El número como cantidad física y concreta, un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros

José Luis Herrera y Alberto Zapatera

Durante el aprendizaje de los números naturales en la Educación Primaria, el estudiante adquiere la concepción de número como cantidad de magnitud con soporte en el mundo físico y concreto. Posteriormente, la generalización de esta concepción a otros campos numéricos supone un obstáculo epistemológico que dificulta su aprendizaje. Este estudio pretende determinar estos obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros, verificar su presencia en los errores y en las justificaciones que realizan los estudiantes y presentar sugerencias metodológicas que faciliten la ruptura con los obstáculos para mejorar la enseñanza de los números enteros.

Términos clave: Campo numérico; Concepciones; Números enteros; Números naturales; Obstáculos epistemológicos

The Number as a Physical and Concrete Quantity, an Obstacle in the Learning of Whole Numbers

During the learning of the natural numbers in Primary Education, the student acquires the conception of number as quantity of magnitude with support in the physical and concrete world. Later, the generalization of this conception to other numerical fields supposes an epistemological obstacle that hinders its learning. This study aims to determine these epistemological obstacles in the learning of the integer numbers, verify their presence in the errors and in the justifications made by the students and present pedagogical suggestions that facilitate the break with the obstacles to improve the teaching of the integer numbers.

Keywords: Conceptions; Epistemological obstacle; Integer numbers; Natural numbers; Numerical field

Herrera, J. L. y Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA 13*(4), 197-220.

La historia de los números enteros está llena de vicisitudes que dificultaron su aceptación como objeto matemático. La gran dificultad para incluirlos como objeto matemático fue encontrar la forma de incorporarlos como representaciones de la realidad, según la concepción de número que tenían los matemáticos de la antigüedad y que Glaeser (1981) llama Estadio de las operaciones concretas.

Esta corriente ideológica que, a partir de los Elementos de Euclides, permeó todo el pensamiento matemático hasta finales del siglo XIX, considera que los objetos matemáticos son parte del mundo físico y propone que, cuando el pensamiento deductivo no sea suficiente, se recurra al pensamiento natural, al sentido común o a la intuición para dar razones de sustento a lo matemático (Cid, 2015). Percibe la matemática como descubrimiento que encuentra validez en la realidad y no como una creación social, por lo que la matemática surgía por la necesidad de contar y representar correctamente situaciones que utilizaban lo concreto, lo intuitivo y lo real para justificar el pensamiento que involucraba la representación y uso del número como cantidad o medida de magnitud.

Los números negativos dificultaban la intuición creativa de los matemáticos, lo que justificaba su rechazo hasta el punto de calificarlos como falsos, ficticios o absurdos. Además de no tener soporte en la realidad, los matemáticos, debido al tratamiento formal de las matemáticas, tenían tropiezos con ellos al operar algebraicamente.

La concepción de número como cantidad y el soporte físico de los objetos numéricos que predominó hasta mediados del siglo XIX, cambió a partir de los planteamientos propuestos por el matemático alemán Hankel (1867) que advertía que, para crear una aritmética universal, esta debe ser separada de percepciones sensoriales, ya que la matemática es una creación intelectual del ser humano y, por tanto, inventada. Hankel reformuló el Principio de permanencia de las formas equivalentes de Peacock (1845), utilizado para extender las definiciones de las operaciones elementales de la aritmética, y trasladó y validó las propiedades de los naturales a los números negativos. Este cambio conceptual hizo posible que la matemática avanzara por sí sola, pasando a su estadio formal en el que tienen total cabida los números enteros, los racionales, los irracionales y los complejos.

La incorporación de los números enteros representa un cambio sustancial en el mundo de las matemáticas: se pasó de una matemática que toma el número como cantidad, con soporte en lo concreto y en el mundo físico, a una matemática formal donde el número tiene diferentes significados y su validez radica en el cumplimiento de las reglas de la misma matemática.

Este proceso histórico de la concepción del número se ve explícitamente reflejado en el sistema educativo por medio de las distintas etapas en que está dividida la enseñanza obligatoria. En la Educación Primaria se inicia el estudio del campo numérico desarrollando en el estudiante la concepción del número como cantidad, como representación de lo concreto y con soporte lógico en el mundo natural y físico. En esta etapa el estudiante soporta la validez de sus argumentaciones matemáticas a través de ejemplos concretos que le ayudan en el proceso de comprensión y en la argumentación de sus respuestas. Al final de la Educación Primaria y, especialmente, en la Educación Secundaria, la enseñanza de los números enteros produce una ruptura con lo concreto y físico. Se inicia al estudiante en la matemática formal donde, en muchas ocasiones, su actividad matemática no tendrá fundamentación en lo real, intuitivo y concreto y, para soportar sus argumentos, conclusiones y respuestas, tendrá que hacerlo dentro de las mismas reglas matemáticas.

Como afirman González et al. (1990), los modelos de tipo concreto no sirven para representar los números enteros, por lo que su enseñanza no es totalmente creíble a través de estos modelos. Sin embargo, también considera que tratarlos desde el aspecto meramente formal tampoco mejora su aprendizaje, ya que son olvidados fácilmente y generan más errores y confusiones a los estudiantes en su actividad matemática. Esta nueva concepción de número genera una ruptura en los procesos de enseñanza y aprendizaje: los estudiantes tienen que cambiar las concepciones que los maestros les inculcaron durante toda la Educación Primaria, y a las que recurrían para lograr comprender las diferentes situaciones que se le planteaban, para ahora buscar la comprensión dentro y desde la matemática.

En el aprendizaje de los números enteros, el estudiante tiene que cambiar toda la concepción del número desarrollada en la Educación Primaria, estimulada por los maestros y propiciada por las orientaciones del sistema educativo que en esta etapa promueve el aprendizaje a través de lo concreto, real e intuitivo. Se enseña con material manipulativo y representaciones pictóricas, por lo que el estudiante aprende a ver la validez de la matemática en el mundo físico.

