Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros

Emma Carreño y Nuria Climent

Este trabajo aborda el conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria de Perú, en torno a la conceptualización de los cuadriláteros, empleando el MTSK. Enfoca el conocimiento de estos profesores cuando definen los cuadriláteros en un cuestionario de respuesta abierta, planifican una sesión de clase y la ejecutan. Corresponde a un estudio instrumental de casos, perteneciente a una investigación interpretativa más amplia. Estos proponen definiciones descriptivas y particionales, sin cuestionar la necesidad y suficiencia de las propiedades que incluyen.

Términos clave: Conocimiento especializado; Cuadriláteros; Definición; Futuros profesores; Secundaria

Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. A Study of the Definitions of Quadrilaterals

This paper deals with the specialized knowledge of pre-service secondary Mathematics teachers from Peru, about the conceptualization of quadrilaterals, using the MTSK model. We focus on understanding what their knowledge is like when they define quadrilaterals in an open-response questionnaire, plan a lesson and execute it. The research is an instrumental case study belonging to a broader interpretative investigation. They propose descriptive and partitional definitions, without questioning the necessity and sufficiency of the properties that they include.

Keywords: Definition; Pre-service teachers; Quadrilaterals; Secondary school; Specialized knowledge

Carreño, E. y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA 14*(1), 23-53.

El conocimiento del profesor es estudiado desde hace varias décadas, siendo el trabajo de Shulman (1986) un hito en este ámbito. Así pues, el conocimiento didáctico del contenido, un dominio de conocimiento específico del profesor y sujeto a la materia de enseñanza, ha motivado numerosas investigaciones, la emergencia de marcos teóricos que permiten estudiarlo y la aparición de nuevos constructos entre los que destaca el conocimiento especializado del contenido. Este se hizo explícito en el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008) y es concebido como un subdominio de conocimiento matemático en el que se incluye el conocimiento y la habilidad necesarios únicamente para la enseñanza de la matemática. En este sentido, no es compartido con otro profesional de la matemática o persona formada en esta materia puesto que es exclusivo del profesor de matemáticas. Esta necesidad de un referente externo al propio conocimiento especializado problematiza su identificación y acarrea dificultades en su delimitación con los otros subdominios del MKT (Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

La relevancia del constructo mencionado y los estudios realizados con MKT han llevado a reformular y crear modelos que superen las dificultades evidenciadas, de tal forma que se pueda estudiar la especificidad del conocimiento del profesor de matemática. Así pues, el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) aparece como un modelo teórico y una herramienta de análisis fundado en: (1) el conocimiento de la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje, (2) la especialización del conocimiento matemático en la medida que se hace funcional en un contexto de enseñanza-aprendizaje, y (3) en un paradigma interpretativo que posibilita comprender y articular las dimensiones de dicho conocimiento (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017). Apoyados en este modelo buscamos comprender cómo es el conocimiento especializado de futuros profesores de matemática de secundaria cuando abordan la definición de los cuadriláteros en situaciones de enseñanza propuestas en un cuestionario de respuesta abierta, en un plan de clase y en la ejecución de este.

El interés sobre los cuadriláteros responde a la poca atención que se pone al estudio del conocimiento de profesores y futuros profesores respecto de temas geométricos (Aslan-Tutak y Adams, 2015) y, más aún, a la repercusión de dicho conocimiento en las prácticas de aula (Chinnappan y Lawson, 2005). Además, los cuadriláteros se tornan un tópico relevante por su lugar en el currículo escolar de diversos países (Zazkis y Leikin, 2008). De hecho, Sinclair et al. (2016), al revisar las investigaciones relacionada con geometría desde el 2008, identifican como uno de los focos de interés la comprensión de la enseñanza y aprendizaje de las definiciones. Sostienen que, si bien se ha investigado sobre la necesidad de aceptar algunas afirmaciones como definiciones para evitar la circularidad, el desarrollo de la definición y clasificación jerárquica de los conceptos geométricos (como los cuadriláteros), sigue siendo un área poco investigada. Así pues, nos ocupamos del conocimiento que evidencian futuros profesores sobre la definición de los cuadriláteros.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Diversas investigaciones se han ocupado de indagar sobre qué conocen los profesores o futuros profesores sobre un tema matemático específico, empleando distintos modelos de conocimiento. Sin embargo, las investigaciones en torno a la geometría y la medición han sido escasas o limitadas (Steele, 2013), sobre todo, si se trata de relacionar el impacto del conocimiento del profesor en el aula o de identificar dimensiones clave que determinen la calidad de dicho conocimiento. Esto último es el foco de interés de Chinnappan y Lawson (2005) quienes analizan los mapas conceptuales que construyen dos profesores de secundaria experimentados sobre la definición e imagen conceptual del cuadrado. En torno a este concepto analizan cuatro dimensiones: (a) definición de características y propiedades fundamentales; (b) características y propiedades derivadas; (c) relaciones entre conceptos, y (d) representaciones del concepto (analogías, metáforas, ilustraciones o ejemplos reales).

