

UN ESTUDIO DE CASO SOBRE EL TRABAJO DOCUMENTAL COLECTIVO DE PROFESORES: LOS INTERVALOS DE FLUCTUACIÓN

Veronica Parra y Ghislaine Gueudet

En este trabajo estudiamos las interacciones entre dos profesoras de matemáticas de secundaria y los recursos utilizando el marco teórico de la aproximación documental. Este marco propone que estas interacciones producen documentos asociados a los recursos y a los esquemas de uso. Los esquemas comprenden el conocimiento profesional en términos de invariantes operatorios. Las profesoras trabajan colectivamente organizando su enseñanza en torno a los intervalos de fluctuación. Mostramos que, a pesar del trabajo colectivo, los documentos desarrollados por cada una comprenden diferentes elementos: los invariantes operatorios iniciales no evolucionan lo suficiente como para conducir a documentos comunes.

Términos Clave: Aproximación documental; Comunidades de práctica; Invariantes operatorios; Intervalos de fluctuación; Recursos

A Case Study on Teachers' Collective Documentation Work: The Tolerance Intervals

In this paper we study the interactions between two mathematics teachers of high school and resources using the theoretical framework of documentational approach. According to this approach, these interactions produce documents associating resources and schemes of use. These schemes comprise professional knowledge described in terms of operational invariants. Teachers work together to prepare the teaching on tolerance intervals. These two teachers constitute a theory of practice. We show that, in spite of the collective work, the documents developed by each teacher always comprise different elements, because their initial operational invariants do not evolve enough to lead to common documents.

Keywords: Communities of practice; Documentational approach; Operational invariants; Resources; Tolerance intervals

Parra, V. y Gueudet, G. (2019). Un estudio de caso sobre el trabajo documental colectivo de profesores: los intervalos de fluctuación. *PNA* 13(3), 172-196.

La enseñanza de la probabilidad, y de la fluctuación de muestras en particular, ocupa actualmente un lugar importante en los programas escolares de diversos países, incluso en la enseñanza primaria. Nuestro estudio se sitúa en Francia, donde la enseñanza de la probabilidad y de la fluctuación se desarrolla en la educación secundaria (estudiantes de 15 a 18 años). Estudiamos aquí el trabajo de dos profesoras de matemática del mencionado nivel, en el contexto de la enseñanza de la probabilidad, específicamente en torno al tema intervalos de fluctuación¹. Nos interesa concretamente analizar el trabajo documental desarrollado por estas profesoras. Este trabajo documental tiene un objetivo común²: delinear colectivamente la manera de abordar la enseñanza de los intervalos de fluctuación, secuencia que cada profesora implementa en su aula.

Nos centramos en las interacciones entre las profesoras y los recursos tomando como referencia una de las premisas del enfoque de la aproximación documental (Gueudet, Pepin y Trouche, 2012; Gueudet y Trouche, 2008) que indica que estas interacciones conducen a evoluciones de los conocimientos profesionales de los profesores, conocimientos interpretados a la luz de los invariantes operatorios. Inversamente, los conocimientos de los profesores influyen en la elección de los recursos y de sus usos. En este sentido, es fundamental mencionar que en este trabajo se hace referencia a génesis documental y, en consecuencia, a esquemas y a invariantes operatorios. Aquí conviene aclarar que, en el marco de la aproximación documental, los esquemas comprenden, en particular, el conocimiento profesional, y que en esta teoría son descritos en términos de invariantes operatorios. Esta es una observación que resulta relevante y que debe ser considerada a lo largo de todo el texto. Además, nos cuestionamos si el trabajo colectivo de las profesoras las lleva a utilizar los mismos recursos y a desarrollar los mismos conocimientos profesionales, y en caso de observarse diferencias después de un trabajo colectivo, de dónde podrían provenir tales diferencias.

Hemos concluido previamente (Gueudet, Pepin y Trouche, 2013) que el trabajo documental de los profesores comporta diferentes dimensiones colectivas, y que estas dimensiones siempre están asociadas a un trabajo con los recursos compartidos. También se ha concluido que el trabajo colectivo conduce

¹ La noción de intervalo de fluctuación está vinculada a la noción de fluctuación de muestras, y se introduce en situaciones del siguiente tipo: se considera una población de individuos, hay un interés en cierta característica C de esta población y se conoce la proporción p de individuos de esa población que tiene la característica C (por ejemplo, la población de un país y el número de individuos que son pelirrojos). Se elige al azar un individuo de esta población y se observa si posee la característica C y se repite independientemente varias veces esta experiencia aleatoria. La lista de resultados obtenidos al repetir esta experiencia n veces genera una muestra de tamaño n . Así, para una muestra dada, se determina la frecuencia de la característica C en esa muestra. De acuerdo a la muestra seleccionada, las frecuencias observadas fluctúan. Este fenómeno se denomina “fluctuación de muestras”.

² Conviene resaltar que el adjetivo “común” no implica que sean idénticos.

a evoluciones de los invariantes operatorios, en particular cuando el profesor trabaja en grupos que tienen características denominadas *comunidades de práctica* (CoP) (Wenger 1998). Las CoP son grupos que comparten una iniciativa común, un compromiso mutuo y un repertorio de recursos. Trabajos precedentes han estudiado un caso particular de CoP de profesores que tenían un objetivo común, el de producción de recursos: una asociación que produce manuales digitales en Francia (Gueudet, Pepin, Sabra y Trouche, 2016) y un grupo de profesores en formación continua en Noruega (Miyakawa y Pepin, 2016). En estas CoP se identificó el desarrollo de conocimientos compartidos, vinculados a la producción de recursos. Este tipo de actividad, cuyo objetivo es producir un recurso común, conduce a los miembros de la CoP a una negociación de sentidos (Wenger, 1998) y, en consecuencia, a generar o producir algún tipo de conocimiento compartido. En este sentido, nos planteamos qué sucede en una CoP habitual de profesores, es decir, de los profesores de un centro educativo que trabajan en conjunto, por ejemplo, para delinear la manera de abordar la enseñanza de un tema del programa de estudios y que posteriormente cada uno materializa los lineamientos acordados con sus alumnos.

La pregunta de investigación que abordaremos en este trabajo queda formulada de la manera siguiente: ¿cuáles son las interacciones entre el trabajo colectivo de dos profesoras de matemática y los recursos utilizados durante el diseño e implementación de una secuencia de tareas referida a los intervalos de fluctuación? Formulamos entonces nuestro objetivo de la siguiente forma: analizar el trabajo documental desarrollado por estas profesoras, cuyo fin es diseñar colectivamente una secuencia de tareas para abordar la enseñanza de los intervalos de fluctuación, secuencia que posteriormente cada profesora implementa en su aula. Nos centramos entonces en el vínculo comprendido entre un documento (caracterizado por el objetivo de la actividad), los recursos movilizados y los invariantes operatorios asociados. Como ya mencionamos, estudiaremos esta pregunta en el caso de una enseñanza de la noción de intervalo de fluctuación.

INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD: ALGUNOS ANTECEDENTES

Diversas investigaciones se han ocupado de abordar cuestiones referidas a la enseñanza de la probabilidad en los diferentes niveles educativos. Estas investigaciones se podrían clasificar en aquellas basadas en el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) propuesto por Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Burgess, 2008; Gómez, Batanero y Contreras, 2014; González, 2012; Hill, Ball y Schilling, 2008); las que se refieren a las concepciones que tiene los profesores sobre la variabilidad en general, y de muestras, en particular (González y Isoda, 2011; González,

2012; Isoda y González, 2012; Makar y Confrey, 2004; Peters, 2009; Wessels, 2014); las referidas a las concepciones que tienen los estudiantes sobre esta misma cuestión de la variabilidad (Reading y Shaughnessy, 2000; Shaughnessy, Canada y Ciancetta, 2003; Torok y Watson, 2000); las que analizan cómo son abordados los conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto (Gómez-Torres, Ortiz y Gea, 2014); y las que se centran en la formación de profesores (Batanero, Gómez, Serrano y Contreras, 2012; Peng, 2007). Respecto a estos últimos, diferentes investigaciones han mostrado que un factor importante en la evolución de los conocimientos profesionales de los profesores es el uso que estos realizan de los diferentes soportes destinados a la enseñanza, como, por ejemplo, los libros escolares (Grave y Pepin, 2015; Remillard, 2000). Otros estudios remarcan la influencia de los libros de texto en las elecciones de los profesores, pues los consideran uno de los recursos más utilizados por los profesores para su trabajo dentro y fuera del aula (Cobo y Batanero, 2004; Ortiz, Albanese y Serrano, 2016).

Respecto a la enseñanza de la fluctuación en Francia, diversos trabajos analizan los cambios introducidos en los programas oficiales a partir de la reforma del año 2010. Por ejemplo, Dutarte (2012) asegura que el primer cambio es de orden cuantitativo ya que la probabilidad y la estadística pasan a ocupar un mayor espacio en los programas actuales, incorporando una estadística inferencial a partir de las nociones de intervalo de fluctuación, de estimación de una proporción desconocida o de la toma de decisiones a partir de una muestra. En segundo lugar, alude a un cambio cualitativo: pasar de una enseñanza de técnicas de análisis de datos a una enseñanza de la estadística como ciencia de investigación de datos que ayuda a la toma de decisiones y a la estimación. Perrin (2015) realiza algunas sugerencias respecto a la enseñanza de intervalos de fluctuación, intervalos de confianza y la introducción de la ley normal. Considera realizar modificaciones para dar lugar al estudio de las probabilidades discretas sobre el estudio de la ley normal y que, de esta forma, se podrían referir a intervalos de fluctuación e intervalos de confianza de manera más pertinente. Ducel y Saussereau (2012) describen como la ley binomial permitiría extender las condiciones de validez del intervalo de fluctuación al caso de cualquier muestra y cualquier proporción.

A partir de los antecedentes y de trabajos propios consideramos que resulta pertinente realizar investigaciones relativas, no sólo al diseño de secuencias de aula destinadas a la enseñanza de los intervalos de fluctuación en la educación secundaria, sino también, a indagar sobre su proceso de diseño, incluyendo los recursos utilizados y las decisiones tomadas al respecto. Consideramos que ninguna investigación se ha ocupado, hasta el momento, del tema que pretendemos abordar aquí. Nuestro objetivo no es analizar el trabajo de un profesor en el diseño de una secuencia o su formación ni concepciones, sino que nos proponemos analizar el trabajo documental desarrollado por dos profesoras de matemática cuyo objetivo es diseñar, colectivamente, una secuencia de tareas

para abordar la enseñanza de los intervalos de fluctuación con la ley binomial en estudiantes de educación secundaria. Dicha secuencia de tareas será implementada por cada profesora en su aula. Para ello, utilizamos el enfoque teórico de la aproximación documental (Gueudet, Pepin y Trouche, 2012; Gueudet y Trouche, 2008) interesándonos, como la perspectiva lo considera, en el trabajo de los profesores dentro de las clases con los alumnos y también fuera de ella. Focalizamos entonces nuestro interés en el trabajo colectivo de los profesores durante el diseño de la secuencia, durante su implementación y posterior a ella.

MARCO TEÓRICO: LA APROXIMACIÓN DOCUMENTAL

La aproximación documental (Gueudet y Trouche, 2008) es un referente teórico y metodológico que ha sido elaborado específicamente para estudiar las interacciones de los profesores con los recursos y las consecuencias de esas interacciones. En esta aproximación, el concepto *recurso* tiene una acepción muy amplia, emergente de las investigaciones desarrolladas por Adler (2000) respecto al trabajo de los profesores de matemática. Un recurso es todo aquello que puede originarse de las prácticas de los profesores. Este término engloba entonces los libros de textos, programas informáticos y sitios webs, pero también las producciones de los alumnos y los intercambios entre los colegas. El trabajo llevado a cabo con estos recursos es denominado *trabajo documental* y consiste en la búsqueda, elección, modificación, adaptación, revisión, reorganización, implementación y el intercambio de recursos.

La aproximación documental se ancla en la aproximación instrumental (Rabardel, 1995). Aquí se considera que un sujeto, por ejemplo, un profesor de matemática, participa en una actividad asociada a un objetivo específico. Este sujeto, en el transcurso de su actividad, va a interactuar con diversos recursos: un libro, un sitio web, testimonios de colegas, etc. A partir de estos recursos y en el transcurso de su trabajo documental, este sujeto desarrolla lo que, en la aproximación documental, se denomina *documento* y que podríamos definir como un conjunto de recursos combinados, asociados a un esquema de uso (Rabardel, 1995; Vergnaud, 1996) de estos recursos. Un esquema de uso se constituye por diferentes partes: el objetivo de la actividad (aquí el objetivo de la actividad del profesor), las reglas de acción, los invariantes operatorios y las posibilidades de inferencia en situación. Según Vergnaud (1996), un esquema es una organización estable de la actividad para un objetivo dado. De esta forma, asumimos que los invariantes operatorios describen los conocimientos de los profesores. Se trata entonces de interacciones entre los profesores y los recursos. En este sentido, en nuestro marco teórico y en este trabajo, interpretamos los conocimientos profesionales como invariantes operatorios.

El documento es entonces una entidad compuesta por recursos y por un esquema de uso de esos recursos. El proceso de desarrollo de un documento es denominado *génesis documental*. Este proceso consiste en dos movimientos: por un lado, el desarrollo de esquemas de uso, incluyendo en particular invariantes operatorios, resultantes de los recursos y sus características. Este movimiento de *instrumentación* es el esperado por los creadores de recursos con fines didácticos (o al menos, algunos de ellos): contribuir a través de estos recursos a la evolución de la elección y de los conocimientos de los profesores. Inversamente, los conocimientos de los profesores influyen en la elección de los recursos y la manera en la que son modificados. Este es un movimiento de *instrumentalización* que es parte también de la *génesis documental*. Este movimiento explica la estabilidad reconocida por muchos de los profesores: después de un tiempo de experiencia, un profesor ya ha desarrollado esquemas.

En el transcurso de su actividad, el profesor desarrolla un sistema documental: el conjunto de los documentos del profesor estructurados en función de su actividad profesional (Gueudet y Trouche, 2008). Este sistema documental contiene tanto los recursos como los esquemas asociados. Los recursos de este sistema son denominados sistema de recursos de un profesor. Hemos mostrado en trabajos anteriores (Poisard, Bueno-Ravel y Gueudet, 2011) que la adopción por parte de un profesor de un nuevo recurso dependerá fuertemente de la compatibilidad de este con el sistema de recursos del profesor y su sistema documental. Sin embargo, el trabajo documental está hecho de interacciones y los nuevos recursos también pueden provocar una evolución de los invariantes operatorios del profesor y, por lo tanto, de sus prácticas. Así, en Pepin, Gueudet y Trouche (2017) se ha estudiado la evolución del trabajo documental de una profesora que utiliza recursos generados por investigadores que trabajan en un proyecto europeo, dedicado a los procedimientos de investigación.