No se afirma que estas elecciones didácticas no sean pertinentes; por el contrario, las teorías del aprendizaje de corte constructivista las confirman como las más acertadas en esta etapa. Por ejemplo, Piaget (1983), que agrupa en cuatro etapas el desarrollo cognitivo del niño, sostiene que en la etapa de la Educación Primaria (de 6 a 11 años) los alumnos aprenden a partir de la asociación con situaciones del mundo real y el uso de lo concreto y manipulativo; es a partir de los 12 años, en la Educación Secundaria, cuando se requiere que el alumno adquiera otras concepciones del número. Pero ni el sistema educativo ni los docentes hacen explícito este cambio, por lo que el alumno transfiere las concepciones aprendidas en Primaria para adquirir el nuevo aprendizaje y enfrentarse a las situaciones que se le proponen. Es entonces cuando muchos de los esquemas mentales construidos por el estudiante se convierten en obstáculos para el aprendizaje de los números enteros. Este proceso de enseñanza y aprendizaje del número natural en la Educación Primaria permite conjeturar que la consideración del número como cantidad con soporte en lo concreto y real es un obstáculo para el aprendizaje de los números enteros.

Partiendo de esta hipótesis se plantean los siguientes objetivos de investigación:

- Establecer la presencia del obstáculo epistemológico que considera el número como cantidad con soporte en el mundo físico y concreto
- Determinar si sus concepciones derivadas son causa de errores en los estudiantes de edades entre 12 a 14 años al resolver actividades con números enteros
- Elaborar sugerencias metodológicas para generar la ruptura con el obstáculo y facilitar la enseñanza de los contenidos matemáticos de los números enteros.

MARCO TEÓRICO

Obstáculos epistemológicos

A veces los esquemas cognitivos que posee el alumno no le permiten incorporar nuevos conocimientos y para incorporar esos nuevos conocimientos el alumno debe reorganizar los esquemas cognitivos previos, ya que el conocimiento procede de "construcciones sucesivas con constantes elaboraciones de nuevas estructuras" (Piaget, 1978, p. 1). La posición de Bachelard (2011) sobre la adquisición del conocimiento es más radical que la de Piaget puesto que considera que la adquisición de nuevos conocimientos exige la destrucción de conocimientos anteriores ya que "se conoce contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos" (p. 14).

Por su parte, Brousseau (1983) sostiene que, con frecuencia, los errores son "efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado" (p. 171). Profundizando en esta idea, en su Teoría de las situaciones didácticas señala que en el aprendizaje el alumno "compromete los conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar nuevas concepciones" (p. 172). Cid (2015) concreta estas ideas al afirmar que, muy a menudo, "para aprender algo nuevo es necesario modificar un conocimiento anterior que está obstaculizando ese aprendizaje" y que "los conocimientos previos no siempre son un apoyo en el proceso de adquisición de nuevos conocimientos sino que, en ocasiones, son una rémora que impide la evolución del sujeto hacia otros estados de conocimiento" (p. 7).

Desde esta perspectiva, los conocimientos previos a veces se convierten en obstáculos que impiden la construcción de nuevos conocimientos y dificultan el aprendizaje. Brousseau (1989) denomina estos obstáculos en los que los conocimientos previos dificultan la adquisición de nuevos conocimientos como obstáculos epistemológicos. Diferencia así los obstáculos epistemológicos de los obstáculos ontogenéticos, que se deben a las características del desarrollo del alumno, de los obstáculos culturales, que son consecuencia de las creencias o prácticas culturales de una sociedad, y de los obstáculos didácticos, que son resultado de las elecciones didácticas realizadas para establecer la situación de enseñanza.

Duroux (1983) precisó las condiciones, modificadas después parcialmente por Brousseau (1989), que debe cumplir un obstáculo para ser considerado como epistemológico: un obstáculo epistemológico es un conocimiento que tiene un dominio de validez, que es constitutivo del saber y que persiste y reaparece. Es decir, un obstáculo no es una dificultad ni una falta de conocimiento, es un conocimiento. Ese conocimiento es válido en un determinado dominio o contexto en el que produce respuestas correctas, pero engendra respuestas falsas fuera de ese dominio. Para adquirir nuevos conocimientos es indispensable identificar el obstáculo, rechazarlo e incorporar su rechazo al nuevo saber; y sin embargo, a pesar de ese rechazo, el obstáculo resiste y continúa manifestándose. Es decir, los obstáculos epistemológicos son obstáculos que presentan determinados conceptos para ser aprendidos, que se han presentado a lo largo de la historia de las matemáticas y que para avanzar en la comprensión del concepto es preciso rechazarlos, de tal forma que el rechazo explícito forma parte del saber matemático actual.

El mecanismo de adquisición de conocimiento descrito anteriormente puede aplicarse tanto al proceso de enseñanza y aprendizaje, como a la epistemología o historia de las matemáticas. En esta ambivalencia, los grandes obstáculos que han resistido en el tiempo tienen una evolución equivalente en el pensamiento del niño (Brousseau, 1983). Además, Brousseau (1989) distingue, según su permanencia en el tiempo, dos tipos de obstáculos epistemológicos: inevitables y evitables. Un obstáculo epistemológico es inevitable cuando ha sido localizado a lo largo de la historia y aún perdura en los alumnos actuales, y es evitable cuando, aunque ha sido localizado a lo largo de la historia, no perdura en los alumnos actuales.

Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de los números enteros

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números enteros corresponde a Glaeser (1981), cuya intención era buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos. Para ello buscó rastros de esos obstáculos en el pasado, observando la *sorprendente lentitud* del proceso de construcción del número negativo y las dificultades que tuvo a lo largo de la historia.

Glaeser (1981) indica los siguientes obstáculos en la evolución histórica del número negativo, desde sus primeras apariciones hasta el concepto actual:

- ♦ Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas: aunque se enuncian reglas para efectuar cálculos con números negativos, no se acepta la existencia de números negativos aislados.
- ♦ Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas: aunque se concibe la existencia de soluciones negativas, no se admiten como cantidades reales.

- Dificultad para unificar la recta real: la percepción de negativos y positivos en términos antinómicos impide su unificación en una única recta numérica.
- Ambigüedad de los dos ceros: la transición de un cero absoluto, como ausencia de cantidad, a un cero, como origen elegido arbitrariamente, presenta dificultades.
- Estancamiento en el estadio de las operaciones concretas: aunque se admite el número negativo como cantidad real y su estructura aditiva, no se justifica la estructura multiplicativa.
- Deseo de un modelo unificador: la comunidad matemática está interesada en encontrar un modelo unificador que pueda justificar también la estructura multiplicativa.

