

ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS SIGNIFICADOS Y EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE DEL LÍMITE EN TRES LIBROS Y EL CURRÍCULO OFICIAL

Judith Hernández, Raúl Zamora y José Luis Lupiáñez

En México, seleccionar libros congruentes al currículo de matemáticas para la Educación Media Superior representa un reto. Por tal motivo, en este trabajo se examinan los significados y las expectativas de aprendizaje para el tema de límite en tres libros de cálculo y su congruencia con lo propuesto en el currículo oficial. Para ello se utilizan las dos primeras etapas del análisis didáctico. Los resultados sugieren algunas diferencias entre los significados. Además, las tareas propuestas en los libros favorecen expectativas de aprendizaje del tipo conceptual y procedimental, no así las del tipo práctico que pide el currículo oficial.

Términos clave: Análisis Didáctico; Capacidades; Competencias; Tareas Matemáticas

Comparative study of the meanings and expectations of learning for the topic of limit in three books and the official curriculum

In Mexico, selecting books congruent to the math curriculum for High School represents a challenge. For this reason, the first two stages of didactical analysis are proposed as a tool to examine the meanings and expectations of learning for the topic of limit in three Calculus books and their congruence with what is proposed in the official curriculum. The results suggest some differences between the meanings. In addition, the tasks proposed in the books favor learning expectations of the conceptual and procedural type, but not those of the practical type requested by the official curriculum.

Keywords: Didactical analysis; Capacities; Competences; Math tasks

Los libros de texto son uno de los materiales didácticos más usados por los profesores de matemáticas. Por esta razón, la investigación en Educación

Hernández, J., Zamora, R. y Lupiáñez, J. L. (2020). Estudio comparativo de los significados y expectativas de aprendizaje del límite en tres libros y el currículo oficial. *PNA* 14(4), 241-269.

Matemática siempre ha tenido un foco de atención en su estudio, y en la actualidad, ese interés persiste (Fan et al., 2018). Así, los diferentes análisis de los textos escolares como recurso para la enseñanza son numerosos (Balcaza et al., 2017). Estos se han realizado desde diferentes enfoques teóricos como el análisis didáctico (Picado et al., 2013 y Real et al., 2013), el ontosemiótico (Ake y Godino, 2018; Balcaza et al., 2017; Sánchez y Ramírez, 2018); desde la visualización (Barrantes et al., 2015); o bien, desde la socioepistemología (Cantoral et al., 2015). En otros (López et al., 2015; Mengual et al., 2017; Moreno et al., 2007; Sánchez y Ruíz, 2018; Vicente y Manchado, 2017) se construyen categorías para analizar tareas o problemas planteados en los libros.

También existen estudios comparativos entre libros de matemáticas de diferentes países o de mayor circulación y tradición en un país (como en Díaz-Levicoy et al., 2016; Pino y Blanco, 2008; Mosquera, 2018; Herrera et al., 2017). Estos se concentran en analizar diferencias de abordaje de una noción matemática, formas de representación utilizadas, tareas y aprendizajes propuestos o bien los significados asociados a un contenido matemático escolar. Claros et al. (2016) encuentran diferencias en la forma de abordar la noción del límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto presentes en 40 libros de texto de secundaria españoles divididos en cinco periodos entre 1933 y 2005.

Otras investigaciones comparativas se presentan en Dolores y García (2012) donde se hace evidente las desconexiones entre el libro de texto, los programas de estudio, los aprendizajes de los estudiantes y lo que el profesor enseña. Aquí se identifica que los libros de texto (currículum potencial) son un factor de las diferencias de lo que se sugiere enseñar (currículum oficial) y lo que realmente se enseña (currículum impartido). También se determina poca relación entre los objetivos de aprendizaje establecidos en los programas de estudio (currículum oficial) y lo aprendido por los estudiantes (currículum aprendido). Estas investigaciones confirman la débil conexión entre lo que la autoridad educativa propone para un contenido matemático escolar, lo que se enseña de él, lo que se aprende y la forma en que los libros lo desarrollan. Es aquí donde se sitúa el problema de la presente investigación.

Aunado a lo anterior, se encuentran las dificultades de elección de la bibliografía adecuada que apoye el desarrollo de lo propuesto en el currículum oficial cuando no existe un libro de texto. Este es el caso del currículum de matemáticas del sistema de Educación Media Superior (EMS) en México, que atiende a estudiantes de entre 14 y 17 años. Por tal motivo, en esta investigación se reporta un análisis exploratorio comparativo de los significados y las expectativas de aprendizaje para el tema de límite que se presentan en el programa de estudios de Cálculo Diferencial para la EMS y en tres libros de cálculo.

La elección del contenido matemático escolar se justifica por la dificultad al enseñar el tema de límite, concretamente para promover la resolución de tareas

que involucren contextos cercanos al estudiante. Lo anterior es atribuible a la propia complejidad que el concepto matemático encierra en la contextualización fuera del campo de las matemáticas (Blázquez y Ortega, 2001; Navarro et al., 2012). Lo anterior adquiere especial relevancia dado el carácter funcional de las matemáticas propuesta en el enfoque por competencias que adopta la EMS en México.

También se consideró el tema de límite dada la importancia que guarda en el campo de las matemáticas (Blázquez y Ortega, 2001). Sin embargo, estos autores determinan que, si bien el límite es un tema necesario, su naturaleza dificulta su enseñanza:

(...) es uno de los conceptos más importantes del Análisis, ya que es necesario para introducir otros (continuidad, derivada, integral) y, por lo tanto, su estudio se hace necesario. Por otra parte, para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender. (p. 1)

Estos mismos hechos han sido documentados en diversas investigaciones (como Fernández-Plaza et al., 2013; Gómez y Pantoja, 2013; Navarro et al., 2012; Vrancken et al., 2006). Esto permite ubicar al límite como un concepto importante en matemáticas, pero difícil de aprender y de enseñar.

De esta manera, la importancia de este estudio recae en explorar el papel del currículum oficial como referente de lo que se propone enseñar en el aula de matemáticas y a los libros como el principal material en el que los profesores basan su discurso. Además se espera brindar una herramienta de análisis para el tema de límite, que sirva para evaluar y reflexionar sobre la forma en que los libros organizan los significados de un contenido matemático escolar y las capacidades que potencialmente se movilizarían con las tareas que proponen. Este tipo de estudios, según Moreno et al. (2007), son un punto de referencia que complementa el abanico de recursos para el diseño e implementación de los temas que conforman el programa de una asignatura. En concreto, los objetivos propuestos en esta investigación son:

- ◆ Identificar los significados del tema de límite en el programa oficial para la EMS en México y en tres libros de Cálculo. Para ello se utiliza la caracterización de significado propuesta en Rico (2012) conformada por la terna: estructura conceptual, representación semiótica y fenomenología.
- ◆ Diseñar un instrumento para analizar las tareas propuestas en tres libros para el tema de límite, determinando las capacidades que potencialmente los estudiantes podrían promover con ellas. El instrumento fue diseñado mediante la noción de expectativas de aprendizaje del análisis cognitivo (Lupiáñez, 2009), que a su vez forma parte del análisis didáctico propuesto en Rico et al. (2013).

Con esto se pretende evidenciar las diferencias entre el currículum oficial y potencial de la EMS en México, para el tema de límite. La importancia de identificar estas diferencias es que pueden ser fuente del bajo rendimiento escolar en matemáticas (Alsina, 2000). Particularmente resulta de interés para el estudio, comparar la relación entre lo que se establece como fines formativos y lo que desde los libros se propone para contribuir al alcance de los mismos.