En el trabajo presentado aquí, no buscamos identificar los documentos completos detallando todas las partes del esquema. Analizamos la *génesis documental* de dos profesoras: nos interesamos en las interacciones comprendidas entre los documentos (caracterizados por el objetivo de la actividad), los recursos movilizados y los invariantes operatorios asociados.

MÉTODO

Los principios de la metodología de investigación reflexiva

La aproximación documental está asociada a una metodología que denominamos investigación reflexiva. Los principios de esta metodología son los siguientes: el trabajo documental se desarrolla en diversos lugares y momentos, por ejemplo, en clase, en la casa del profesor o en un curso de formación, entre otros. La *génesis documental* es un proceso que tiene lugar en el tiempo. Así, es importante que el profesor se involucre o asocie en a la recolección de datos, ya

que es imposible que el investigador esté presente en cada momento del trabajo documental. Esta asociación activa del profesor en la recolección de datos se traduce en términos de investigación reflexiva.

Los datos recolectados son de naturaleza diversa: vídeos de la actividad de los profesores en clase y fuera de ella, los recursos que utiliza y los que produce, entrevistas con los profesores en diferentes momentos de su trabajo documental, intercambios de mails, etc. Es importante confrontar los diferentes tipos de datos, en particular para no apoyarse solamente en las declaraciones del profesor.

Enseñanza de la fluctuación en los programas franceses

La enseñanza secundaria en Francia se divide en dos niveles: el denominado *collège* y el denominado *lycée*. El primero es considerada como la educación secundaria inferior y asisten alumnos desde los 11 a los 15 años. El segundo es considerado como la educación secundaria superior y asisten alumnos de 15 a 18 años. El *lycée* se compone de tres años, denominados consecuentemente *Segundo*, *Primero* y *Terminal*. Es decir, el primer año de la educación secundaria superior se denomina Segundo, el segundo año se denomina Primero y el tercer y último año del *lycée*, Terminal. El *lycée* puede ser general, técnico o profesional. Los programas y materiales utilizados en las diferentes asignaturas varían en función del tipo de *lycée* considerado. Una vez finalizados los estudios secundarios superiores (el *lycée*), los estudiantes que continúan sus estudios en la universidad, deben obtener un diploma denominado *Baccalauréat* (Bacc). Actualmente el examen correspondiente al Bacc tiene lugar a la finalización de Terminal (para estudiantes de 18 años).

En el sistema escolar francés, la fluctuación de muestras se enseña desde el año 2010 en el nivel superior de secundaria (estudiantes entre 15 y 16 años). En este nivel, se introduce una idea intuitiva de la fluctuación utilizando, por un lado, experiencias concretas, por ejemplo, tiradas de monedas o dados, y por otro, a partir de simulaciones con la calculadora o con hojas de cálculo. Así, se introduce un primer intervalo de fluctuación: si la frecuencia de cierta característica de una población es p (con $p \in [0,2,0,8]$), para una muestra de tamaño n (con n superior a 25) originada de esta población, la frecuencia observada f pertenece al intervalo de fluctuación $[p - 1\sqrt{n}, p + \sqrt{n}]$ con una probabilidad de 0,95. Así, si f no pertenece a este intervalo, se rechaza la hipótesis de que la muestra sigue la misma ley que la población considerada con un riesgo de error del 5%. En el siguiente curso (estudiantes entre 16 y 17 años) se enseña la ley binomial de parámetros n y p como la ley de una variable aleatoria que representa el número de éxitos durante un experimento compuesto de n pruebas de Bernoulli independientes y de parámetro p . Este proceso proporciona otro intervalo de fluctuación, que puede ser determinado utilizando una tabla, producida por ejemplo con la calculadora o con una hoja de cálculo.

Este nuevo intervalo es introducido de la siguiente manera. Si X es una variable aleatoria que sigue una ley binomial, entonces el intervalo $[a, b]$, donde a es el menor número entero tal que $P(X \leq a) > 0,025$ y b es mayor número entero tal que $P(X \leq b) \geq 0,975$, es un intervalo de fluctuación de éxito del 95%. Para la frecuencia, el intervalo de fluctuación correspondiente es $\left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$.

En el último año de la educación secundaria francesa (estudiantes entre 17 y 18 años) se estudia el teorema de convergencia de la ley binomial hacia la ley normal, e incluyen un nuevo intervalo de fluctuación, denominado intervalo de fluctuación asintótico y originado de la ley normal.

Tipo de diseño

La investigación es un estudio de casos, de tipo exploratoria y descriptiva. Los diseños exploratorios son un buen recurso cuando se dispone de poco conocimiento producido sobre un problema determinado, en este caso, las interacciones entre los recursos movilizados por dos profesoras y los invariantes operatorios asociados, interpretados a la luz del marco de la aproximación documental, para el caso de la enseñanza de los intervalos de fluctuación en la educación secundaria superior de Francia. El estudio de casos implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprensivo y en profundidad del caso objeto de interés (García, 1991). El caso fue seleccionado porque verifica las condiciones que proponen Rodríguez, Gil y García (1996): se tenía fácil acceso, ya que se viene realizando el seguimiento de las profesoras desde el año 2014; existía una alta probabilidad de ocurrencia de acceso e interacciones entre los programas, las profesoras y las estructuras relacionadas con las cuestiones de investigación; se podía establecer una buena relación con las profesoras pues se trata de una investigación reflexiva; el investigador podía desarrollar su papel durante todo el tiempo que sea necesario; y, aseguraría la calidad y credibilidad del estudio.

Caracterización del caso

La institución escolar en la cual desarrollamos el trabajo corresponde al curso Primero del lycée. La institución se sitúa en el noreste de la ciudad de Rennes, en Francia, y recibe a estudiantes de una zona geográfica bastante amplia, es decir, no recibe solamente a los estudiantes de las zonas cercanas al centro educativo sino de proximidades. De esta forma, las categorías sociales de los estudiantes y, en consecuencia, de los grupos de clases, son muy variadas. Esta institución ofrece los tres tipos de orientaciones: general, técnica y profesional.

Desde el año 2014 realizamos el seguimiento de dos profesoras de matemáticas que se desempeñan en la educación secundaria superior, Valeria y Gwen. Conviene mencionar aquí que los nombres de las profesoras han sido inventados por las investigadoras a efectos de preservar el anonimato de las

profesoras y la confidencialidad. Ambas cuentan con una extensa experiencia docente, 34 años y 36 años respectivamente, siguen regularmente la formación continua y se ocupan de los profesores debutantes, es decir, de los profesores que se inician en la docencia. Valeria y Gwen trabajan generalmente en conjunto, y a partir del seguimiento realizado, hemos observado que su trabajo presenta todas las características de una CoP (Wenger, 1998). De hecho, Valeria y Gwen tienen un repertorio compartido: trabajan en el mismo centro educativo y utilizan colectivamente un armario que contiene libros escolares y ciertas revistas profesionales. Tienen una ocupación común, que es la enseñanza de la matemática a los alumnos de esta institución y, sobre todo, tienen allí un compromiso común. Han creado una relación de confianza en el transcurso de los años (ellas trabajan juntas desde el año 2013), por lo que cuando imparten clase a un curso del mismo nivel, discuten regularmente lo que han realizado con sus alumnos e intercambian las actividades. En el curso 2015-2016 decidieron colaborar de una manera más activa y profunda, tomando a su cargo dos cursos de primero que acababan de abrirse en la institución, estando cada una de ellas a cargo de uno de estos dos grupos. Valeria y Gwen eligieron en conjunto el libro de texto del aula, prepararon a comienzo del año un desarrollo anual común, cada uno de los capítulos a impartir y los exámenes correspondientes. Hemos seguido su trabajo en estos cursos, en particular, durante el capítulo que concierne a la ley binomial y al intervalo de fluctuación asociado.