Duroux (1983) y Brousseau (1983) consideran que los dos primeros obstáculos establecidos por Glaeser (1981) no son epistemológicos ya que son debidos a una falta de conocimiento y, por lo tanto, no satisfacen la primera condición que afirma que los obstáculos epistemológicos son conocimientos. Sugieren que el verdadero obstáculo radica en considerar que un número es un ente matemático que representa una cantidad de magnitud; este obstáculo puede inducir a considerar los números negativos como algo radicalmente distinto a los positivos y no su prolongación. Siguiendo esta línea, Schubring (1986) considera que las causas de la impugnación de los números negativos como objeto plenamente matemático se debe principalmente a la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número.

Trabajos posteriores sobre epistemología del número negativo (Coquin-Viennot, 1985; Gallardo, 2002; Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991; Peled, 1991) establecen niveles en el aprendizaje, utilizan los obstáculos como sinónimo de dificultad y ruptura o repiten con pequeñas matizaciones lo ya dicho por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring.

Coquin-Viennot (1985) estableció cuatro niveles jerárquicos de concepción sobre el tratamiento de los números enteros, a partir de los errores y estrategias de solución de estudiantes de 11 a 15 años. En el primer nivel, el estudiante considera el número como medida de cantidad y no puede ser más que positivo. En el segundo nivel, el estudiante se apropia de la estructura aditiva de los enteros, pero se sigue remitiendo a los números naturales para la solución de la mayoría de las situaciones. En el tercer nivel, el estudiante trata a los números positivos y negativos como un todo, pero tiene dificultades en la resolución de problemas de estructura multiplicativa. Por último, en el cuarto nivel se integra el anterior y se asimila la estructura multiplicativa.

Peled (1991) plantea también cuatro niveles teóricos en función de dos aspectos del conocimiento de los números enteros: la recta numérica y la dimensión de cantidad. Los niveles van desde estudiantes que consideran los números negativos como números naturales con las propiedades opuestas, hasta los estudiantes que realizan operaciones con cualquier número entero.

Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991), a través del análisis de los errores cometidos por alumnos de 12 a 14 años, agruparon las ideas que causan los errores y obstaculizan el aprendizaje de los números enteros en dos grupos: lo real como obstáculo y la imposición de lo formal como obstáculo. Consideran que la intuición primaria de número como cantidad real obstaculiza de múltiples formas la construcción de los números enteros y que muchos errores se deben al bloqueo del paso del plano real al plano formal, y reconocen la necesidad de romper con estas ideas.

Gallardo (2002), en un estudio histórico-epistemológico para analizar la transición de los números naturales a los números enteros en estudiantes de 12 y 13 años, identificó, tanto en los textos históricos como en las tareas propuestas a los estudiantes, cuatro categorías de la negatividad: el número sustractivo, en la que la noción de número se subordina a la de magnitud, el número relativo, en la que los signos + y – son asociados con la cantidad sin agregarle significado alguno, el número relativo, en la que la idea de cantidades opuestas surge en el dominio discreto y la idea de simetría en el dominio continuo y el número aislado, en la que se considera el número negativo como resultado de una operación o como solución de un problema o una ecuación.

Otros investigadores que han analizado la epistemología de los números enteros en las respuestas de alumnos son Küchemann (1981), Vlassis (2008), Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle y Lewis (2014) y Bofferding (2014).

Küchemann (1981), a partir de las respuestas de alumnos de 14 años a un cuestionario sobre sumas, restas y multiplicaciones, observó que se obtenían mejores resultados en las sumas, seguidas de las multiplicaciones y que las restas eran las operaciones que presentaban mayor dificultad.

Vlassis (2008) estableció que gran parte de las dificultades de los alumnos proviene de la incapacidad de tener en cuenta la polisemia de los signos + y – (como operación y como signo positivo o negativo), de gestionar expresiones con dos signos negativos, de diferenciar reglas aditivas y multiplicativas y de aceptar soluciones negativas.

Bishop et al. (2014) encontraron similitudes entre el pensamiento de los alumnos y el de los matemáticos del pasado y agruparon los retos conceptuales a los que se enfrentan los alumnos en tres obstáculos persistentes: representar números menores que nada, quitar más de lo que se tiene y resolver el funcionamiento de la suma y la resta.

Bofferding (2014) investigó los efectos de los modelos mentales de los alumnos en la conceptualización de números enteros por medio de tres categorías: valor numérico, orden y magnitudes dirigidas. Observó también que los alumnos, para comprender los números enteros, confían demasiado en los principios de los números naturales, pero que después de un período de instrucción bastantes alumnos evolucionan hacia un modelo formal.

Planteamiento de la investigación

La aceptación de los números negativos, y en general la construcción del campo numérico de los enteros, tuvo grandes dificultades a lo largo de la historia y su rechazo se debió principalmente a la consideración del número como representación del mundo físico y natural con soporte en lo concreto.

La concepción matemática del número como cantidad o medida de magnitud impidió la aceptación de los números enteros como objetos matemáticos y configuró un obstáculo epistemológico. Este obstáculo solo se superó cuando la matemática se desligó de la antigua concepción y sustituyó la intuición y la percepción por el rigor matemático. Este cambio de pensamiento desencadenó el salto de lo concreto a lo formal y significó la aceptación de los números negativos como objetos matemáticos.

Aunque muchos investigadores y profesores se esfuerzan en buscar situaciones concretas de la vida cotidiana para justificar todas las propiedades de los números enteros, la enseñanza del número entero no puede ser tratada exclusivamente desde el plano concreto; pero, por otra parte, situar de entrada los números enteros en el plano formal puede reducirlos a un “formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones” (Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991, p. 13). Desde esta perspectiva, la causa de las dificultades y errores que se producen en el aprendizaje de los números enteros proviene de dos obstáculos epistemológicos: la consideración del número como cantidad de magnitud y la doble vía para abordar su aprendizaje, desde el plano concreto y desde el plano formal.