Para sustentar lo realizado en esta investigación se presenta en la segunda sección el contexto de la EMS en México; aquí se argumenta la necesidad de contar con herramientas que apoyen la elección de libros y materiales congruentes con el currículum de matemáticas ante cualquier reforma educativa o cambio curricular. En el tercer apartado se expone el marco teórico metodológico definiendo los significados y expectativas de aprendizaje de un contenido matemático escolar que servirán para la descripción y comparación entre los libros de texto y el currículo oficial para el tema de límite de una función. Finalmente se muestran los resultados que permiten establecer la última sección que corresponde a conclusiones.

MARCO CONTEXTUAL: LOS LIBROS DE TEXTO Y EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

En México desde 2008, la EMS enfrenta un proceso de transformación, derivado de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), que tiene como uno de sus principios básicos la organización y construcción de un Marco Curricular Común (MCC) que establezca un perfil de egreso único basado en desempeños terminales. Este proceso implica un conjunto de retos y preocupaciones para los profesores, pues para la construcción del MCC se requiere un cambio en el enfoque de la enseñanza; que exige entre otras cosas, materiales adecuados a las nuevas disposiciones.

En este sentido, López y Tinajero (2009) señalan que la carencia de materiales adecuados es una de las preocupaciones principales que los docentes tienen respecto a la implementación de la RIEMS. Así, la responsabilidad de elegir los materiales a utilizar recae en los profesores; quienes en el mejor de los casos basan sus decisiones en la propia experiencia. Así, la pregunta que se mantiene es si estos materiales son adecuados o no para lo establecido en el MCC. En este contexto nos enfocamos en identificar los significados y las expectativas de aprendizaje para el tema de límite, que son potenciados en tres libros utilizados por profesores de matemáticas para el estudio del cálculo diferencial en un subsistema de la EMS en México. La evidencia muestra que estos libros no necesariamente favorecen los significados y las expectativas de

aprendizaje en matemáticas que se establecen en el plan de estudios para el tema de límite.

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Para dar alcance a los objetivos propuestos se tomó como referente teórico y metodológico al análisis didáctico propuesto en Rico y Fernández-Cano (2013) y Gómez (2007); concretamente, las dos primeras etapas que lo conforman: el análisis de contenido y el análisis cognitivo. El primero para organizar la multiplicidad de significados para el tema de límite y el segundo para diseñar un instrumento que permita analizar las capacidades que podrían favorecerse a través de las tareas que los libros proponen. Por tal motivo se divide esta sección en las dos etapas utilizadas del análisis didáctico.

Fase I. El Análisis de Contenido como organizador de los significados de un contenido matemático escolar

En Rico et al. (2013) se propone al análisis de contenido como un método que permite establecer y organizar la diversidad de significados de un concepto matemático. La noción de significado que se adopta es la propuesta en Rico (2012, pp. 52-53) cuyas componentes que lo estructuran son:

- ◆ Los sistemas de representación, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros.
- ◆ La estructura conceptual, que comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- ◆ La fenomenología, que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido.

En este sentido, se reconoce que las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar ponen en evidencia la multiplicidad de significados del mismo. Luego, surge la necesidad de identificar, organizar y seleccionar aquellos que son relevantes para su enseñanza. El procedimiento que se siguió para esta investigación es el expuesto en Rico y Fernández-Cano (2013). Enseguida se explica la aplicación del mismo:

- ◆ Delimitación del corpus para el currículum oficial: este se integró por el programa de Cálculo Diferencial para la EMS (SEP/SEMS/DGB, 2013); concretamente el segundo de los cuatro bloques que lo conforman.
- ◆ Delimitación del corpus para el currículum potencial: para la elección de los libros analizados se realizó una encuesta a 40 profesores de matemáticas del Colegio de Bachilleres del estado de Zacatecas, subsistema de la EMS en México. Ésta se realizó en una reunión de academia, por lo que los profesores encuestados no sólo imparten cálculo

diferencial sino otras asignaturas de matemáticas del nivel bachillerato. Se les preguntó abiertamente cuáles eran los libros que utilizaban para la planeación de la asignatura de cálculo diferencial. Los dos libros con mayores menciones fueron: primero Ibañez y García (2012) y segundo Valenzuela (2011). Ninguno de los libros mencionados correspondieron a las fuentes de consulta del programa oficial, por lo que se decidió analizar uno de estos: el libro de Mora y del Río (2009). Esto permitió realizar un contraste entre los materiales que en la práctica utilizan los profesores y los que se sugieren en el currículo oficial. En la figura 1 se presentan las portadas de los 3 libros analizados.

- ◆ Concreción de la unidad de análisis: frases donde la noción del límite de una función, su estructura, representaciones y fenomenología se hagan presentes.
- ◆ Localización de las unidades de análisis: el bloque dos del programa oficial y el capítulo de límites de cada libro revisado.
- ◆ Categorías consideradas: las tres componentes que conforma el significado del contenido matemático escolar.
- ◆ Codificar, interpretar y relacionar las categorías: para representar los significados para el tema de límite se construyeron mapas conceptuales y tablas que rescatan los principales significados del tema de límites. Los mapas conceptuales se realizaron mediante la propuesta descrita en Rico et al. (2008). Estos autores proponen que los sistemas de representación están constituidos por signos, reglas y operaciones para crear, transformar o traducir de un signo a otro. La estructura conceptual toma en cuenta tres aspectos: estructuras matemáticas involucradas (objetos, conceptos y estructuras); relaciones conceptuales (procedimientos, definiciones y propiedades que relacionan de manera horizontal y vertical a las estructuras involucradas) y relaciones entre representaciones. La dimensión fenomenológica incluye los contextos, situaciones o fenómenos que dotan o dan sentido al contenido analizado.

De esta manera se aborda un primer estudio comparativo entre el currículum oficial y potencial en términos de los significados que se favorecen y la manera en que el contenido matemático escolar es presentado. Adicionalmente, los significados identificados sirvieron para organizar las expectativas de aprendizaje y con ello la construcción del instrumento que fue utilizado en la categorización de las tareas propuestas en los libros.

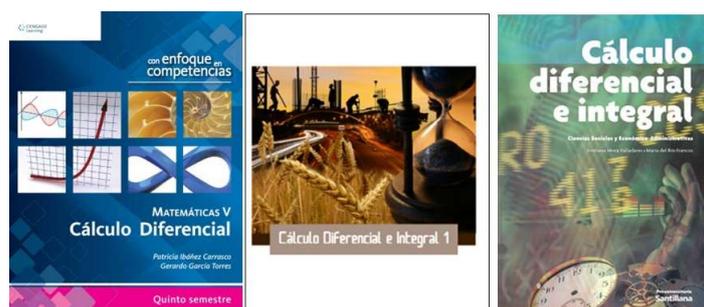


Figura 1. Portadas de Ibañez y García (2012), Valenzuela (2011) y Mora y del Río (2009)

Fase II. El Análisis Cognitivo para identificar las expectativas de aprendizaje

El análisis cognitivo es caracterizado por Gómez (2007) como un análisis a priori que pretende prever la actuación del estudiante al enfrentarse a tareas matemáticas que se le presenten a través de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Lo anterior es posible a través de uno de los tres organizadores que propone el análisis cognitivo, las expectativas de aprendizaje, que “enumeran, describen y organizan lo que el profesor espera que los escolares aprendan según objetivos específicos y competencias, principalmente” (Lupiáñez, 2009, p. 113). En esta investigación se utilizaron tres niveles propuestos en la literatura:

- ◆ Primer nivel-Competencias. Son las expectativas globales de enseñanza; es decir, “...se refieren a objetivos a largo plazo que debieran ser observables al término de todo un ciclo de enseñanza” (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 38).
- ◆ Segundo nivel-Objetivos específicos de aprendizaje. Son expectativas establecidas para cada uno de los temas, los cuales vinculan determinados contenidos y tareas, llevando a enunciar una conducta esperada por parte del estudiante. Comúnmente se refieren a conductas o desempeños observables para un tema y tipo de tareas concretos (Lupiáñez, 2009).
- ◆ Tercer nivel-Capacidades. En el contexto de las matemáticas escolares, son entendidas como actuaciones específicas exitosas de un individuo con respecto a cierto tipo de tareas sobre un tema concreto (Gómez, 2007). Las capacidades son consideradas como la unidad básica de la expectativa de aprendizaje.