Recolección de datos y modalidad de análisis

Recolectamos todos los recursos que las profesoras utilizaron y que han producido para este capítulo: extractos de libros de texto, fichas de actividades para los alumnos, apuntes de cursos, la evaluación final, la producción de los estudiantes durante esta evaluación y los intercambios de mensajes mediante correo electrónico. Además, realizamos grabaciones en vídeo de su preparación común del capítulo y de las sesiones de clases.

La preparación común fue transcrita y recogida en una tabla que contenía una columna con el tiempo (en minutos), otra con el contenido matemático al que hacían referencia, respecto a la probabilidad y fluctuación de muestras, y otra con el recurso al que evocaban, precisando cada actividad. Para la transcripción de cada una de las 6 sesiones de clases (duración en aula de la secuencia) se añadió una columna en la que se indica si se estaba en un momento de la clase en donde se hacía un repaso o no, ya sea de un saber previamente estudiado o de lo encontrado por primera vez.

Cada una de las profesoras fue entrevistada al finalizar las sesiones, entrevistas que fueron registradas y luego, transcritas. Cada entrevista fue realizada de modo semi-directo. Solicitamos a las profesoras que describieran la enseñanza realizada en torno al capítulo de fluctuación, precisando los recursos utilizados, producidos y cómo han realizado las elecciones y las razones de estas elecciones. Finalmente, preguntamos si estaban satisfechas con las sesiones de

clase (durante la entrevista utilizamos las producciones de los alumnos de la evaluación final) y qué cambiarían para el año siguiente.

Posteriormente, confrontamos los diferentes tipos de datos y construimos una tabla que abarca todos los registros realizados (tabla 1). Las dos primeras columnas contienen, respectivamente, los invariantes operatorios contruidos a partir de cada uno de los registros y las hipótesis sobre su origen. Estas columnas fueron completadas esencialmente a partir de la transcripción de la entrevista final. Las columnas siguientes, consecuencias y recursos, fueron completadas a partir de las observaciones realizadas. En la respectiva a consecuencias se consideraron las sesiones de clases, los materiales producidos por las profesoras, las diapositivas proyectadas a los estudiantes, las actividades, etc. En la última columna se indica, el recurso, libro, sitio web, etc. que fue la fuente del profesor para cada una de las consecuencias antes mencionadas. A continuación, se presenta un fragmento a modo de ejemplo de una estas tablas. Presentamos sólo dos filas correspondientes a una de las profesoras.

Este tipo de tablas, como ya mencionamos, se realizaron considerando el conjunto de todos los registros, y su comparación nos permitió obtener los resultados que presentamos en la sección siguiente.

Tabla 1

Invariantes operatorios y recursos. Extracto del caso de Gwen

Invariantes operatorios	Elementos/hipótesis sobre el origen de esta convicción	Consecuencias en términos de actividad/recursos producidos	Recursos utilizados
-------------------------	--	--	---------------------

Tabla 1

Invariantes operatorios y recursos. Extracto del caso de Gwen

Invariantes operatorios	Elementos/hipótesis sobre el origen de esta convicción	Consecuencias en términos de actividad/recursos producidos	Recursos utilizados
Es necesario comenzar revisando los contenidos de segundo (curso anterior).	Observaciones de clase. Extracto de entrevista con la profesora: “Luego hubo que recordar de segundo, sobre los intervalos de fluctuación. Ellos no recordaban nada del intervalo de segundo $\frac{p+1}{\sqrt{n}}$ y $\frac{p-1}{\sqrt{n}}$ ”.	Sesión de clase en la hoja de cálculo. Sesión de repaso. Diapositivas. Diaporama. Actividades propuestas sobre: reparto de salarios de una empresa; ley de probabilidad de una variable aleatoria X que sigue una ley binomial de parámetros $n=19$ y $p=0,4$; la proporción teórica de las personas que tienen ojos celestes en Francia y la frecuencia de las personas con ojos celestes en una muestra de $n=100$; un operador telefónico.	Hoja de cálculo. GeoGebra Curso de segundo año. Libro de texto: Mathématiques 1 ES/L.

Tabla 1

Invariantes operatorios y recursos. Extracto del caso de Gwen

Invariantes operatorios	Elementos/hipótesis sobre el origen de esta convicción	Consecuencias en términos de actividad/recursos producidos	Recursos utilizados
Es necesario justificar la toma de decisión.	Observaciones de clase. Extracto de entrevista con la profesora refiriéndose al examen escrito: “Para la toma de decisión, quiero que ellos calculen el intervalo, que calculen la frecuencia observada [...] que no aparece en el intervalo [...] y entonces que podríamos considerar que está fuera del intervalo con un riesgo de error del 5%”	Sesión de clase de repaso. Diapositivas. Actividad sobre el operador telefónico: cálculo del intervalo de fluctuación de segundo. Toma de decisión y justificación. Tres ejercicios distribuidos a los estudiantes.	Libro de texto Mathématiques 1 ES/L. Libro de texto Déclic. Hoja de cálculo. GeoGebra Materiales propios de la profesora.

RESULTADOS

En primer lugar, describimos los principales aspectos del trabajo documental de Valeria y Gwen respecto a la enseñanza del intervalo de fluctuación: trabajo realizado en común y trabajo personal. Luego, presentamos nuestro análisis en términos de documentos desarrollados por ambas profesoras.

Trabajo documental colectivo

Durante la preparación común, Valeria y Gwen utilizan nueve libros de texto diferentes. Aunque no deciden en conjunto un recurso, muestran distintos ejercicios y problemas de los libros de texto para ilustrar sus declaraciones. Además, hacen referencia a otros recursos con la intención de utilizarlos: por ejemplo, ejercicios, software (GeoGebra, hoja de cálculo) y la calculadora.

Las discusiones durante la preparación común comienzan marcando una diferencia: Valeria tiene la intención de usar la hoja de cálculo desde el comienzo y durante la totalidad de las clases. Los estudiantes han aprendido en el capítulo denominado Ley Binomial a realizar hojas de cálculo y a leer las tablas que muestran los valores de $P(X = k)$ y $P(X \leq k)$, cuando X es una variable aleatoria que sigue una ley binomial de parámetros n y p . Valeria pretende recordar esto, luego introducir el intervalo de fluctuación por la ley binomial y la forma de

encontrarlo, usando la tabla $P(X \leq k)$ producida con la hoja de cálculo. Gwen, en cambio, tiene la intención de usar sólo la calculadora y ningún otro software. Luego de introducir el intervalo de fluctuación de la ley binomial, Gwen evoca que pedirá a los estudiantes realizar e implementar en sus calculadoras un programa que produzca el intervalo de fluctuación.

En los demás aspectos de la preparación común, Valeria y Gwen están de acuerdo sobre todos los puntos que evocan. Mencionan la necesidad de recordar el intervalo de fluctuación estudiado el año anterior (en segundo) y compararlo con el nuevo intervalo de fluctuación introducido. Además, están de acuerdo en la necesidad de usar el diagrama como soporte para la interpretación de los estudiantes del significado del intervalo de fluctuación, y en la importancia de mostrar que muestras de diferentes tamaños producen intervalos diferentes y que puede conducir a tomar decisiones distintas (en términos de aceptación o rechazo de la hipótesis, en el nivel de confianza del 95%).