Esta investigación pretende verificar si estos obstáculos epistemológicos perduran en el aprendizaje de los números enteros en los alumnos actuales mediante el estudio de las siguientes ideas derivadas de la consideración histórica del número como cantidad de magnitud con soporte en el mundo físico y concreto:

- El número como expresión de cantidad
- La suma como aumento
- La sustracción como disminución
- La multiplicación como multiplicación natural
- La división como división natural
- El orden como orden natural

Metodología

Esta investigación tiene un carácter cualitativo con enfoque interpretativo que pretende descubrir si el obstáculo epistemológico de considerar el número como cantidad de magnitud con soporte en el mundo físico y concreto pervive en los estudiantes actuales y es causa de alguno de los errores que cometen al resolver situaciones en las que intervienen números enteros. Este enfoque pretende encontrar la fundamentación de la justificación de los estudiantes y descubrir los conceptos y nociones en las que se cimientan para resolver una tarea matemática.

Participantes

En la investigación participaron 57 estudiantes de 12 a 14 años de edad de dos instituciones educativas, una rural y otra urbana. Los estudiantes habían estudiado en clase el tópico de los números enteros. La introducción al campo numérico de los enteros se había realizado por medio de modelos concretos a través de situaciones y contextos de la vida diaria (Maz y Bracho, 2011) que permitieron justificar las reglas de las operaciones e iniciar su aprendizaje formal.

Instrumentos

Para identificar los errores relacionados con el número como cantidad de magnitud que cometen los estudiantes en actividades con números enteros, se aplicó un cuestionario basado en una adaptación y ampliación del utilizado por Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991). El cuestionario constaba de dos partes: en la primera debían resolver tres ejercicios de cada una de las cuatro operaciones (tabla 1) y en la segunda debían resolver también tres ejercicios para cada uno de los seis obstáculos epistemológicos a investigar (tabla 2).

Tabla 1
Cuestionario utilizado en la investigación. Parte 1. Cálculo numérico

1. Suma	3. Multiplicación
1.1. $3+(-4)$	3.1. $3\times(-4)$
1.1. $-6+(-5)$	3.2. $(-7)\times(-2)$
1.2. $-2+(-3)+8+(-4)$	3.3. $5\times(-2)\times(-1)\times 3$
2. Resta	4. División
2.1. $3-(-4)$	4.1. $-18\div(+3)$
2.2. $-35-(15)$	4.2. $-42\div(-6)$
2.3. $9-(-4)-(+8)$	4.3. $56\div(-2)\div(-7)\div(+2)$

En cada operación y en cada obstáculo epistemológico se diseñaron tres actividades para controlar si el error era por despiste, por azar o “el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el alumno de modo consistente y con confianza” (Brousseau, Davis y Warner, 1986, citado por Rico, 1995, p. 8), y con ello controlar que los errores evidenciados realmente se soportan en una concepción obstáculo.

Tabla 2
Cuestionario utilizado en la investigación. Parte 2. Obstáculos epistemológicos

5. El número como expresión de cantidad
   5.1. Encuentra una situación real en la que la expresión $5\times(-3)$ tenga sentido
   5.1. Encuentra una situación real en la que la expresión $5-(-3)$ tenga sentido
   5.2. Encuentra una situación real en la que la expresión $-(-3)$ tenga sentido
6. La suma como aumento
   6.1. Encuentra un número que sumado a 5 dé como resultado 2
   6.2. ¿Cuál es el resultado de sumar 10 a -7?
   6.3. Si a $+15$, le agregas -11, el resultado es ___
7. La resta como disminución
   7.1. ¿Cuál es el número que restado de 8 da como resultado 12?
   7.2. ¿Cuál es la diferencia entre 5 y -4?
   7.3. Si a -7 le restas -2, el resultado es ___
8. La multiplicación como multiplicación natural
   8.1. ¿Es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3?
   8.2. ¿Cuál es el número que multiplicado por 5 da -15?
   8.3. Si a -7 le multiplicas por 5, el resultado es ___
9. La división como división natural
   9.1. En los números enteros, ¿es correcto que el cociente de $15\div3$ es 6 y resto -3?
   9.2 Busca un número que dividido entre 3 de -5
   9.3. Si a -15 le divides entre -3, el resultado es __
10. El orden como orden natural
   10.1. ¿Cuál es el número mayor en 3 unidades a -7?
   10.2. ¿Cuál es el número menor en una unidad a -5?
   10.3. Sigue la secuencia $13, 10, 7, 4, \_, \_, \_$

RESULTADOS

En las tablas 3 y 4 se recogen los resultados cuantitativos obtenidos en cada una de las tareas del cuestionario. En las tablas se presentan el número de alumnos que han cometido errores en cada una de las tareas y, para una mejor comprensión, también se expresan los resultados en porcentaje.

Tabla 3
Respuestas erróneas en el cuestionario. Cálculo numérico

Concepto	Ítem	Estudiantes con errores	Porcentaje
Suma	1.1	31	54%
	1.2	27	47%
	1.3	40	70%
Media			57%
Resta	2.1	34	60%
	2.2	37	65%
	2.3	45	79%
Media			68%
Multiplicación	3.1	33	58%
	3.2	28	49%
	3.3	42	74%
Media			60%
División	4.1	33	58%
	4.2	30	53%
	4.3	40	70%
Media			60%
Media cálculo numérico			61%

En los ejercicios de cálculo numérico la cantidad de errores es menor que en el campo conceptual donde se analizan los obstáculos, pero en ambos casos muy altos, 61% y 88% respectivamente. Estos resultados son coherentes y evidencian que los esquemas conceptuales erróneos provocan errores en los cálculos numéricos cuando resuelven actividades en un campo numérico donde la concepción no es correcta.

La diferencia de errores entre el cálculo numérico y el campo conceptual puede estar relacionada con el aprendizaje por parte de los estudiantes de una matemática mecánica y repetitiva, en la que no se aplica un proceso de razonamiento que implique la metacognición al afrontar las actividades planteadas por el profesor.