Finalmente, los significados y las expectativas fueron categorizados en los tres niveles presentes en cada organizador del currículo. Estos niveles son teórico, técnico y práctico, dotando al currículo de una perspectiva funcional (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). Esto es coincidente con el enfoque por competencias del MCC propuesto en México.

A continuación, los resultados de esta investigación se organizan en tres secciones. En la primera, se presentan los significados identificados a través del

análisis de contenido para el tema de límite, tanto aquellos que se sugiere son potenciados por los libros de texto, como los que sirven de referencia al profesor de matemáticas desde el programa oficial. En la segunda, se muestra la construcción del instrumento para identificar las expectativas de aprendizaje que se sugiere promueven las tareas y actividades de los libros para el tema de límite. Por último, se exponen los resultados de la aplicación del instrumento a los tres libros analizados, determinando el tipo de tareas y las expectativas que se promueven con ellas.

SIGNIFICADOS DE REFERENCIA Y POTENCIALES PARA EL LÍMITE

Aquí se agrupan los resultados obtenidos del análisis de contenido aplicado tanto al programa oficial de Cálculo Diferencial como a los tres libros de texto elegidos a partir de la identificación de las tres dimensiones que conforma un significado: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología con que se da sentido al contenido.

Significados de referencia en el currículum oficial para el tema de límite

El programa oficial de Cálculo Diferencial aborda el tema de límite en el bloque dos. Este bloque es denominado “Resuelves problemas de límites en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social” (SEP/SEMS, 2013, p. 18). El propósito principal es que el estudiante resuelva problemas sobre límites, en las ciencias naturales, económico-administrativas y sociales, mediante el análisis de tablas, gráficas y aplicación de las propiedades de los límites. Para lograrlo se proponen dos aprendizajes: Límites, su interpretación en una tabla, en una gráfica y su aplicación en funciones algebraicas y el cálculo de límites en funciones algebraicas y trascendentes (SEP/SEMS, 2013). Asimismo se establecen dos desempeños: aplicar el concepto de límite a partir de la resolución de problemas económicos, administrativos, naturales y sociales de la vida cotidiana; además de calcular límites a partir de la elaboración de gráficas en Derive y su interpretación de las representaciones gráficas de funciones, mostrando habilidades en la resolución de problemas de situaciones cotidianas (SEP/SEMS, 2013). El tema de límites incluye como concepto matemático central al límite de una función en un punto, por lo que la estructura conceptual se agrupa alrededor de este concepto. Sin embargo, la estructura conceptual según Rico (2012) y Gómez (2007) incluye otros conceptos (en este caso el límite al infinito), procedimientos, propiedades y sus relaciones.

En la figura 2, se muestra un mapa conceptual general con los significados identificados en el programa de la materia de Cálculo Diferencial para el tema de límite y que sirven de referencia a los profesores de matemáticas, desde una perspectiva institucional.

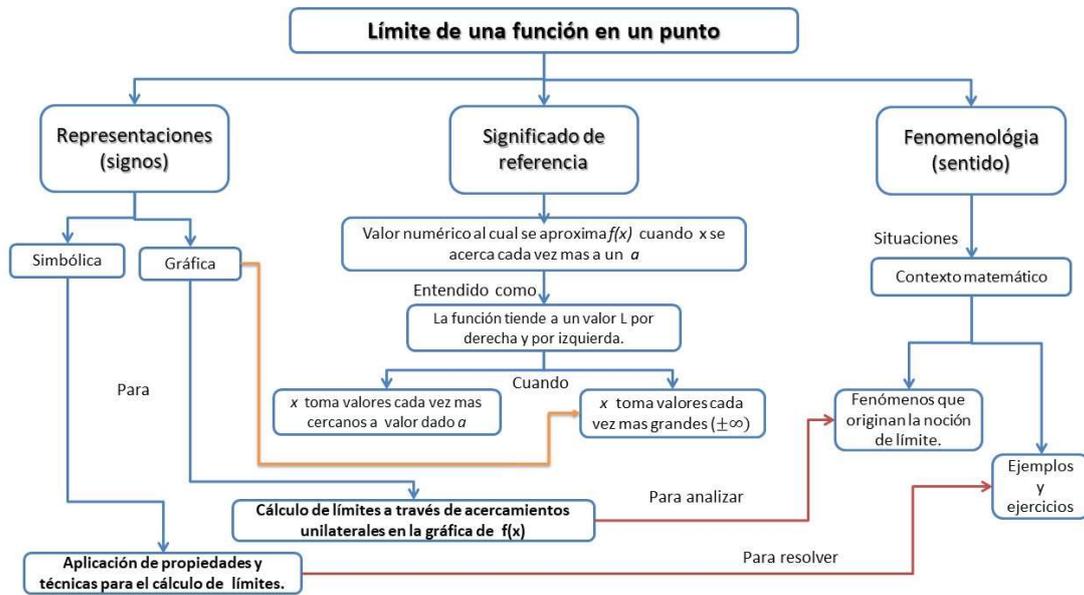


Figura 3. Mapa conceptual para el límite de una función tras el análisis de Ibáñez y García (2012)

De manera alterna, este material presenta ejemplos y ejercicios que implican el cálculo de límites a través de diversas técnicas mediante el registro simbólico sin relacionarlo con fenómenos de alguna naturaleza distinta a las matemáticas. Por lo que los significados identificados son:

- ◆ Significado A de IG (carácter conceptual general): el límite se construye como una aproximación al valor de una función cuando la variable independiente se acerca al punto dado de manera bilateral, pero sin tocar ese punto; se clarifica que aun cuando el valor de la función en el punto $x=a$ no pueda ser determinado se puede observar (gráficamente) que cuando x se acerca al valor a por la derecha (izquierda) la función se aproxima a un valor L y entre más se acerca a a , la función más se acerca a L (figura 4). El anterior significado se complementa utilizando, a nivel notación, la representación simbólica (figura 5). Todo lo anterior fue en el contexto matemático.
- ◆ Significado B de IG (carácter técnico): Se presenta el límite como un conjunto de propiedades y técnicas para el cálculo de límites tanto cuando la variable se acerca a un valor dado como cuando toma valores cada vez más grandes. En ambos casos es a través de la representación simbólica y en contextos matemáticos.

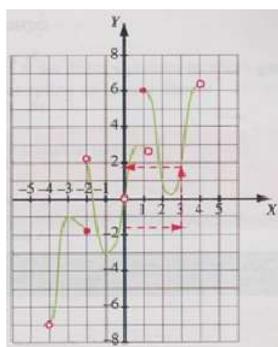


Figura 4. Cálculo de un límite a partir de la aproximación en la representación gráfica de la función (Ibañez y García, 2012, p. 45)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Figura 5. Representación genérica a nivel notación del límite y límites laterales de una función (Ibañez y García, 2012, p. 44)

Significados potenciados para el tema de límite en el libro de Valenzuela (2011)

El mapa conceptual que organiza los significados potenciados por el libro Valenzuela (2011) se presentan en la figura 6.