Los aspectos evocados durante la preparación común están presentes en las clases desarrolladas por Valeria y Gwen. Analizamos estas clases a partir de las observaciones realizadas, los videos de clases, los recursos recolectados y las entrevistas posteriores a las mismas.

Valeria comenzó recordando cómo construir y leer una tabla de distribución de la ley binomial con la hoja de cálculo. También recordó el intervalo de fluctuación estudiado en segundo a partir de ejercicios seleccionados del libro del aula, dentro de la sección de revisión. Valeria menciona la importancia de recordar el vocabulario (población, muestra, frecuencia, etc.). Luego, introduce el nuevo intervalo a partir de un problema referido al sobrepeso en Estados Unidos. Este problema fue seleccionado de otro libro texto y lo modificó, en particular, suprimiendo una parte de él: la tabla dada para $P(X \leq k)$, ya que el objetivo de Valeria era que los estudiantes produjeran la tablas por sí mismos a través de la calculadora, e insertó el diagrama de probabilidad extraído de otro libro de texto (figura 1).

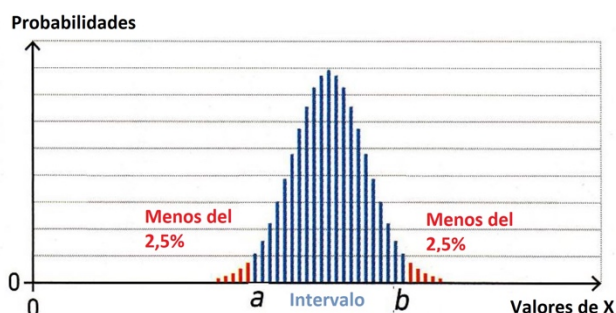


Figura 1. Diagrama de probabilidades producido por Valeria con GeoGebra

De esta manera, el trabajo de Valeria durante las sesiones de clases puede resumirse de la siguiente manera: propone en primer lugar, realizar una actividad de repaso, donde se ponen en juego saberes estudiados durante el año anterior. La actividad consiste en la distribución de los empleados de una empresa según

sean mujeres u hombres y de acuerdo a sus edades (menores de 40 años y mayores de 50). Se pide en este caso, calcular frecuencias. Luego, propone una actividad para calcular probabilidades de una variable aleatoria que sigue una ley binomial. En este caso, se propone una tabla con los valores de probabilidad y se solicitan determinar los enteros a y b tales que, por un lado $P(X \leq a) \geq 0,1$ y por el otro, $P(X \leq b) \geq 0,7$. Presenta, de esta manera, cómo encontrar el intervalo a partir de la tabla de $P(X \leq k)$, producido en la hoja de cálculo de la calculadora. Luego, propuso otro ejemplo incluyendo un diagrama similar realizado con GeoGebra y varios ejercicios extraídos de un libro de texto, relativos a la toma de decisión con el intervalo de la ley binomial.

A continuación, propone una actividad referida a la proporción de franceses que tienen ojos azules calculando la frecuencia observada de una muestra. Posteriormente, propone otra actividad referida a la conformidad y no conformidad de las personas respecto al operador de telefonía contratado. Para finalizar, previo al examen, propone una lista de 7 ejercicios para realizar la familiarización del nuevo intervalo de fluctuación.

En la figura 2 se presentan algunas de las actividades que propuso Valeria para revisar el intervalo de fluctuación del año escolar anterior. Estas actividades fueron seleccionadas de un único recurso, un libro de texto del año escolar en curso.

<p>Alcance 2 Hombres y mujeres</p> <p>La tabla siguiente presenta la distribución de empleados de una empresa.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Hombres</th> <th>Mujeres</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Menos de 40 años</td> <td>90</td> <td>260</td> <td>350</td> </tr> <tr> <td>Más de 40 años</td> <td>110</td> <td>40</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>200</td> <td>300</td> <td>500</td> </tr> </tbody> </table> <p>a. ¿Cuál es la frecuencia de más de 40 años en esta empresa? b. Entre los hombres que trabajan en esta empresa, ¿cuál es la frecuencia de menos de 40 años? c. Entre los empleados de más de 40 años, ¿cuál es la frecuencia de mujeres?</p>		Hombres	Mujeres	Total	Menos de 40 años	90	260	350	Más de 40 años	110	40	150	Total	200	300	500	<p>Alcance 4 Hoja de cálculo (2)</p> <p>Se presenta, en esta tabla, la ley de probabilidad acumulada de una variable aleatoria X que sigue una ley binomial de parámetros $n=19$ y $p=0,4$.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>k</th> <th>P(X≤k)</th> <th>k</th> <th>P(X≤k)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>6,0936E-05</td><td>10</td><td>0,911525937</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,000832792</td><td>11</td><td>0,964772097</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,005463926</td><td>12</td><td>0,988437056</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,022959321</td><td>13</td><td>0,99693217</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,069613708</td><td>14</td><td>0,999359345</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,162922482</td><td>15</td><td>0,999898718</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,308069465</td><td>16</td><td>0,99998613</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,487775253</td><td>17</td><td>0,999999189</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,66748104</td><td>18</td><td>0,999999973</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,813907979</td><td>19</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p>a. Determinar el menor entero a tal que: $P(X \leq a) \geq 0,1$. b. Determinar el menor entero b tal que: $P(X \leq b) \geq 0,7$.</p>	k	P(X≤k)	k	P(X≤k)	0	6,0936E-05	10	0,911525937	1	0,000832792	11	0,964772097	2	0,005463926	12	0,988437056	3	0,022959321	13	0,99693217	4	0,069613708	14	0,999359345	5	0,162922482	15	0,999898718	6	0,308069465	16	0,99998613	7	0,487775253	17	0,999999189	8	0,66748104	18	0,999999973	9	0,813907979	19	1
	Hombres	Mujeres	Total																																																										
Menos de 40 años	90	260	350																																																										
Más de 40 años	110	40	150																																																										
Total	200	300	500																																																										
k	P(X≤k)	k	P(X≤k)																																																										
0	6,0936E-05	10	0,911525937																																																										
1	0,000832792	11	0,964772097																																																										
2	0,005463926	12	0,988437056																																																										
3	0,022959321	13	0,99693217																																																										
4	0,069613708	14	0,999359345																																																										
5	0,162922482	15	0,999898718																																																										
6	0,308069465	16	0,99998613																																																										
7	0,487775253	17	0,999999189																																																										
8	0,66748104	18	0,999999973																																																										
9	0,813907979	19	1																																																										
<p>Alcance 6 Tienes ojos hermosos, lo sabes!</p> <p>En Francia, el 27% de la población tiene los ojos azules. Se estudia una muestra de 200 individuos en la cual 60 tienen ojos azules</p> <p>a. ¿Cuál es la proporción teórica de personas con ojos azules en Francia? b. ¿Cuál es la frecuencia de personas con ojos azules en la muestra considerada?</p>	<p>Alcance 7 ¿Satisfecho?</p> <p>Un operador de telefonía afirma que solamente el 12% de las personas que han recurrido a la línea directa no están satisfechas. Una asociación de consumidores quiere verificar esta afirmación. Para eso, interroga a 500 clientes que han recurrido a la línea directa. 89 de ellos declararon no estar satisfechos. La asociación de consumidores ¿puede rechazar la afirmación del operador? Argumentar la respuesta.</p>																																																												

Figura 2. Actividades de revisión propuestas por Valeria

Valeria insiste en la necesidad de formular de manera precisa la toma de decisiones. Al finalizar el capítulo, trabaja con sus estudiantes sobre el algoritmo:

los estudiantes tienen que decidir qué algoritmo es el correcto (una actividad seleccionada del libro de clase) e implementarlo en sus respectivas calculadoras. Este programa, en realidad, no es utilizado como un instrumento para encontrar el intervalo en estos ejercicios.

