12).
- Iraozqui, E. y Medina, A. (2013). Estudio preliminar de aproximación al concepto de límite de una función. *Theoria*, 22(1), 21-31.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associated.
- Linés, E. (1983). *Principios de Análisis Matemático*. Editorial Reverté.
- Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325-334). SEIEM.
- Mengual, E., Gorgorió, N. y Gordo, L. A. (2017). Análisis de las actividades propuestas por un libro de texto: el caso de la medida. *REDIMAT*, 6(2), 136-163.
- Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). SEIEM.
- Morales, A., Reyes, L.E. y Hernández, J.C. (2013). El límite al infinito. Análisis preliminar para la elaboración de una estrategia metodológica de su enseñanza-aprendizaje. *Revista Premisa*, 15(3), 3-14.
- Pepin, B., Guedet, G. y Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM*, 45(5), 685-698.
- Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), 11-27. <http://hdl.handle.net/10481/16013>
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Sánchez, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

- Sánchez, C. y Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), 073-84.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15(1), 21-49.
- Vizmanos, J.R. y Anzola, M. (1996). *Ciencias de la Naturaleza y de la Salud-Tecnología. Matemáticas. 1º Bachillerato*. Editorial SM.

Mónica Arnal Palacián
Universidad de Zaragoza, España
marnalp@unizar.es

Javier Claros Mellado
Universidad Complutense de Madrid,
España
jaclme@hotmail.com

María Teresa Sánchez Compañá
Univerisdad de Málaga, España
teresasanchez@uma.es

Recibido: Abril de 2020. Aceptado: Agosto de 2020

doi: 10.30827/pna.v14i4.15143



ISSN: 1887-3987