Tabla 4
Respuestas erróneas en el cuestionario. Obstáculos epistemológicos

Concepto	Ítem	Estudiantes con errores	Porcentaje
El número como expresión de lo real y concreto	5.1	52	91%
	5.2	56	98%
	5.3	57	100%
Media			96%
La suma como aumento	6.1	50	88%
	6.2	46	81%
	6.3	38	67%
Media			79%
La resta como disminución	7.1	56	98%
	7.2	51	89%
	7.3	49	86%
Media			91%
La multiplicación como multiplicación natural	8.1	54	95%
	8.2	52	93%
	8.3	51	89%
Media			92%
La división como división natural	9.1	57	100%
	9.2	55	96%
	9.3	50	88%
Media			95%
El orden como orden natural	10.1	52	91%
	10.2	51	89%
	10.3	25	44%
Media			75%
Media obstáculos epistemológicos			88%

En este sentido, algunos estudiantes, aunque realizan correctamente cálculos numéricos de números enteros, no son capaces de interpretar el significado de una tarea con números negativos, de encontrar números menores que cero, de reconocer que los resultados de sumar y multiplicar enteros pueden aumentar pero también disminuir, de interpretar la resta como una diferencia o de entender la utilidad del número entero en situaciones algebraicas o concretas.

Los errores, las justificaciones y argumentos de los estudiantes en cada una de sus respuestas ponen de manifiesto la presencia de las concepciones características de la consideración del número como cantidad con soporte en el mundo físico y concreto como un obstáculo epistemológico en el aprendizaje de los números enteros y revelan la pervivencia de otras concepciones obstáculo asociadas y mantenidas por los matemáticos hasta finales del siglo XIX.

Los resultados obtenidos en las cuatro cuestiones del cálculo numérico confirman las observaciones de Küchemann (1981) ya que la operación con más éxito fue la suma, seguida de la multiplicación y división, y la resta fue la operación que presentó mayor dificultad.

El número como expresión de lo real y concreto

En esta concepción obstáculo el estudiante afronta las situaciones a través de referencias con objetos de uso cotidiano y solo puede sustentar una justificación si encuentra la forma de relacionarla con lo que puede percibir con los sentidos.

Esta concepción se refleja en estudiantes de Educación Secundaria cuando, al pedirles que creen una situación que se modele con una multiplicación de enteros, no encuentran como resolverla o se remiten a situaciones concretas similares a las usadas con números naturales.

El 91% de los estudiantes, en la primera cuestión, no encontraron una situación real en la que la expresión $5 \times (-3)$ tenga sentido (figura 1).

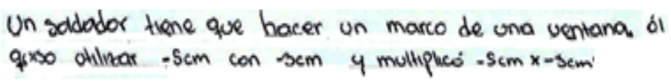
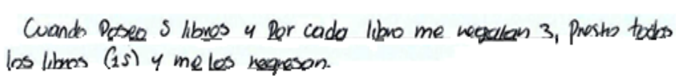
	*Un soldador tiene que hacer una ventana, él quiso utilizar 5 cm con -3 cm y multiplicó 5cm x -3 cm*
	*Cuando poseo 5 libros y por cada libro me regalan 3, presto todos los libros (15) y me los regresan*

Figura 1. Errores debidos al obstáculo del número como expresión de lo real y concreto

Los estudiantes solo encuentran el significado de los números en situaciones del mundo físico, olvidando el significado del signo menos y tomando el valor como cantidad del número para ajustarse a la concepción que han construido en todo su proceso formativo en la Educación Primaria; estos resultados confirman la idea de Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca (1991) de que “la enseñanza del número entero no admite ser enteramente tratada, de forma creíble, en el plano concreto" (p. 13).

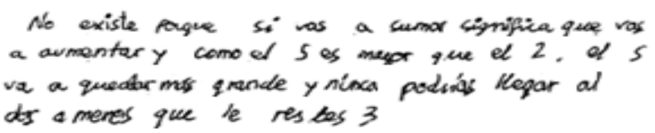
Más difícil aún les resultó encontrar situaciones para $5-(-3)$ y $-(-3)$. Los estudiantes, acostumbrados a la concepción binaria del signo menos tienen muchas dificultades para captar su significado unario, es decir, no diferencian adecuadamente cuando el signo se refiere a la operación resta y cuando se refiere a la negatividad del número. Esta dificultad se manifiesta de forma más evidente en expresiones que contienen dos signos menos seguidos, con los dos significados. Esta observación está en concordancia con lo establecido por Vlassis (2008) cuando expresa que muchos errores de los alumnos se deben a la incapacidad para dominar la polisemia de los signos + y – y gestionar expresiones con dos signos negativos.

La suma como aumento

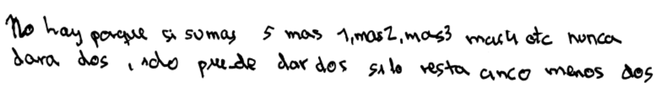
El 57% de los estudiantes cometieron errores al resolver las tres sumas del primer apartado; este porcentaje aumentó al 79% cuando se enfrentaron a preguntas de tipo conceptual de la misma operación.

El obstáculo se crea al trasladar las palabras sumar, adicionar o agregar, del campo numérico de los naturales al campo de los enteros. Para resolver este tipo de tareas con números enteros los estudiantes se remontan a las concepciones construidas en la Educación Primaria para sumar números naturales en las que al sumar dos números siempre se obtiene un número mayor. La extensión al campo de los números enteros de esta creencia, inferida del trabajo con objetos manipulables y concretos de la Educación Primaria, ocasiona un obstáculo epistemológico que provoca frecuentes errores en los estudiantes.

Este obstáculo se manifiesta de forma evidente en la primera cuestión en la que debían encontrar un número que sumado a cinco nos dé dos. Un 88% de los estudiantes respondieron que es imposible que al sumar un número dé cómo resultado otro número menor (figura 2).



No existe porque si vas a sumar significa que vas a aumentar y como el 5 es menor que el 2, el 5 va a quedar más grande y nunca podrías llegar al dos, a menos que le restes 3



No hay, porque si sumas 5 más 1, más 2, más 3, más 4, etc. nunca dará dos, solo puede dar dos si le restas cinco menos dos

Figura 2. Errores debidos al obstáculo de considerar la suma como aumento

En la primera cuestión se pedía encontrar un sumando y en las otras dos cuestiones se pedía el resultado de sumar 10 a –7 y de agregar –11 a +15. Los porcentajes de errores en estas dos cuestiones fueron ligeramente mayores.

La resta como disminución

El porcentaje de error en el apartado dos, en el que los estudiantes debían resolver restas de números enteros, ascendió al 68%, mientras que en las del apartado siete, en el que debían resolver cuestiones conceptuales de la resta, ascendió al 91%. Esta diferencia evidencia, además de un aprendizaje centrado en el cálculo, la existencia de un obstáculo epistemológico que impide comprender el significado de esta operación.