Gwen comenzó con un problema que diseñó ella misma, relativo a las personas pelirrojas de Escocia (inspirado en un problema de un libro con un contexto diferente, figura 3).


<p>La proporción de escoceses portadores de un gen que origina el rojizo es aproximadamente $p=0,4$. De una muestra de 50 escoceses, todos seleccionados de una misma población, 17 son portadores de este gen. ¿Podemos considerar, con una tolerancia del 95%, que la población de portadores del gen es la misma en esta muestra de la población que entre el conjunto de escoceses? (Método 1: con el intervalo de segundo; Método 2: con la ley binomial)</p>	
--	---

Figura 3. Extracto de la actividad de introducción de Gwen

La primera parte del problema recuerda el intervalo estudiado en el curso anterior. En la entrevista, Gwen declara que es importante no solo recordar el intervalo sino también, recordar la idea misma de variabilidad de una muestra. La segunda parte del problema introduce un nuevo intervalo. Después de esta clase, Gwen trabaja con los estudiantes en la producción de un algoritmo y su implementación en la calculadora para encontrar el intervalo de fluctuación de la ley binomial. Este programa es usado siempre para resolver ejercicios donde se pide hallar el intervalo. Gwen menciona que encuentra el intervalo de fluctuación de la ley binomial demasiado técnico y que no pretende que sus estudiantes aprendan a encontrarlo. Prefiere usarlo como una oportunidad para trabajar sobre algoritmos. Distribuye una hoja a los estudiantes para recordar el intervalo y presenta el diagrama (similar al de la figura 1).

De esta manera, el trabajo de Gwen durante las sesiones de clases puede resumirse de la siguiente manera: propone actividades variadas sobre las decisiones usando el intervalo de fluctuación, iniciando con una actividad referida a la proporción de pelirrojos en una muestra de 50 escoceses. Luego propone una serie de cinco actividades. La primera de ellas refiere a la proporción de casos de leucemia en Estados Unidos. Esta actividad contiene una tabla y el objetivo es que los estudiantes logren leer e interpretar la tabla, reproducirla en la calculadora y calcular la frecuencia observada y el intervalo de fluctuación recientemente introducido. Después propone una actividad referida a la proporción de estudiantes que aprueban un examen en un centro educativo A y la proporción de estudiantes que aprueban un examen en el centro educativo B. El objetivo es determinar los intervalos de fluctuación en cada caso y reflexionar al respecto teniendo en cuenta los tamaños de cada muestra. Posteriormente,

propone tres actividades más para efectuar una familiarización previa a la evaluación.

La evaluación final de este capítulo, diseñada en conjunto por Valeria y Gwen, es también la evaluación final del año para los dos cursos de Primero. Analizamos en esta instancia su trabajo documental sobre los recursos que utilizan, los que producen, los intercambios de mensajes a través de correo electrónico y sus entrevistas. El ejercicio de la evaluación final, que corresponde al capítulo sobre la fluctuación de muestras, comprende un intervalo de fluctuación (figura 4). Este ejercicio proviene de uno de los libros de textos consultados por Valeria y Gwen y contiene un texto introductorio y tres preguntas sobre la cantidad de gemelos en India. Valeria y Gwen modifican el texto inicial ya que lo consideran demasiado extenso y complejo.

India: Kodinji, el pueblo de gemelos misteriosos.
 En el estado de Kerala (al sudoeste de la India) hay un pueblo asombroso. La tasa de gemelos es mucho más alta que el promedio nacional. 440 gemelos viven en este pueblo de 14600 habitantes. Este promedio es excepcional, ya que el promedio nacional es de 16 gemelos entre 1000 habitantes.
 Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de gemelos de una muestra de 14600 indios.

Figura 4. Texto de introducción en el ejercicio de evaluación

Valeria y Gwen modificaron la primera pregunta. En el libro, los parámetros de la ley binomial X estaban dados, pero ellas querían que los estudiantes los encontraran. También modificaron la segunda pregunta, donde se solicitaba a los estudiantes producir el intervalo de fluctuación, permitiendo los dos métodos diferentes, según lo esperado por cada profesora: uso de la tabla (dada en el texto) para el grupo de Valeria, y el uso del programa de la calculadora para el grupo de Gwen. La pregunta 3, que consistía en justificar el rechazo de la hipótesis “la ciudad de Kodinji sigue los valores de la población”, no fue modificada.

En los resultados de la evaluación final realizada por 42 estudiantes encontramos que, en la primera pregunta, 35 estudiantes justificaron que X sigue una ley binomial de parámetros n y p , 29 estudiantes determinaron correctamente el valor de n , pero solamente 15 determinaron en valor de p . En la segunda pregunta, 19 estudiantes determinaron correctamente los extremos del intervalo de fluctuación. En la tercera pregunta, 19 estudiantes determinaron correctamente el rechazo de la hipótesis basados en el intervalo de fluctuación previamente construido y a partir del cálculo de la frecuencia observada.

Documentos desarrollados por Valeria y Gwen

Por cuestiones de espacio, no describiremos aquí la totalidad de los documentos desarrollados por Valeria y Gwen, si no que presentaremos los ejemplos más

significativos, que ponen en evidencia las semejanzas y diferencias entre los documentos emergidos del trabajo documental común.

Valeria y Gwen tienen un objetivo común que podemos describir de la siguiente manera: recordar los conocimientos necesarios para la introducción del intervalo de fluctuación con la ley binomial. Ambas consideran que este nuevo capítulo debe comenzar por una revisión del intervalo de fluctuación estudiado en segundo. Comparten un invariante que emerge de las observaciones realizadas en cursos de años precedentes en las clases de Primero, orientación Científica: “En Primero, la mayor parte de los alumnos olvidan el intervalo de segundo, e incluso la problemática de la fluctuación de muestras”.

Según Gwen, es posible también que ciertos alumnos no hayan estudiado jamás este intervalo, porque, por ejemplo, su profesor ha decidido no desarrollar en el curso este aspecto del programa. A pesar de este conocimiento compartido, Valeria y Gwen utilizan recursos diferentes y desarrollan un documento diferente para el objetivo de revisar los conocimientos necesarios. Valeria utilizó el libro de texto de la clase, más precisamente una parte del manual que propone actividades de revisión. Gwen elaboró su propia actividad, propuso una parte preliminar en su actividad de introducción al intervalo de fluctuación de la ley binomial (figura 2). En esta parte, los alumnos trabajaron con el intervalo de fluctuación de segundo.

Uno de los objetivos que el programa propone en este capítulo puede formularse de la siguiente manera: determinar el intervalo de fluctuación con un nivel de tolerancia del 95% para una ley binomial cuyos parámetros son conocidos. Durante los años precedentes, Valeria desarrolló para este objetivo un documento que comporta varios recursos: la hoja de cálculo, en formato electrónico o en la calculadora, ejercicios y el diagrama ilustrativo (ver figura 1). Este documento comporta también un invariante operatorio vinculado a la enseñanza de la probabilidad que puede ser formulado en los siguientes términos: “Los alumnos deben aprender a determinar los extremos del intervalo de fluctuación con una tolerancia del 95% leyendo una tabla de la ley binomial”. Este invariante creemos que proviene de varios recursos: los textos oficiales (programas) y los libros de texto que priorizan esta búsqueda de los extremos del intervalo. Sin embargo, por su parte Gwen desarrolló invariantes diferentes para el mismo objetivo.