La complejidad del conocimiento es establecida, cuantitativamente, en función del número de conceptos propuestos y vínculos establecidos y, cualitativamente, a partir de criterios de integridad (conocimiento correcto y completo) y conectividad (conexiones entre conceptos). Así, por ejemplo, el profesor que evidenció alta integridad y conectividad estableció vínculos entre cuadrado-rombo y rombo-paralelogramo y concluyó que un triángulo rectángulo isósceles es la mitad del cuadrado. Los autores concluyen que la red de conexiones puede impactar en la enseñanza del tópico en cuestión.

Por su parte, Murphy (2012) ha abordado el conocimiento de futuros profesores de primaria sobre la medición de las áreas y su incidencia en la enseñanza. Estos autores encuentran dependencia entre el conocimiento matemático y el didáctico. Así, si el conocimiento del futuro profesor es pobre, su enseñanza será transmisiva, mientras que, si tiene un conocimiento profundo, el enfoque de enseñanza será investigativo. Un trabajo más cercano al nuestro por proponer el análisis de atributos y clasificación de cuadrilátero y otros polígonos, es el de Aslan-Tutak y Adams (2015). Dicho estudio informa sobre el limitado conocimiento del contenido geométrico, la integración de este en la ejecución de la enseñanza y la potencialidad del uso de las producciones de estudiantes para generar y mejorar el conocimiento de los futuros profesores. Así, concluyen que se necesita profundizar en el conocimiento geométrico porque la falta de este limita a los futuros profesores en el aprendizaje de aspectos de la enseñanza.

Según lo anterior, el estudio del conocimiento del profesor ha requerido de diversos modelos y recursos conjugados con estos. Así, se ha empleado el modelo de razonamiento y acción pedagógica y sus posteriores categorías de Shulman (1986) hasta el MKT del equipo de Michigan (Ball, Thames y Phelps, 2008). Si bien el primero resulta trascendente por su llamada de atención sobre la especificidad del conocimiento del profesor según la materia que enseña, el segundo es relevante por proponer un subdominio de conocimiento especializado del contenido que solo le atañe al profesor de matemática. El estudio de las potencialidades y limitaciones de estos y otros modelos desde el punto de vista analítico (Flores, Escudero y Carrillo, 2013) ha permitido proponer el modelo MTSK, ideado por el grupo SIDM de la Universidad de Huelva (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

El MTSK es una herramienta teórica y de análisis que asume el conocimiento del profesor especializado en su conjunto, puesto que su especificidad queda determinada por el uso de la matemática como disciplina científica, en contexto escolar, y como tal, vinculada a la enseñanza y el aprendizaje de dicha materia (Carrillo-Yañez et al., 2018). En la búsqueda de exhaustividad al analizar el conocimiento especializado del profesor, el MTSK se estructura en dominios y subdominios (Figura 1). En estos últimos, se diferencian categorías. Esta descomposición del conocimiento del profesor permite que, posteriormente, pueda realizarse una síntesis integradora de todas las interrelaciones entre los subdominios evidenciados (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017).

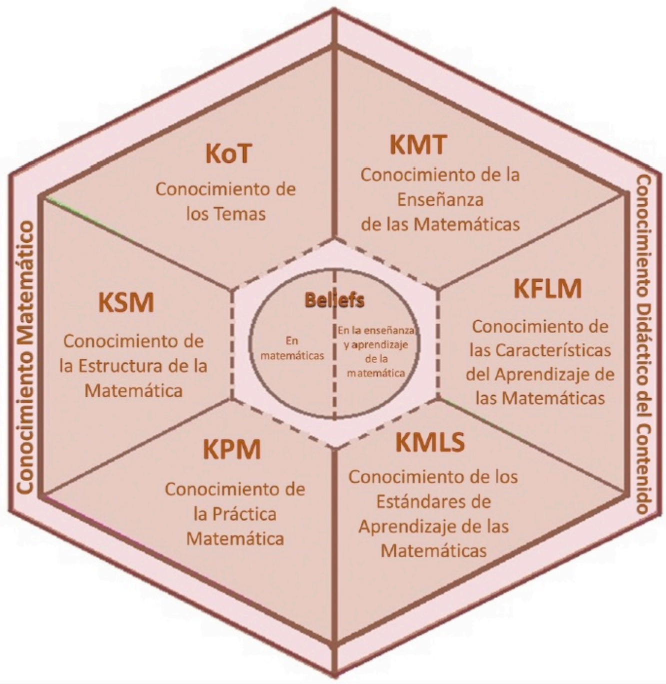


Figura 1. Esquema del Modelo MTSK

A continuación, presentamos una breve descripción de los subdominios en función de sus categorías. No obstante, Carrillo-Yañez et al. (2018) y Carrillo, Montes, Contreras y Climent (2017) presentan una descripción más extensa de la estructura del MTSK. En el desarrollo que presentamos a continuación, tomamos algunos ejemplos de los documentos referidos.