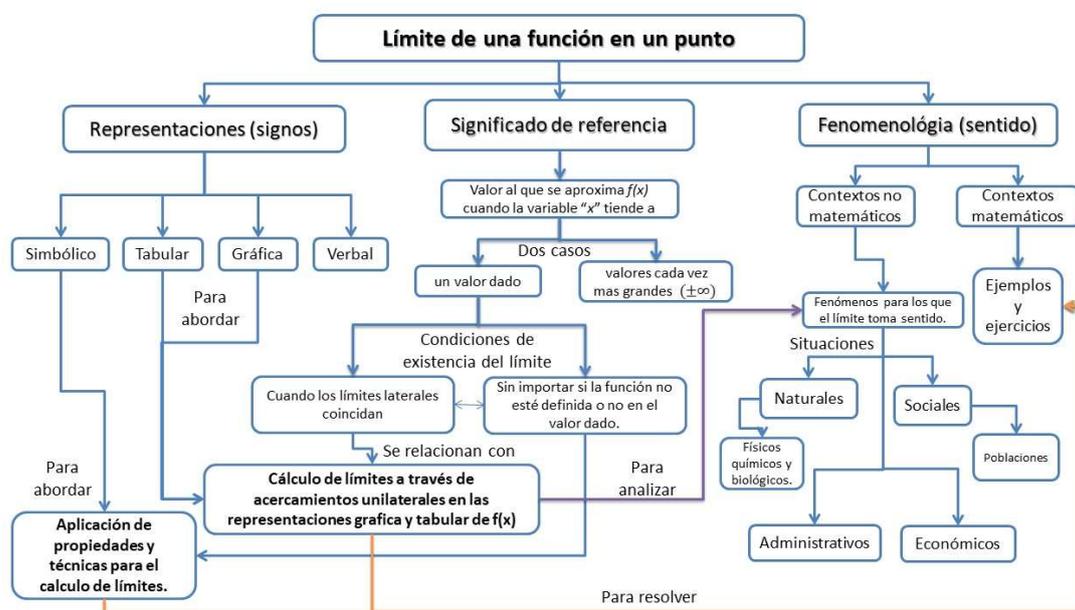


Figura 6. Mapa conceptual para el límite de una función tras el análisis de Valenzuela (2011)

Los significados que se identificaron en Valenzuela (2011) son los siguientes:

- ◆ Significado A de V (carácter conceptual intuitivo dinámico): el límite como una aproximación (bilaterales) al valor de una función cuando la variable independiente se acerca o tiende a un valor establecido a ; además toman en cuenta la no existencia de $f(a)$ y la igualdad de los límites laterales como condición de la existencia del límite. Las representaciones utilizadas son la gráfica y tabular transitando de un registro a otro de manera simultánea. Este significado se complementa, a nivel notación, con la representación simbólica y verbal de extensiones del significado como se muestra en la figura 7; el tercer elemento que caracteriza al significado está representado mediante el contexto matemático.

- a) Cuando "x" tiende a -4 por la izquierda, la cual se denota como $x \rightarrow -4^-$, se observa como la función va incrementando su valor hacia 3; de igual forma, cuando "x" tiende a -4 por la derecha ($x \rightarrow -4^+$) la función va disminuyendo su valor hacia 3, por lo tanto, se puede decir que el límite de la función cuando "x" tiende a -4 ($x \rightarrow -4$) es 3.

El hecho de que el valor de la función en $x = -4$ no exista (punto hueco) no invalida el límite, porque precisamente se acerca infinitamente a -4 sin tomar el valor exacto.

Forma algebraica	Se lee
$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 3$	El límite de $f(x)$ cuando "x" tiende a 4 por la izquierda es 3.
$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = 3$	El límite de $f(x)$ cuando "x" tiende a 4 por la derecha es 3.
$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 3$	El límite de $f(x)$ cuando "x" tiende a 4 es 3

Figura 7. Extensión de la representación verbal y simbólica del límite de una función en un punto (Valenzuela, 2011, p. 39)

- ◆ Significado B de V (carácter técnico): la aplicación de propiedades y técnicas para el cálculo de límites, utilizando la representación simbólica en contextos matemáticos.
- ◆ Significado C de V (carácter práctico modelación): Acercamientos unilaterales (puntuales y cuando x crece) mediante las representaciones gráfica y tabular, utilizando contextos no matemáticos mediante fenómenos para los cuales el límite de una función toma sentido como, la modelación del comportamiento del precio de una computadora a través del tiempo; la velocidad instantánea de un cuerpo a partir de la función que describe el movimiento de la misma; fenómenos químicos y biológicos y el comportamiento de una población a largo plazo.

Significados potenciados para el tema de límite en el libro de Mora y Del Río (2009)

Por último, el análisis al libro Cálculo diferencial e integral, ciencias sociales y económico-administrativas, cuya autoría corresponde a Mora y Del Río (2009) permitió identificar los significados potenciados por este material para el tema de límite. Del mapa conceptual de este libro (figura 8) se identificaron los siguientes significados:

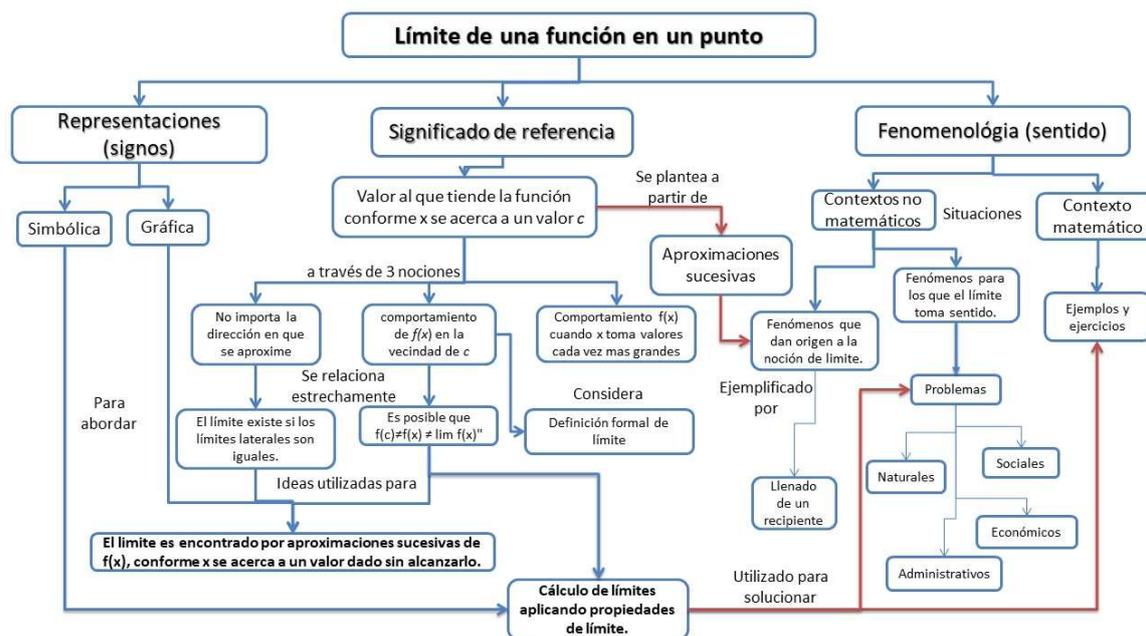


Figura 8. Mapa conceptual para el límite de una función en un punto tras el análisis de Mora y Del Río (2009)

- ◆ Significado A de MR (carácter conceptual aproximaciones laterales): el límite de una función en un punto es abordado a partir de aproximaciones laterales, apoyados en el uso de representaciones gráficas de la función en un contexto matemático, señalando de manera simbólica que “conforme x se acerca a c , $f(x)$ se acerca al límite, sin importar la dirección por la que lo haga; tampoco importa que $f(c) \neq f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ” (p. 111).
- ◆ Significado B de MR (carácter técnico con sentido): El cálculo de límites aplicando propiedades mediante la representación simbólica dotando de sentido mediante fenómenos en contextos no matemáticos como, el costo de un producto en el tiempo; el comportamiento de una población en el tiempo; la productividad de una empresa o tareas en ambientes físicos.
- ◆ Significado C de MR (carácter práctico estudio de patrones): este significado se presenta como introducción al tema de límite y parte de la aproximación sucesiva de un fenómeno; específicamente el llenado de recipientes con ciertos patrones, utilizando representaciones gráficas.