A pesar de lo que se propone en el programa y en los libros, Gwen piensa que no es importante que los alumnos aprendan el método de determinación de los extremos del intervalo. En particular, no desea que los alumnos memoricen que “ a es el menor número entero tal que $P(X \leq a) > 0,025$ y que b es el mayor número entero tal que $P(X \leq b) \geq 0,975$ ”. Gwen considera que este método es muy técnico y difícil de recordar. Consideramos que Gwen tiene un invariante operatorio vinculado a la enseñanza de la probabilidad que puede formularse de la siguiente manera: “No es importante que los alumnos aprendan este método”.

Este conocimiento proviene de interacciones con un tipo particular de recursos, los temas presentes en el examen Bacc. De hecho, y desde el año 2012, año a partir del cual se ha modificado el programa de estudios, ninguna de las cuestiones incorporadas concierne al intervalo de la ley binomial. Así, Gwen concluyó que este intervalo serviría solamente de intermediario matemático entre el intervalo de Segundo y el de Terminal.

Desde hace varios años, Gwen inicia la clase con el objetivo que los alumnos programen la calculadora para buscar este intervalo. Esta elección está también guiada por su invariante relativo a la importancia de la enseñanza del algoritmo (que está siempre presente en los temas del examen Bacc). Consideramos que, para el objetivo de la determinación del intervalo, Gwen ha desarrollado un documento que comporta el recurso de la calculadora, ejercicios extraídos de libros de texto o desarrollados por ella y conocimientos que pueden formularse de la siguiente manera: “El método de búsqueda del intervalo de la ley binomial es demasiado técnico”, “Es importante que los alumnos trabajen con el algoritmo”. Así, en el comienzo del trabajo colectivo, los documentos de ambas profesoras son radicalmente diferentes.

El trabajo colectivo de preparación las lleva a reconocer esta diferencia. Valeria considera que es una buena idea buscar el intervalo de fluctuación a partir de un trabajo algorítmico. Comparte el conocimiento sobre la importancia de la enseñanza del algoritmo, sin embargo, continúa convencida que los alumnos deben aprender el método utilizando la lectura de una tabla. Además, Valeria considera que, para grandes muestras, la calculadora toma varios minutos para construir el intervalo y pretende evitar esta pérdida de tiempo. Así, después de introducir el método, agrega un trabajo sobre la programación del algoritmo en la calculadora, pero solamente al finalizar el capítulo. Por su parte, Gwen no modificó su práctica habitual. En consecuencia, en cada clase, los alumnos aprenden un método diferente, y la evaluación final evidencia esta diferencia pues se incluye una actividad que propone utilizar uno u otro método. En este caso, la diferencia persistió. Esta no se habría producido si hubiese existido la condición de producir una secuencia verdaderamente común (por ejemplo, si el trabajo colectivo se situaba en el contexto de la escritura de un libro escolar).

Valeria y Gwen habían decidido, durante la preparación común, que la evaluación final de este capítulo sería la misma para los dos grupos. Consideramos que ellas comparten un objetivo que lo podemos formular como: evaluar las capacidades de los alumnos, relativos a la enseñanza del intervalo de fluctuación de la ley binomial. Valeria y Gwen eligieron un ejercicio (ver figura 3) que presenta una situación concreta, y lo modificaron para que los alumnos estén obligados a determinar los parámetros de la ley binomial correspondiente interpretando el enunciado del ejercicio. Esta modificación es una consecuencia de un invariante compartido: “Es importante que los alumnos sepan leer los textos y encontrar allí informaciones”. El ejercicio demanda también una interpretación que utiliza el intervalo de fluctuación ya determinado,

interpretación cuya importancia también radica en un conocimiento compartido por las dos profesoras. En cambio, y como lo mencionamos previamente, para la concepción de la evaluación, Valeria y Gwen modifican el ejercicio para introducir los dos métodos diferentes, como consecuencia de invariantes que no son compartidos, y que no han evolucionado en el transcurso del trabajo colectivo. En la tabla 2, presentamos una síntesis de los elementos de los documentos evocados anteriormente.

Diremos que, en todo caso, los documentos desarrollados para un mismo objetivo comportan ciertos elementos comunes y otros que son diferentes. Las profesoras tienen la experiencia de esta enseñanza. Previo al trabajo común, Valeria y Gwen desarrollaron invariantes, algunos coincidentes (por ejemplo, la necesidad de revisión). Pero estos invariantes están asociados a recursos diferentes, y entonces, dan lugar a documentos cuya parte de los recursos no es la misma. Algunos invariantes difieren, por ejemplo, para la determinación del intervalo de fluctuación. Cuando estos invariantes difieren, el trabajo común puede impulsar una evolución (aquí por una de las dos, Valeria) pero no desemboca en el desarrollo de un documento completamente común, incluso cuando el recurso de partida es el mismo, como en el caso del tema de la evaluación común.

Tabla 3

Elementos de los documentos desarrollados por Valeria y Gwen

Objetivo	Recurso utilizado	Invariantes operatorios
<i>Revisión de los conocimientos necesarios, intervalo de segundo.</i>	Valeria: ejercicios de revisión del manual de la clase (figura 4). Gwen: un problema concebido por ella misma (figura 2).	“Muchos alumnos de Primero no recuerdan el intervalo de fluctuación de segundo”. Es necesario comenzar revisando los contenidos de segundo (del año anterior).
<i>Enseñar el método de la determinación del intervalo de fluctuación con la ley binomial.</i>	Valeria: problemas y ejercicios extraídos de diferentes manuales, tablas, <i>algoritmos en la calculadora (seguido al trabajo colectivo)</i> . Gwen: problemas concebidos por ellas, ejercicios de diferentes manuales, <i>algoritmos en la calculadora</i> .	Valeria: “Los alumnos deben aprender a encontrar los extremos del intervalo a partir de una tabla de la ley binomial que corresponde”, “No deben utilizar la calculadora sin interpretar los resultados”. Gwen: “Es importante que los alumnos trabajen sobre algoritmos”, “el intervalo de la ley binomial es demasiado técnico”.

Tabla 3

Elementos de los documentos desarrollados por Valeria y Gwen

Objetivo	Recurso utilizado	Invariantes operatorios
<i>Evaluar las capacidades de los alumnos relativas al intervalo de fluctuación de la ley binomial.</i>	<i>Texto de evaluación escrito en común, a partir de un ejercicio encontrado en un libro, y transformado particularmente para introducir los dos métodos.</i>	“Los alumnos deben ser capaces de identificar la información presente en un texto”. + <i>Conocimientos anteriores.</i>

Nota. La cursiva indica elementos comunes

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo nos enfocamos en analizar el trabajo documental desarrollado por dos profesoras de matemáticas con amplia trayectoria docente en educación secundaria superior en Francia. El trabajo documental de las profesoras tenía un objetivo común: diseñar una secuencia de actividades para abordar la enseñanza de los intervalos de fluctuación. Esta secuencia sería desarrollada por cada una de las profesoras en sus respectivos cursos. Nos centramos específicamente en las interacciones entre las profesoras y los recursos tomando como referencia una de las premisas del enfoque de la aproximación documental (Gueudet y Trouche, 2008) que indica que estas interacciones conducen a evoluciones de los conocimientos profesionales de los profesores, conocimientos interpretados a la luz de los invariantes operatorios. Inversamente, los invariantes de los profesores influyen en la elección de los recursos y de sus usos.