En Educación Primaria la resta asume significados como quitar o disminuir en el campo de los números naturales; estos significados de la resta se deben refinar cuando se aplican al campo de los enteros, remarcando el significado de diferencia a través de la comparación, es decir, lo que le falta o sobra a un número para ser igual a otro. Con este significado los números enteros tienen sentido y utilidad sin recurrir a situaciones de objetos concretos.

Sin embargo, el significado de diferencia en el sentido de comparación no se desarrolla en los estudiantes cuando se enfrentan al aprendizaje de los números enteros y mantienen los significados adquiridos con los números naturales, lo que profundiza la permanencia de la concepción obstáculo de la resta como disminución.

Este obstáculo se observa, por ejemplo, en las respuestas a la cuestión restar a 8 un número que dé como resultado 12. De los 57 estudiantes, solo uno fue capaz de resolver correctamente la tarea y los restantes apuntaron que al restar dos números el resultado disminuye o se limitaron a restar 8 de 12, con lo simplificaban la situación llevándola al orden de los naturales (figura 3).

No se puede, porque 12 es mayor que 8 y si vamos a restar el resultado disminuye	*No se puede, porque* 12 *es mayor que* 8 *y si vamos a restar el resultado disminuye*
No existe, porque 8 es menor que 12 y solo se puede hacer al revés, 12-8=4	*No existe, porque* 8 *es menor que* 12. *Solo se puede hacer al revés,* $12-8=4$

Figura 3. Errores debidos al obstáculo de considerar la resta como disminución

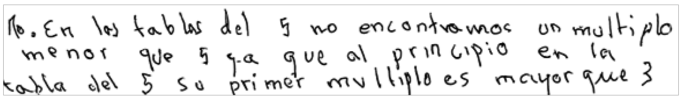
A diferencia de la primera en la que debían obtener el sustraendo, en las otras dos cuestiones debían obtener el resultado, diferencia entre 5 y -4 y resultado de restar menos 2 a -7. El porcentaje de errores en estas cuestiones fue ligeramente inferior al resultar más fácil obtener el resultado final de la operación que uno de sus términos iniciales.

La multiplicación como multiplicación natural

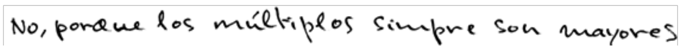
El porcentaje de errores obtenido en las tres tareas conceptuales sobre la multiplicación, un 92%, es muy superior al obtenido en las tareas de cálculo numérico, el 60%, lo que confirma la falta de comprensión del significado de la multiplicación.

Es difícil trasladar las situaciones matemáticas de los modelos de suma y resta a la multiplicación, por lo que, al no existir modelos de este tipo, los alumnos tratan de imitar las propuestas de los modelos concretos calcando las situaciones de los números naturales al caso de la multiplicación.

Regularmente, para probar sus argumentos los estudiantes se remiten a las tablas de multiplicar, donde pueden mostrar confiadamente que su razonamiento es válido y acertado. De esta forma, al contestar en la primera cuestión que no es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3, muchos estudiantes se apoyan en las tablas o consideran que los múltiplos siempre son mayores (figura 4).



No. En las tablas del 5 no encontramos un múltiplo menor que 5, ya que al principio en la tabla del 5 su primer múltiplo es mayor que 3



No, porque los múltiplos siempre son mayores

Figura 4. Errores debidos al obstáculo de considerar la multiplicación como aumento

En la primera cuestión se ha obtenido un porcentaje de errores ligeramente superior a los obtenidos en las dos últimas cuestiones; este resultado se podría atribuir a que en la primera el alumno debe utilizar dos tópicos matemáticos, múltiplo y la multiplicación de enteros, mientras que en las otras dos solo debe utilizar la multiplicación de enteros.

La división como división natural

Al igual que en las operaciones anteriores, el porcentaje de errores en la división es mayor en las tareas conceptuales que en las de cálculo numérico, un 95% frente a un 60%.

La división forma parte de la estructura multiplicativa y se entiende como inversa de ella. En los números naturales es interpretada como reparto o agrupamiento de objetos, y esta concepción de los naturales se mantiene en la interpretación de la división en los números enteros constituyendo una concepción obstáculo. Los estudiantes solo imaginan situaciones de división con los números naturales, por lo que en el campo de los enteros se limitan a realizar operaciones de cálculo que no les implica realizar razonamientos, sino repetir reglas y procedimientos que, con frecuencia, generan desinterés hacia las matemáticas. En preguntas como ¿es correcta la división $15 \div 3 = 6$ y resto -3?, no reparan en la prueba de la división, es decir, $6 \times 3 = 18$ y $18 + (-3) = 15$, y se limitan a contestar que la división es incorrecta (figura 5).

No, porque 15÷3=5 en la tabla del 3, 5x3 da 15	*No, porque* $13 \div 3 = 5$*, en la tabla del* 3*,* $3 \times 5 = 15$
No. 15÷3 es igual a 5 y hay dice que es igual a 6 Por eso la respuesta es incorrecta	*No,* $15 \div 3$ *es igual a* 5 *y ahí dice que es igual a* 6*. Por eso la respuesta es incorrecta*

Figura 5. Errores debidos al obstáculo de considerar la división como división natural

Para los estudiantes, la estructura de la división se ajusta a la concepción que aprendió en la Educación Primaria en la que el cociente tiene que ser menor que el dividendo y el resto no puede ser negativo. Estas concepciones suponen un obstáculo que también les impide completar correctamente divisiones en las que intervienen números negativos, como en las otras tareas planteadas, un número que dividido entre 3, dé -5 y el resultado de dividir -15 entre -3.

El orden como orden natural

En los números naturales el orden se establece de acuerdo a que el número represente una cantidad menor o mayor de objetos, es decir, un conjunto con más o menos elementos; esta relación con lo concreto se utiliza para indicar que un número es mayor que otro o indicar una secuencia de mayor a menor o viceversa. Esta concepción se traslada a los números enteros y, al establecer la relación de orden entre números enteros, se hace como si fueran naturales, en el sentido de sus valores absolutos.