Los significados identificados en los libros y el programa de estudios se pueden categorizar en tres ejes:

- ◆ Conceptual, corresponden principalmente a los que se abordan al introducir el tema de límites y se orientan en explicar el concepto del límite de una función.
- ◆ Técnico, se concentran generalmente en las propiedades o reglas para el cálculo de límites.

- ◆ Práctico, este se presenta generalmente a través de fenómenos donde el límite toma sentido como una herramienta para la solución de problemas en contextos no matemáticos; en este eje toma sentido tanto el concepto del límite de una función como el concepto del límite al infinito.

Finalmente, se propone un comparativo (ver tabla 1) para evidenciar las diferencias entre los significados que se potencian en los libros de texto y los del programa de estudios.

Tabla 1
Significados para el tema de límite potenciados por los libros y el programa de estudios

Documento	Eje	Referencia Límite como	Representación	Fenomenología Contextos
Programa oficial (SEP/SEMS, 2013)	Conceptual	Acercamientos Sucesivos	Gráfica y Tabular	No matemáticos: naturales, sociales, administrativos y económicos
	Técnico	Reglas y propiedades	Simbólica	Matemático
	Práctico	Tendencia cuando x crece	Tabular y Gráfica	No matemáticos: naturales, sociales, administrativos y económicos
Ibañez y García (2012)	Conceptual	Aproximación bilateral	Gráfica y Simbólica	Matemático
	Técnico	Propiedades y técnicas	Simbólica	Matemático
	Práctico	Ausente	Ausente	Ausente
Valenzuela (2011)	Conceptual	Aproximación bilateral dinámica	Gráfica, Tabular, Simbólica y Verbal	Matemático
	Técnico	Propiedades y técnicas	Simbólica	Matemático

Tabla 1

Significados para el tema de límite potenciados por los libros y el programa de estudios

Documento	Eje	Referencia	Representación	Fenomenología
		Limite como		Contextos
	Práctico	Acercamientos unilaterales puntuales	Gráfica y Tabular	No matemáticos: situaciones de modelación, velocidad instantánea, fenómenos químicos y biológicos
		Acercamientos cuando x crece		No matemáticos: situaciones de modelación, el comportamiento de una población a largo plazo
	Conceptual	Aproximaciones laterales	Gráfica y Simbólica	Matemático
Mora y Del Río (2009)	Técnico	Propiedades	Simbólico	No matemáticos: costos, tendencia, productividad, ambientes físicos
	Práctico	Aproximaciones Sucesivas	Gráfica	No matemáticos: patrones en el llenado de recipientes

Nota. Elaboración propia con los significados identificados

Para el caso del eje conceptual, el programa oficial propone usar la representación gráfica y tabular con un enfoque intuitivo y en contextos no matemáticos, mientras que, en los tres libros, aparece la representación gráfica y simbólica sólo en contextos matemáticos. Luego, el acercamiento propuesto en los libros podría ser más riguroso o menos intuitivo que la propuesta en el currículo oficial. Esto podría producir algunas dificultades en el aprendizaje al momento de abordar el tema. Respecto al eje técnico, se puede decir que contiene al significado más coincidente entre el currículo oficial y los tres libros analizados; aunque el libro de Mora y del Río (2009) es el único que propone dotar de sentido al cálculo de límites en contextos no matemáticos. Los significados con mayores diferencias son los correspondientes al eje práctico,

debido a la fenomenología propuesta para dotar de sentido la noción de límite de una función y al infinito. Es interesante observar que el libro más usado por los profesores (el de Ibañez y García, 2012) es el único que no presenta un significado en el eje práctico.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE PARA ANALIZAR LAS TAREAS PROPUESTAS PARA EL TEMA DE LÍMITE

Aquí se presenta el diseño y conformación de un instrumento de análisis que nos ayudará a interpretar las tareas para el tema de límite propuestas en los libros según las expectativas de aprendizaje que favorecen y su relación con lo propuesto en el programa de estudios. Para identificar de qué manera se presentan los tres niveles de expectativas de aprendizaje en matemáticas en el contexto de la EMS se realizó una indagación sobre el MCC. Aquí se establecen ocho competencias disciplinares extendidas al campo de las matemáticas que fueron consideradas como el primer nivel de las expectativas de aprendizaje; todas corresponden al bloque de límites y se enuncian en la tabla 2.

Tabla 2

Competencias disciplinares extendidas al campo de las matemáticas para el tema de límite

CLAVE	COMPETENCIAS MATEMÁTICAS
CCD1	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CCD2	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
CCD3	Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
CCD4	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
CCD5	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
CCD6	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Tabla 2

Competencias disciplinares extendidas al campo de las matemáticas para el tema de límite

CCD7	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
CCD8	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Nota. Realizada con información del Programa (SEP/SEMS/DGB, 2013)

Para el segundo nivel se establecieron tres objetivos específicos de aprendizaje en donde el contenido de límite ya se hace presente. La descripción de éstos se sustenta en el enfoque funcional de las matemáticas que adopta el MCC y que coincide con el propuesto por el análisis didáctico. Este enfoque, para el tema del límite busca responder: ¿Qué significados puede adoptar el límite?, ¿Cómo funciona y operan los límites? y ¿Cómo se aplican los significados y propiedades de los límites? Esto se sintetiza en objetivos de carácter teórico, técnico o práctico (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). Estas categorías se identificaron en la descripción del bloque dos para el tema de límites en el programa de Cálculo Diferencial (figura 9).

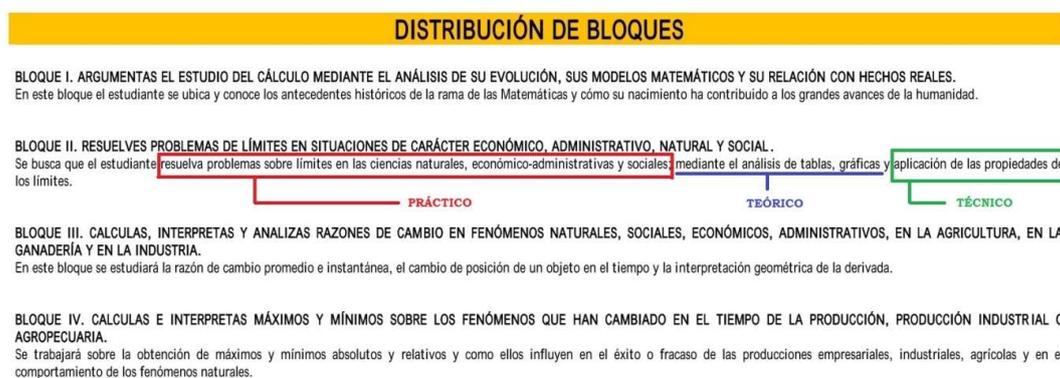


Figura 9. Expectativas según carácter teórico, práctico y técnico para el tema de límites (Fuente: SEP/SEMS/DGB (2013) y categorías determinadas por los autores)

De esta manera los objetivos específicos de aprendizaje para el tema de límite que se propusieron son:

- ◆ OEAL1. Entender la noción de límite de una función (teórico).
- ◆ OEAL2. Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos (técnico).
- ◆ OEAL3. Aplicar los límites y sus propiedades en la solución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos (práctico).

Finalmente, en el tercer nivel se construyeron treinta y siete capacidades como expectativas básicas de aprendizaje sobre actuaciones deseables respecto a distintos tipos de tareas para el estudio de los límites. Estas capacidades fueron propuestas con base en los desempeños, actividades de enseñanza y aprendizaje establecidos en el bloque dos del programa de Cálculo Diferencial (figura 10).