El MTSK se estructura en tres dominios: matemático, didáctico del contenido y creencias y concepciones. El dominio matemático comprende el conocimiento profundo de la red sistémica y estructurada del conocimiento matemático fundamental. En este se incluye el *conocimiento de los temas* (KoT) que contiene el conocimiento sobre los procedimientos (p. ej. clasificación de formas planas); definiciones, propiedades y sus fundamentos (p.ej. características y propiedades de polígono); registros de representación (p.ej. representación gráfica de formas planas (figura), algebraica (ABCD con AB//DC, BC//AD y AB=DC=BC=AD), lenguaje natural (cuadrado, trapezoide)) y la fenomenología y aplicaciones de un concepto (p. ej. formas planas en situaciones cotidianas). En cuanto al registro de representaciones, este corresponde al registro es cada tipo de representación o sistema semiótico que permite las operaciones de transformación interna: conversión y tratamiento. Estas suponen un cambio de representación (de lenguaje a notaciones simbólicas, de lenguaje a diagramas, de lenguaje a figura, de representaciones gráficas a notaciones algebraicas de relaciones) y una secuencia de varias transformaciones, respectivamente. Así pues, la comprensión matemática requiere la coordinación interna de, al menos, dos registros de representación (Duval, 2006).

Luego, el *conocimiento de la estructura matemática* (KSM), que incluye las conexiones entre conceptos, posibilitando visualizar el conocimiento matemático como un conjunto que transita de conceptos elementales a complejos (p. ej. reflexiones, a partir de conceptos geométricos euclidianos, a otras geometrías no euclidianas) y viceversa. También integra elementos auxiliares en conceptos o procesos más complejos (p. ej. uso de ecuaciones para el cálculo del número de lados de un polígono sabiendo su número de diagonales), así como conceptos estructurantes y comunes a varios elementos (p. ej. la noción de igualdad que se relaciona con la congruencia de figuras geométricas). Finalmente, el *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que refiere a las actividades mediadas por procesos sistemáticos y reglas lógicas que permiten la creación matemática, desde una perspectiva general o específica a un tema. Así, nos referimos al significado de las condiciones necesarias y suficientes (p. ej. en la construcción de definiciones), los tipos de prueba y demostración, así como las diversas formas de argumentación, el rol de la heurística en la resolución de problemas (p.ej. proponer el trazado de una representación gráfica del problema), el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal.

El domino didáctico comprende el conocimiento pedagógico derivado de las matemáticas, no de la pedagogía en general. Así pues, el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se refiere al contenido matemático que determina la enseñanza y el aprendizaje, organizado en tres subdominios. El *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) incluye las teorías de aprendizaje, personales e institucionalizadas, del desarrollo cognitivo de los estudiantes respecto de contenidos matemáticos (p. ej. los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele), las fortalezas y dificultades que tienen los estudiantes cuando interactúan con un tema (p. ej. la idea errónea de que si el área de una forma plana es mayor que el de otra, su perímetro también lo es, o viceversa), las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático mismo (p. ej. al construir o analizar definiciones, escasamente reparan en las condiciones necesarias y suficientes) y los aspectos emocionales (intereses y expectativas) involucrados en el aprendizaje de las matemáticas que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas (p. ej. creer que los problemas matemáticos tienen una sola forma de resolverse y una única solución). El *conocimiento de la enseñanza de la matemática* (KMT) contiene las teorías sobre enseñanza que resultan de la investigación en educación matemática o que emergen de la reflexión sobre la actividad matemática en el aula (p. ej. la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau). También se incluyen los recursos materiales y virtuales en cuanto que posibilitan o limitan el desarrollo de conocimiento matemático (p. ej. la potencialidad del Geoplano rectangular y su limitación para construir triángulos equiláteros). Este sentido se extiende a las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que permiten enseñar o no un contenido matemático. El *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) se refiere al contenido matemático que se propone enseñar y orientaciones sobre cómo enseñarlo, desde los organismos curriculares oficiales o no oficiales pero reconocidos por sus aportes. Así, se incluye las expectativas de aprendizaje (p.ej. en el currículo peruano se propone que en el nivel primario se elaboren afirmaciones sobre algunas relaciones entre elementos de las formas, su composición o descomposición), el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado (p. ej. la elaboración de afirmaciones sobre las relaciones entre elementos de las formas propuesta en el nivel primario, requiere la comprobación y validez mediante ejemplos, propiedades geométricas y razonamiento inductivo o deductivo en el nivel secundario) y secuenciación de un tema en relación a temas anteriores y posteriores.