Esta concepción natural de orden conlleva a que el 91% de los estudiantes hayan respondido en la primera tarea que el número tres unidades mayor que -7 es -10 (figura 6). Un resultado similar, 89% de errores, se ha obtenido en la segunda tarea en la que han contestado que el número menor en una unidad a -5 es el -4.

-10 es el número mayor en 3unidades	-10 *es el número mayor en* 3 *unidades*
-10, porque 7+3=10 y como 7 es negativo pues -10	-10*, porque* $7+3=10$ *y como* 7 *es negativo pues* 10

Figura 6. Errores debidos al obstáculo de considerar el orden como orden natural

Los estudiantes trasladan las concepciones de orden natural, donde el número aumenta al aumentar su valor absoluto y disminuye al disminuir su valor absoluto, al campo de los números enteros. Interpretan aumentar como hacer más grande en unidades de cantidad al número, sin importar que sea un número negativo, ni su posición en la recta numérica.

Esta concepción también es causa de errores al desarrollar series y secuencias de números. Con frecuencia, cuando al estudiante se le pide continuar una secuencia descendente, se bloquea al llegar a los negativos. En la tercera cuestión, continuar la serie 10, 7, 4, __, __, __ un 44% de los estudiantes, aunque escribieron el primer término, 1, no fueron capaces de continuar la serie al llegar a los números negativos.

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA SUPERAR LOS OBSTÁCULOS

El sistema educativo reproduce en las etapas educativas de forma análoga el proceso histórico de construcción de los campos numéricos que vivió la matemática hasta llegar a la actualidad. Se inicia en la Educación Primaria donde el número tiene un significado de cantidad y magnitud y sus usos y representaciones se toman de lo real y concreto. Posteriormente, en la Educación Secundaria, tiene que generarse una ruptura con estas construcciones conceptuales elaboradas durante mucho tiempo en los estudiantes; pero esta ruptura en la mayoría de los casos no se hace evidente ni explicita y se construye el nuevo aprendizaje a través de concepciones que han perdido su utilidad en campos numéricos anteriores.

Para ampliar el campo numérico es necesario explicitar las concepciones que hay que abandonar porque han dejado de tener utilidad, son incorrectas y generan errores. Es necesario hacer evidente la ruptura con el obstáculo porque, como afirma Brousseau (2007, p. 46), "es inútil ignorar un obstáculo, hay que rechazarlo explícitamente, integrar su negación en el aprendizaje de un conocimiento nuevo, particularmente bajo la forma de contraejemplos".

Consecuente con lo anterior, en la tabla 5 se describen los obstáculos epistemológicos del aprendizaje de los números enteros y se proponen unas sugerencias pedagógicas para orientar al docente sobre cómo intervenir para lograr la ruptura con el aprendizaje previo, superar la concepción obstáculo y mejorar el aprendizaje de los números enteros.

Tabla 5
Descripción de obstáculos y sugerencias metodológicas para superarlos

	El número como expresión de lo real y concreto
Descripción del obstáculo	El estudiante busca adaptar situaciones de los modelos concretos para modelar o comunicar situaciones con números enteros, pero genera contradicciones como: Ignorar el signo negativo. Transgredir las propiedades de las operaciones. Razonar sin coherencia matemática y lógica
Sugerencias metodológicas	Hacer explícita la ampliación de campo numérico y la necesidad de abandonar esquemas construidos con los números naturales.

Tabla 5
Descripción de obstáculos y sugerencias metodológicas para superarlos

	Enfrentar a los estudiantes a situaciones concretas donde los números naturales pierden su utilidad. El signo debe surgir como una característica del número que lo diferencia del número natural y el significado operatorio binario debe dar paso al predicativo unario.
	La suma como aumento
Descripción del obstáculo	Las palabras sumar, agregar y reunir conservan el significado de aumentar y hacer más grande, conservando su significado lingüístico. Las acciones físicas con las que se asocian estas palabras imponen necesariamente una idea de aumento. El razonamiento del estudiante asocia el número con situaciones manipulativas o concretas que mantienen en el número su representación de cantidad de magnitud.
Sugerencias metodológicas	La suma de números enteros se puede construir a través de regularidades una vez el estudiante conozca el número negativo. En tablas de suma, en las que previamente se sigue la secuencia de los resultados conocidos, el estudiante podrá inferir el resultado y las reglas de los signos.
	La resta como disminución
Descripción del obstáculo	La imagen conceptual de la resta formada en el estudiante está relacionada con las palabras sustraer o quitar, que implican la idea de disminución. Al restar se quita, se sustrae y el resultado de esa acción es una cantidad que ha disminuido en su valor, magnitud o tamaño.
Sugerencias metodológicas	Enfatizar el significado de la resta como diferencia, como acción de comparar y no como acción de quitar. Comparar implica lo que hay que sumar al sustraendo para igualarlo al minuendo, con este significado de resta el signo menos tendrá utilidad conceptual. La construcción del número entero a través de la prolongación de los naturales es una buena alternativa para que el estudiante descubra por qué el número negativo es menor y cómo surge de forma natural a partir de la necesidad de extender el campo numérico.
	La multiplicación como multiplicación natural
Descripción del obstáculo	La multiplicación como sumas repetidas o la reunión de grupos de igual cantidad es el esquema mental predominante en el estudiante. Esta concepción implica que multiplicar es sinónimo de repetir, reunir,

Tabla 5

Descripción de obstáculos y sugerencias metodológicas para superarlos

	agrupar o adicionar una misma cantidad varias veces, lo que implica aumentar.
Sugerencias metodológicas	Presentar situaciones como la de cálculos de áreas de rectángulos donde se conozca los lados de un rectángulo y se quiera construir otro más pequeño restando una cantidad desconocida. En este proceso de cálculo los estudiantes podrán manipular expresiones donde resulten productos de cantidades con signos negativos. Deducir la regla de los signos a partir de las propiedades de la multiplicación.
	La división como división natural
Descripción del obstáculo	En la división natural se hacen repartos iguales; este esquema se construye en la Educación Primaria donde prima la importancia del cociente como resultado de la operación. Se realizan divisiones para saber cuántos grupos pueden formarse o cuantas veces se repite un grupo. El esquema operativo que construye el alumno en esta concepción se centra en obtener el cociente.
Sugerencias metodológicas	Enfrentar al estudiante a situaciones donde tomen relevancia todos los términos que componen la división, se incluyan términos negativos para el residuo y el producto entre cociente y divisor sea mayor que el dividendo. Con estas situaciones el estudiante podrá descubrir cómo establecer una igualdad en la que se correspondan los términos de la operación y tenga la necesidad de utilizar términos negativos.
	El orden como orden natural
Descripción del obstáculo	Se reconoce al número negativo como menor que el número positivo, pero al establecer relaciones de orden, los estudiantes olvidan el signo y lo hacen igual que en los números naturales. El cero es el límite de las cantidades pequeñas ya que no puede haber algo menor que la nada.
Sugerencias metodológicas	El signo tiene que formar parte integral del número, el significado unario debe primar sobre el significado binario. Se debe confrontar la concepción del estudiante con actividades que le promuevan al cambio de la misma. La recta numérica toma relevancia para hacer comparaciones de números en los que se resalta el sentido de disminución de mayor a menor de un número negativo.