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
II	RESUELVE PROBLEMAS DE LÍMITES EN SITUACIONES DE CARÁCTER ECONÓMICO, ADMINISTRATIVO, NATURAL Y SOCIAL.	15 horas
Desempeños del estudiante al concluir el bloque		
Aplica el concepto de límite a partir de la resolución de problemas económicos, administrativos, naturales y sociales de la vida cotidiana.		
Calcula límites a partir de la elaboración de gráficas en derivé y su interpretación de las representaciones gráficas de funciones, mostrando habilidades en la resolución de problemas de situaciones cotidianas.		
c9	Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
	Los límites: su interpretación en una tabla, en una gráfica y su aplicación en funciones algebraicas.	Interpreta gráficas de funciones continuas y discontinuas analizando el dominio y contradominio; y argumenta el comportamiento gráfico de la variable dependiente (y) en los punto (s) de discontinuidad.
	El cálculo de límites en funciones algebraicas y trascendentes.	Explica e interpreta los valores de una tabla, calcula valores cercanos a un número y analiza el comportamiento en los valores de la variable dependiente en problemas de su entorno social, económico y natural. C2, C5, C6
	OEAL2	Explica e interpreta diferentes representaciones gráficas y determina límites que tienden a infinito positivo o negativo, a cero, límites laterales por la izquierda y por la derecha, y límites finitos, de los objetos naturales que lo rodean. C16
		Argumenta la solución obtenida de un problema económico, administrativo, natural o social, mediante la teoría de los límites. C11
		Valora el uso de la TIC's en el modelado gráfico y algebraico de los límites para facilitar su interpretación y simulación en la resolución de problemas presentes en su contexto.
		Formula y resuelve problemas, a partir del cálculo de dominio y contradominio de las funciones algebraicas para determinar sus límites.

Figura 10. Identificación de objetivos y capacidades para el tema de límite (Fuente: SEP/SEMS/DGB (2013), objetivos y capacidades propuestos por los autores)

Estas capacidades fueron organizadas utilizando los objetivos de aprendizaje y el carácter de los mismos (teórico, técnico y práctico) determinando su relación con las competencias correspondientes (tablas 3, 4 y 5).

Tabla 3

Capacidades para el OEAL1 (teórico) y las competencias relacionadas

CCD1, CCD3, CD7 Y CCD8

- C1. Explicar la existencia o inexistencia del límite analizando los límites laterales.
- C2. Explicar la noción de límite como el comportamiento de la función cuando la variable independiente tiende a un valor dado, sin que necesariamente la función esté definida.
- C3. Argumentar el comportamiento de la función, aun cuando pudiera no estar definida en el punto de interés.
- C4. Describir la noción de límite a través de la representación gráfica de la función.
- C5. Describir la noción de límite por medio de aproximaciones numéricas en una tabla de valores.
- C6. Construir representaciones gráficas y tabulares para representar límites de funciones.
- C7. Bosquejar la representación gráfica de la función a partir de los límites en diversos

Tabla 3

Capacidades para el OEAL1 (teórico) y las competencias relacionadas

 puntos.

C8. Determinar si es pertinente (necesario) calcular el límite analizando el dominio y contradominio de la función.

C9. Esbozar el comportamiento gráfico de la función (en torno a un punto o en el infinito), con ayuda de herramientas tecnológicas.

C10. Describe situaciones fuera de un contexto matemático, en las que el cálculo de límites tiene sentido.

Tabla 4

Capacidades para el OEAL2 (técnico) y las competencias relacionadas

 CCD2, CCD3 y CCD8

C11. Calcular límites laterales para determinar la existencia del límite.

C12. Explicar cuando un límite es indeterminado.

C13. Explicar cuando un límite tiende a infinito positivo o negativo.

C14. Calcular límites utilizando los teoremas basados en operaciones con funciones.

C15. Calcular límites utilizando el teorema de sustitución directa en los casos que esto es factible.

C16. Calcular el límite de una función cuando la variable independiente toma valores cada vez mayores, realizando operaciones con infinito.

C17. Calcular límites de funciones trascendentes aplicando reglas básicas de límite que corresponden a cada tipo de función.

C18. Determinar el límite de una función a través de aproximaciones bilaterales sucesivas a un punto en la representación gráfica.

C19. Calcular el límite de una función evaluando su comportamiento alrededor de un punto a través de tablas.

C20. Determinar el límite de una función a través del análisis de su representación gráfica cuando la variable independiente tiende a infinito.

C21. Determinar el límite de funciones al aproximar su comportamiento en torno a un punto, por medio de representaciones generadas en herramientas tecnológicas.

C22. Generar gráficas y/o tablas con herramientas tecnológicas para predecir el comportamiento de una función en el infinito.

Tabla 4

Capacidades para el OEAL2 (técnico) y las competencias relacionadas

C23. Calcular el dominio y de la función para determinar la pertinencia de uso de técnicas algebraicas en el cálculo de límites.

C24. Calcular límites de funciones que presentan indeterminaciones $0/0$, aplicando técnicas algebraicas.

C25. Calcular límites de funciones trascendentes aplicando las reglas algebraicas e identidades relacionadas a cada tipo de función.

C26. Calcular límites en el infinito aplicando técnicas para romper las indeterminaciones $\infty-\infty$ y ∞/∞ .

C27. Calcular límites de funciones que modelan diversos fenómenos, objetos y situaciones.

Tabla 5

Capacidades para el OEAL3 (práctico) y las competencias relacionadas

CC1, CCD2, CCD4, CCD5, CCD6 y CCD7

C28. Argumentar la solución de problemas aplicando las propiedades de límite, en situaciones que dicha noción tenga sentido.

C29. Interpretar los valores de una tabla, aproximando bilateralmente la variable independiente a un número, para el cálculo de límites en la solución problemas en un contexto específico.

C30. Interpreta modelos gráficos de funciones para el cálculo de límites en la solución de problemas.

C31. Aplicar los teoremas de límites en la solución de problemas que implican el cálculo de límites en los puntos de interés.

C32. Construir representaciones gráficas para determinar límites de funciones que representan objetos y situaciones que lo rodean.

C33. Resolver problemas a partir del cálculo del dominio de funciones algebraicas para determinar sus límites.

C34. Hacer uso de las TIC para modelar gráfica y algebraicamente que faciliten la simulación y solución de problemas presentes en su contexto.

C35. Aplicar técnicas algebraicas para resolver problemas modelados por funciones que presentan indeterminaciones en los puntos de interés.

C36. Resolver problemas en diferentes contextos calculando límites a través de

Tabla 5

Capacidades para el OEAL3 (práctico) y las competencias relacionadas

operaciones con infinito y técnicas que rompan con las indeterminaciones que se presenten.

C37. Resolver problemas que implican el cálculo de límites en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social.

Para articular las expectativas de aprendizaje y los significados descritos en el análisis de contenido se exploraron los planteamientos respecto al contenido que se aborda con relación al límite de una función como noción central; los objetivos o propósitos generales de dicho contenido y los significados relevantes para la enseñanza que son potenciados en los objetos de estudio. Lo anterior permitió identificar cinco focos de atención según las dimensiones del significado que se privilegian en el programa de estudios (tabla 1) y las expectativas de aprendizaje del MCC (tablas 2, 3, 4 y 5). Los primeros 3 focos y el quinto son el resultado de los significados que propone el programa de estudios. El foco número 4 se consideró dada la importancia de la tecnología en el abordaje del tema del límite propuesto en la CCD4. Por tal motivo, los cinco focos de atención propuestos son:

- ◆ FOCO 1: Comprensión conceptual de la noción de límite de una función.
- ◆ FOCO 2: Procesamiento de sistemas de representación (transformaciones sintácticas invariantes y variantes).
- ◆ FOCO 3: Traducciones entre sistemas de representación.
- ◆ FOCO 4: El uso de herramientas y estrategias (matemáticas o tecnológicas) con relación al contenido.
- ◆ FOCO 5: Conexión del contenido matemático con contextos y situaciones concretas.