Observamos que cada una de las profesoras efectúa un importante trabajo documental, buscando recursos, modificándolos y construyendo sus propios recursos. Concluimos que, en este proceso de génesis documental, el movimiento denominado instrumentación ha operado en menor medida, es decir, los recursos han influenciado en menor medida en los invariantes de las profesoras. Concluimos que el proceso de instrumentalización ha tenido mayor preponderancia. Las profesoras han seleccionado documentos y los han modificado y readaptado ampliamente. Postulamos que esto es una causa de la amplia experiencia docente de ambas profesoras que, en cierto modo, las lleva a disponer de esquemas de uso muy arraigados. Consideramos que estos esquemas influyen fuertemente en su actividad y especialmente, en la elección de los recursos y en las modificaciones que les realicen.

A su vez, y a pesar del trabajo en conjunto, durante el desarrollo de las clases, las dos profesoras marcaron objetivos diferentes. Por ejemplo, Valeria consideró importante que los estudiantes memoricen el método de determinación

del intervalo de fluctuación de la ley binomial a partir de una tabla de valores de esta ley, mientras que para Gwen fue esencial remarcar la importancia de la enseñanza del algoritmo. Gwen desarrolló una interpretación personal del programa oficial, que no se centró en el capítulo de la probabilidad, sino que se interesó más bien en el contenido algorítmico (introducido por primera vez en el programa en 2010, y que concierne a todos los temas matemáticos).

En lo que respecta al trabajo colectivo de las profesoras, mostramos que, a pesar de ciertos objetivos compartidos y del trabajo documental colectivo, los documentos desarrollados no son totalmente idénticos. El trabajo colectivo conduciría al desarrollo de documentos que tendrían ciertos elementos comunes. Consideramos que las diferencias provienen, la mayor parte, de la experiencia importante de cada profesora, las cuales han desarrollado en el transcurso de los años anteriores, documentos para estos mismos objetivos. Tienen entonces, conocimientos profesionales para la enseñanza de la matemática asociados a estos objetivos, así como recursos específicos. El trabajo colectivo dio lugar a nuevos recursos, en el caso de Valeria, la construcción del algoritmo en la calculadora y su uso en la resolución de las actividades. Este hecho emerge claramente del análisis de nuestros datos.

A partir de estas conclusiones, suponemos que para que el trabajo colectivo en una CoP converja en documentos comunes, es necesario que el objetivo del trabajo de la CoP se dirija hacia la producción de recursos, con la condición de producir un único recurso. Desde el punto de vista del desarrollo individual de los documentos, sería interesante continuar este estudio sobre la probabilidad con otros profesores y en otros países. Sería interesante, por ejemplo, profundizar el análisis en términos de invariantes operatorios vinculados a la enseñanza de la probabilidad en diferentes contextos y con profesores de diferentes años de experiencia. A su vez y como el trabajo documental está hecho de interacciones, sería interesante analizar cómo resulta tal interacción con la incorporación de nuevos recursos, recursos no usados habitualmente por las docentes como, por ejemplo, una simulación. Continuaremos nuestras investigaciones para validar o refutar las hipótesis mencionadas aquí.

REFERENCIAS

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205-224.
<https://doi.org/10.1023/A:1009903206236>
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: AERA.

- Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J. M. (2012). Comprensión de la aleatoriedad por futuros profesores de Educación Primaria. *REDIMAT*, 1(3), 222-245.
- Burgess, T. A. (2008). Teacher knowledge of and for statistical investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 259-270). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.
- Ducel, Y. y Saussereau, B. (2011). La prise de décision de la seconde à la première. *Repères IREM*, 85, 31-49.
- Duarte, P. (2012). La place de la statistique dans les programmes du secondaire a la rentrée 2012: mise en œuvre pédagogique et formation des enseignants. En M. Gandit y B. Grugeon-Allys (Eds.), *Actes CORFEM 18^{ème} et 19^{ème}* (pp. 169-191). Besançon, Francia: Université et IUFM de Franche-Comté.
- García, E. (1991). *Una teoría práctica sobre la evaluación. Estudio etnográfico*. Sevilla, España: MIDO.
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), 209-229. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11>
- Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5(1), 49-71.
- González, O. (2016). A framework for assessing statistical knowledge for teaching based on the identification of conceptions of variability held by teachers. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *Teaching and learning of statistics*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0_37
- González, O. y Isoda, M. (2011). Variability in education for statistical literacy in mathematics: On the basis of previous survey researches. *Journal of Science Education in Japan*, 35(2), 139-152.
- Grave, I., Pepin, B. (2015). Teachers' use of resources in and for mathematics teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20(3-4), 199-222.
- Gueudet G. y Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et Didactique*, 2(3) 7-33.
- Gueudet, G., Pepin, B. y Trouche, L. (2012). *From text to 'lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development*. New York, NY: Springer.

- Gueudet, G., Pepin, B. y Trouche, L. (2013). Collective work with resources: An essential dimension for teacher documentation. *ZDM*, 45(7), 1003-1016. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0527-1>
- Gueudet, G., Pepin, B., Sabra, H. y Trouche, L. (2016). Collective design of an e-textbook: Teachers' collective documentation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2-3), 187-203.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Isoda, M. y González, O. (2012). Survey on elementary, junior and senior high school teachers' statistical literacy: The need for teacher training in variability. *Journal of Science Education in Japan*, 36(1), 61-76.
- Makar, K. y Confrey, J. (2004). Secondary teachers' statistical reasoning in comparing two groups. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy reasoning and thinking* (pp. 327-352). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Miyakawa, T. y Pepin, B. (2016). Le "school-based" développement professionnel des enseignants en mathématiques: deux pratiques collectives en Europe et au Japon. En Y. Matheron et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 145-178). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de educación secundaria obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga, España: SEIEM.
- Peng, A. (2007). Knowledge growth of mathematics teachers during professional activity based on the task of lesson explaining. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 289-299.
- Pepin, B., Gueudet, G. y Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM*, 49(5), 799-812.
- Perrin, D. (2015). Remarques sur l'enseignement des probabilités et de la statistique au lycée. *Statistique et Enseignement*, 6(1), 51-63.
- Peters, S. A. (2009). *Developing an understanding of dispersion: AP statistics teachers' perceptions and recollections of critical moments* (Tesis doctoral no publicada). Pennsylvania State University, PA.
- Poisard, C., Bueno-Ravel, L. y Gueudet, G. (2011). Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(2), 151-189.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, Francia: Armand Colin.

- Reading, C. y Shaughnessy, M. (2000). Student perceptions of variation in a sampling situation. En T. Nakahara y M. Kyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 89-96). Hiroshima, Japón: Hiroshima University.
- Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? *Elementary School Journal*, 100(4), 331-350.
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.
- Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2003). Middle school students' thinking about variability in repeated trials: A cross-task comparison. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zillah (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 159-165). Honolulu, HI: University of Hawaii.
- Torok, R. y Watson, J. (2000). Development of the concept of statistical variation: An exploratory study. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 147-169.
- Vergnaud, G. (1996). Toward a cognitive theory of practice. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (pp. 227-241). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publisher.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, identity*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Wessels, H. (2014). Developing statistical knowledge for teaching of variability through professional development. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Voorburg, Países Bajos: International Statistical Institute.

Verónica Parra
NIECyT, CONICET, UNCPBA
vparra@exa.unicen.edu.ar

Ghislaine Gueudet
CREAD, ESPE de Bretagne, UBO
ghislaine.gueudet@espe-bretagne.fr

Recibido: 09/10/2018. Aceptado: 22/04/2019

doi: 10.30827/pna.v13i3.8040



ISSN: 1887-3987