CONCLUSIONES

Los objetivos de esta investigación son establecer la presencia del obstáculo epistemológico que considera el número como cantidad con soporte en el mundo físico y concreto, determinar si sus concepciones derivadas son causas de errores en los estudiantes de edades entre 12 a 14 años al resolver actividades con números enteros y proponer sugerencias metodológicas para generar la ruptura con el obstáculo y facilitar la enseñanza de los contenidos matemáticos de los números enteros.

En una primera fase se analizaron los errores y se calculó el porcentaje de error cometido; de forma general muestran un alto porcentaje de errores, 61% para los ejercicios de cálculo numérico y el 88% para los de tipo conceptual.

Posteriormente se analizaron las respuestas y justificaciones, comprobando que los estudiantes mantienen las concepciones aprendidas en la Educación Primaria en el campo de los números naturales: el numero como cantidad real y concreta, la suma como aumento, la resta como disminución, la multiplicación como multiplicación natural, la división como división natural y las relaciones de orden de los enteros como lo aprendieron con los números naturales.

Las sugerencias presentadas buscan generar la ruptura con las anteriores imágenes conceptuales que los estudiantes han aprendido en la Educación Primaria. Para ello se propone que se haga explícito el conflicto entre los conocimientos previos del estudiante y los que necesita adquirir.

Los estudiantes cometen muchos errores en el aprendizaje de los números enteros e intuimos, aunque esto no forme parte de la investigación, que el sistema educativo y muchos docentes no reconocen que estos errores son consecuencia de las concepciones aprendidas con los números naturales.

Las conclusiones más importantes de esta investigación son:

- Los estudiantes conservan muchas de las concepciones aprendidas con los números naturales y las utilizan en el campo numérico de los enteros, lo que les genera errores tanto conceptuales como numéricos.
- No se genera la ruptura con las concepciones anteriores porque no se hace consciente al alumno de la ampliación del campo numérico y se siguen utilizando los conocimientos previos de los números naturales para afrontar el aprendizaje de los enteros.
- La suma mantiene el significado de agregar, adicionar, reunir… por lo que el estudiante considera que el resultado debe ser mayor y se omite priorizar la suma como un proceso de transformación a través de actividades de igualación o complementación en las que el signo de los números juega un papel primordial.
- En la resta prevalece el significado de quitar, por lo que pervive en el estudiante la idea de que el resultado de esta operación debe disminuir; el

estudiante no reconoce el significado de diferencia como parte del lenguaje matemático sino solo en su aspecto lingüístico.

- La multiplicación y la división conservan el mismo significado de sumas repetidas o repartos iguales, lo que favorece la permanencia del obstáculo y la presencia de errores en la actividad matemática para los estudiantes.
- Se conservan las mismas relaciones de orden que en los números naturales, donde el cero es el punto de partida y el criterio para establecer si un número es mayor o menor que otro depende solo del valor absoluto, ignorando el signo como elemento constitutivo del número.

Estas conclusiones reafirman la pervivencia en los estudiantes actuales de la concepción del número como cantidad de magnitud de los números naturales, cuyas concepciones son un obstáculo para el aprendizaje de los números enteros y que en la enseñanza actual se conservan las características del obstáculo epistemológico que impedía históricamente la aceptación del número negativo como objeto matemático.

Referencias

Bachelard, G. (2011). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (27a reimpresión). DF, México: Siglo XXI. Recuperado de https://tinyurl.com/jlfpqvq (Trabajo original publicado en 1938).

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B. y Lewis, M. (2014). Obstacles and affordances for integer reasoning: An analysis of children´s thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(1), 19-62.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(2), 194-245.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 41-63). Montreal, Canadá: Les éditions Agence d'Arc Ottawa.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, España.

Coquin-Viennot, D. (1985). Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(2&3), 133-192.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit X, 3*, 43-67.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171-192.

Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.

González, J. L., Iriarte, M. D., Jimeno, M., Ortiz, A., Ortiz, A., Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1990). *Números Enteros*. Madrid, España: Síntesis.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen zahlen und ihre functionen*. Leipzig, Alemania: Leopold Voss.

Iriarte, M. D., Jimeno, M. y Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *SUMA, 7*, 13-18.

Küchemann, D. (1981). Positive and negative number. En K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics 11-16* (pp. 82-87). Londres, Reino Unido: John Murray.

Maz, A. y Bracho, R. (2011). Números enteros. En I. Segovia y L. Rico (Coords.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 167-188). Madrid, España: Pirámide.

Peacock, G. (1845). *Treatise on algebra. Vol. II. On symbolical algebra, and its applications to the geometry of position*. Cambridge, Reino Unido: University Press.

Peled, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: Effects of age and ability. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145-152). Assisi, Italia: PME.

Piaget, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas: problema central del desarrollo*. Madrid, España: Siglo XXI.

Piaget, J. (1983). *La psicología de la inteligencia*. Barcelona, España: Crítica. Trabajo original publicado en 1947.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit X*, 12, 5-32.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology, 21*(4), 555-570.

José Luis Herrera Romero
Ministerio de Educación Nacional de Colombia
joluhero@outlook.com

Alberto Zapatera Llinares
Universidad Cardenal Herrera-CEU
alberto.zapatera@uchceu.es

Recibido: Diciembre de 2018. Aceptado: Mayo de 2019
doi: 10.30827/pna.v13i4.8226

ISSN: 1887-3987