La tabla 6 sintetiza el instrumento de análisis, en el cual cada columna incluye las capacidades C_i (detalladas en las tablas 3, 4 y 5) que podrían demandar cada uno de los objetivos específicos OEAL $_i$ y sus competencias CCD $_i$ asociadas (detalladas en la tabla 2); dejando una columna al lado de cada capacidad para reportar aquellas que se demandan en las tareas analizadas. Estas capacidades se organizan según los cinco focos de interés del tema con que se relacionan.

Tabla 6

Instrumento para el análisis de las capacidades que se proponen para el tema de límite

	CCD1, CCD3, CCD7 y CCD8 OEAL 1 (teórico)	CCD2, CCD3 y CCD8 OEAL 2 (técnico)	CCD1, CCD2, CCD4, CCD5 y CCD7 OEAL 3 (práctico)
FOCO 1 Comprensión conceptual de la noción de límite de una función	C1, C2, C3	C11, C12, C13	C28
FOCO 2 Procesamiento en un sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes y variantes)	C4 C5	C14 C15, C16, C17	C29 C30, C31
FOCO 3 Traducciones entre sistemas de representación	C6, C7	C18, C19, C20	C32
FOCO 4 Uso de herramientas y estrategias con relación al contenido	C8, C9	C21, C22, C23, C24, C25, C26	C33, C34, C35
FOCO 5 Conexión del contenido con contextos y situaciones concretas	C10	C27	C37

Finalmente, se presentan los resultados de aplicar el instrumento presentado en la tabla 6 a las tareas propuestas en los tres libros seleccionados.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE PARA EL TEMA DE LÍMITE EN LA EVALUACIÓN DE TAREAS PROPUESTAS EN LOS LIBROS

Los problemas y ejercicios que proponen los libros seleccionados fueron organizados en grupos de tareas según la intencionalidad mostrada en sus indicaciones y la parte del contenido matemático escolar relacionado. Con base en esos aspectos se identificaron, para cada tarea, las capacidades matemáticas demandadas tomando como base el instrumento de análisis de la tabla 6. Para ejemplificar la interpretación realizada en las tareas de los libros seleccionados se presenta la tarea 1 expuesta en Ibáñez y García (2012, p. 46)

Tarea 1. Evalúa las funciones en los números dados (correcto hasta seis cifras decimales). Usa los resultados para estimar el valor límite o explica por qué no existe. Además escribe la expresión del límite

$$g(x) = \frac{x-1}{x^3-1}, x=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.99, 1.8, 1.6, 1.4, 1.2, 1.1, 1.01$$

$$f(t) = \frac{\sqrt[3]{t-1}}{\sqrt{t-1}}, t= 1.5, 1.2, 1.1, 1.01, 1.001$$

$$r(x) = \frac{1-\cos(x)}{x^2}, x=1, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$$

$$s(x) = \sqrt{x} \ln x, x=1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$$

La tarea 1 busca desarrollar aspectos teóricos y técnicos a través del trabajo con y entre representaciones con fundamento en la comprensión conceptual del límite de una función. Esto se realiza tomando en cuenta principalmente al foco 1 para la configuración de un significado para límite de una función, donde las capacidades que podría poner en juego el estudiante son la C1, C2, C5 y C19. Luego, este problema busca dar sentido a la noción de límite a través de un contexto matemático mediante el procesamiento y conversión entre sistemas de representación. Este mismo procedimiento fue utilizado para el análisis de cada tarea revisada en los libros seleccionados. Y las capacidades para cada tarea fueron registradas en el instrumento presentado en la tabla 6.

Siguiendo el mismo procedimiento se analizaron un total de 61 tareas para el tema de límite en los tres libros. De ellas, 21 corresponden a Ibañez y García (2012), 17 se encuentran en Valenzuela (2011) y 23 en Mora y del Río (2009). En estas tareas se reconocen respectivamente 88, 71 y 89 capacidades. Éstas se organizaron utilizando las competencias, objetivos de aprendizaje y los focos de interés. Esto permitió observar el posicionamiento de cada libro determinando si se concentra en lo conceptual, lo operativo o si incluye la conexión con contextos y situaciones que le dan sentido al concepto matemático. Estos resultados se presentan de forma sintetizada en la tabla 8.

Con base en las capacidades que potencialmente promueven las tareas analizadas (tabla 8), se determinó que los tres libros abordan todos los objetivos de aprendizaje identificados en el MCC, guardando similitudes importantes. En los tres libros las tareas potencian con mayor frecuencia capacidades de corte técnico, asociadas con el OEAL2: Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en variedad de situaciones y contextos. En contraparte, las tareas que potencian capacidades de corte práctico son las de menor porcentaje en los tres libros; siendo el libro más usado por los profesores encuestados (el de Ibañez y García, 2012) el que obtuvo el porcentaje más bajo. Luego, el objetivo de aprendizaje que menos se potencia es el OEAL3: Aplicar los límites y sus propiedades en la solución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Tabla 8

Énfasis en los libros analizados determinado por las capacidades que demandan las tareas para el tema de límite

Expectativas y focos de interés	Énfasis	Capacidades (%) Ibáñez y García (2012)	Capacidades (%) Valenzuela (2011)	Capacidades (%) Mora y Del Río (2009)
Objetivos específicos de aprendizaje	OEAL1	30 (34%)	25(35%)	22 (25%)
	OEAL2	49 (56%)	30 (42%)	46 (52%)
	OEAL3	9 (10%)	16 (23%)	21 (23%)
Total de capacidades		88 (100%)	71(100%)	89 (100%)
Focos de atención	FOCO 1	32 (36%)	20 (28%)	30 (34%)
	FOCO 2	26(30%)	18 (25%)	18 (20%)
	FOCO 3	15 (17%)	16 (23%)	16 (18%)
	FOCO 4	15 (17%)	11 (15%)	16 (18%)
	FOCO 5	0 (0%)	6 (9%)	9 (10%)
Total de capacidades		88 (100%)	71 (100%)	89 (100%)
Competencias	Más favorecidas	CCD3, CCD7 y CCD8	CCD3, CCD7 y CCD8	CCD3, CCD7 y CCD8
	Menos favorecidas	CCD4, CCD5 y CCD6	CCD4, CCD5 y CCD6	CCD4, CCD5 y CCD6

Respecto a los focos de atención, los tres libros guardan el mismo comportamiento (tabla 8). El foco 1 tiene el mayor porcentaje y va decreciendo hasta llegar al foco 5 que es el de menor porcentaje. Esto confirma la falta de tareas que demanden capacidades relacionadas con los usos de los límites en contextos no matemáticos. Otra semejanza es la forma en que las competencias del MCC fueron favorecidas por las tareas (tabla 8). Estas aproximaciones en los objetivos, focos y competencias, parecen evidenciar que no existen grandes diferencias en cuanto al énfasis de las capacidades que demandan las tareas propuestas en los tres libros analizados. En contraparte, los significados para el tema de límites que son potenciados por los libros guardan diferencias con lo propuesto institucionalmente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados de este artículo dan evidencia de las diferencias que se presentan en los libros al abordar un mismo contenido matemático escolar y si estos contemplan o no las demandas establecidas en los planes y programas de estudio del nivel educativo correspondiente. En esta investigación nos centramos en los significados y las capacidades que se potencian en torno al tema de límite para la EMS. Para este contenido se encontró, que tanto los significados como las expectativas de aprendizaje se pueden organizar alrededor de 3 ejes (teórico-conceptual, técnico y práctico). Esto confirma lo propuesto en Gómez (2007) sobre que la presencia de estos ejes dota al currículum de un enfoque funcional.

Para el caso de los significados, el de mayor coincidencia entre los libros y el programa de Cálculo Diferencial del MCC es el de corte técnico, potenciando al límite como propiedades y técnicas utilizando la representación simbólica en contextos matemáticos. Esta triada pone de manifiesto que la orientación procedimental en la enseñanza del límite es la que mayor reconocimiento tiene. No resulta raro que los estudiantes de este nivel educativo vean al tema de límite como un conjunto de propiedades o técnicas que les permite en el mejor de los casos calcular un número sin que exista una situación concreta extra matemática que lo dote de sentido. Para los significados en el eje conceptual las diferencias son más notorias, sobre todo en lo que respecta a las representaciones y fenomenología utilizadas (ver tabla 1). Lo anterior dado que los libros potencian la representación simbólica en contextos matemáticos, en vez de utilizar las representaciones y fenomenologías que propone el MCC y que para el caso son las tablas y gráficas y contextos no matemáticos. Al parecer, esto da indicios de que el tema de límite es introducido en los libros analizados de una manera menos intuitiva y funcional que la propuesta en el MCC.

De manera coincidente, las tareas presentes en los libros para el contenido del límite potencian prioritariamente las capacidades ligadas al OEAL2 que corresponde al eje técnico. Es decir, la expectativa más promovida con las tareas de los libros es el calcular límites de funciones. Además, la variedad de situaciones es restringida dado que se concentran en contextos matemáticos. Luego, la fenomenología que solicita el programa de Cálculo Diferencial del MCC en contextos concretos extra matemáticos es casi inexistente. Más aún, el libro de Ibañez y García (2012) que resultó tener más menciones de uso entre los profesores encuestados, no cuenta con tareas en contextos no matemáticos. Esta limitante afecta directamente la intención del Bloque II que propone resolver problemas de límites en situaciones de carácter económico, administrativo, natural y social (SEP/SEMS, 2013). Tal vez esta ausencia de tareas en contextos no matemáticos, sea una de las razones por las que el tema de límite resulte poco atractivo para los estudiantes y corrobore lo enunciado por Blázquez y Ortega (2001) sobre lo árido y abstracto del tema.

El instrumento propuesto en esta investigación ha permitido analizar tareas para el tema de límite, identificando las expectativas de aprendizaje que podrían promover los estudiantes al realizarlas. Este instrumento incluye un total de 37 capacidades organizadas en 3 objetivos de aprendizaje específicos y 5 focos de atención, tomando como referente lo planteado en el programa de estudios para la materia de Cálculo Diferencial de la EMS (SEP/SEMS, 2013) del MCC en México. Estas capacidades pueden ser utilizadas para la valoración individual de las tareas y de manera global relacionarlas con la promoción de las competencias y expectativas matemáticas que rigen actualmente la EMS en México. La aplicación de este instrumento ha brindado evidencias de una posible desarticulación entre el currículum oficial y potencial para el tema de límite. Es decir, los libros analizados no necesariamente reflejan del todo los significados y expectativas de aprendizaje institucionales del MCC. De esta manera, es posible que se presente un inconveniente para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de la EMS en México: el uso de libros cuyas orientaciones no potencian un significado del límite con un enfoque mayormente intuitivo y funcional y tareas cuyas capacidades que podrían potenciar no dan evidencia de que el límite tiene sentido fuera del contexto matemático. Para robustecer esta hipótesis sería necesario el análisis de más libros.

REFERENCIAS

- Ake, L. y Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 171-201.
- Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J. M. Goñi (Coord.), C. Alsina, D. Ávila, C. Burgués, J. Comellas, F. Corbalán, F. A. García Delgado, C. Hahn, C. y J. Serra. (Eds.), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo 21* (pp. 13-21). Graó.
- Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema*, 31(59), 1061-1081.
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). El concepto de límite en la educación secundaria. En S. Blázquez y T. Ortega (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 125-157). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8(1), 9-28.

- Claros, F., Sánchez, M. y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933-2005. *Educación Matemática*, 28(1), 125-152.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Artega, P. y Gea, M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema*, 30(55), 713-737. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20>
- Dolores, C. y García, M. (2012). *¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato?* Plaza y Valdez editores.
- Fan, L., Trouche, L., Qi, C., Rezat, S., y Visnovska, J. (Eds.) (2018). *Research on Mathematics textbooks and teachers' resources: Advances and issues*. Springer.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), 117-131.
- Gómez, L. M. y Pantoja, Y. M. (2013). Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. *Revista SIGMA*, 11(1), 26-38.
- Gómez, P. (2007). *Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las Matemáticas. En Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Herrera, E., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA*, 11(4), 280-306.
- Ibáñez, P. y García, G. (2012). *Matemáticas V: Cálculo Diferencial*. Cengage Learning.
- López, E., Guerrero, A., Carrillo, J. y Contreras, L. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8(1), 73-93.
- López, G. y Tinajero, G. (2009). Los docentes ante la reforma del bachillerato. *Revista mexicana de investigación educativa*, 14(43), 1191-1218.
- Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades del aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2017). Análisis de las Actividades Propuestas por un libro de Texto: El Caso de la Medida. *REDIMAT*, 6(2), 136-163. <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2017.2415>
- Mora V. E. y del Río F., M. (2009). *Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económicas administrativas*. Santillana.

- Moreno, M., Mesa, G. y Azcárate, C. (2007). Competencias y evaluación: desarrollo de un instrumento de análisis y caracterización de problemas matemáticos de nivel superior. *Actas de Comunicaciones del XI SEIEM*, La Laguna.
- Mosquera, J. (2018). Estudio comparativo de Textos Escolares Oficiales de Matemáticas de Ecuador y Venezuela: los Sistemas de Ecuaciones Lineales. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 14(52), 91-117.
- Navarro, C., Maldonado, E. y López, E. (2012). Un estudio de investigaciones cognitivas acerca del concepto de límite. El caso de habla hispana. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 171-178). CLAME.
- Picado, M., Gómez B. y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del sistema métrico decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina, (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación formación de profesores e innovación curricular* (pp. 349-358). Editorial Comares.
- Pino, J. y Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38(1), 63-88.
- Real, I., Segovia I. y Ruiz, F. (2013). Estudio de los textos para la enseñanza de las matemáticas del Padre Manjón. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación formación de profesores e innovación curricular* (pp. 349-358). Editorial Comares.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de la investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina. (Ed.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Editorial Comares.
- Rico, L., Lupiáñez, J. y Molina, M. (2013). Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación formación de profesores e innovación curricular. Editorial Comares.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Sánchez, N. y Ramírez, J. (2018). Idoneidad didáctica en un libro de texto de educación primaria en la unidad de álgebra. *Revista Internacional de Investigación y Formación Educativa*, 4(2), 1-20
- Sánchez, N. y Ruíz, B. (2018). Elementos de inferencia informal presentes en libros de texto de matemáticas en el tema de estadística. Un estudio exploratorio. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 11(1), 80-85.

- SEP/SEMS/DGB (2013). *Programa de estudios: Cálculo Diferencial*. Autor.
- Valenzuela, A. L. (2011). *Cálculo Diferencial e Integral 1*. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
- Vicente, S. y Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *PNA*, 11(4), 253-279.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D. y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, 8(29), 9-19.

Judith A. Hernández
Universidad Autónoma de Zacatecas,
México
judith700@hotmail.com

Raúl Zamora
Colegio de Bachilleres del Estado
de Zacatecas, México
raul.zamora.rayas@gmail.com

José L. Lupiáñez
Universidad de Granada, España
lupi@ugr.es

Recibido: Febrero de 2020. Aceptado: Julio de 2020
doi: 10.30827/pna.v14i4.13736



ISSN: 1887-3987