DEFINICIONES DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO Y LA PRÁCTICA MATEMÁTICA DE DEFINIR

La adquisición de un concepto matemático supone construir un esquema que integra la imagen conceptual (representaciones visuales, impresiones y experiencias asociadas con el nombre del concepto que pueden trasladarse, posteriormente, a formas verbales) y la definición conceptual (enunciado verbal-memorizado o no- que explica el significado de dicho concepto) (Vinner 1991).

Si bien la primera ejerce supremacía porque el pensamiento evoca imágenes conceptuales mientras que las definiciones permanecen inactivas o se olvidan, el autor citado considera necesario que quienes se preparan para ser profesores sean entrenados en el uso y construcción de definiciones, luego de analizar ejemplos y contraejemplos que propicien la emergencia de conflictos entre las imágenes conceptuales y las definiciones formales de un concepto. En dicho entrenamiento ha de tenerse en cuenta la existencia del fenómeno prototipo (Herskowitz, 1990) que consiste en centrar la atención en los ejemplos visualmente potentes, debido a que incluyen la lista más larga de atributos, sean críticos o no críticos, tales como: posición horizontal, lados y ángulos iguales, y diagonales y alturas interiores.

En relación con lo anterior, Shir y Zaslavsky (2001) sostienen que la construcción de una definición necesita, previamente, del reconocimiento y clasificación de ejemplos y no ejemplos, lo que involucra un proceso dialéctico en el que interaccionan los aspectos figurativos y conceptuales de un concepto. Este proceso implica la observación e identificación de características del concepto, el establecimiento de propiedades a partir de dichas características y la verificación de la definición con respecto a las características y propiedades observadas del concepto (Mariotti y Fischbein, 1997). Si bien enunciar una definición no asegura la comprensión del concepto (Gutiérrez y Jaime, 1999; Vinner 1991), las tareas que promueven su construcción o el análisis de definiciones dadas posibilitan encontrar evidencias de lo que se entiende por un concepto específico. En tal sentido, “las definiciones de los conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes a estas y el proceso de definición son componentes fundamentales del conocimiento de la materia de los profesores de matemática” (Zazkis y Leikin, 2008, p. 133).

Los estudios realizados en torno a la definición de conceptos geométricos han puesto en evidencia las concepciones que sobre esta se tienen (Shir y Zaslavsky, 2001), han permitido establecer tipos de definiciones y mostrar el rol que atañe a la definición en la educación matemática (de Villiers, 1998; de Villiers, Govender y Pattersn, 2009). También han confirmado la estrecha relación entre definición y clasificación, puesto que ambos procesos requieren de un razonamiento lógico basado en las interacciones entre el concepto y las imágenes conceptuales (Ülger y Tapan-Broutin, 2017). Así, definir conceptos de determinada manera implica, automáticamente, su clasificación y, a su vez, clasificar un conjunto de conceptos supone definirlos (de Villiers, Govender y Pattersn, 2009).

Entender la definición como proceso ha permitido diferenciar, matemáticamente, entre definiciones descriptivas y constructivas (de Villiers, 1998; Sinclair et al., 2016). Las definiciones descriptivas tienen como punto de partida la imagen conceptual que posibilita identificar un listado de propiedades que, al analizarse, permiten distinguir entre necesarias y suficientes de otras que podrían deducirse de las primeras. Esta diferenciación posibilita construir una definición conceptual que a su vez puede ser: correcta, económica y/o jerárquica, con sus respectivos contrapuestos. Las definiciones constructivas parten de una definición conceptual de la que se identifican propiedades para que al variarlas —excluyendo, generalizando, especificando, reemplazando o añadiendo alguna— se construya una nueva definición que posibilite establecer una imagen conceptual. Así pues, mientras la definición constructiva tiene como función la producción de un nuevo conocimiento, la definición descriptiva busca la sistematización del conocimiento existente.

La tipología anterior, asociada a una postura constructivista de la enseñanza-aprendizaje de la matemática y al modelo de Van Hiele, permite diferenciar tres tipos de definiciones, correspondientes con los niveles de razonamiento geométrico: visuales, no económicas y, correctas y económicas (de Villiers, 1998). Las definiciones visuales se basan en objetos que tienen la forma de la representación gráfica del concepto (rectángulo-puerta). Las definiciones no económicas incluyen un listado de "todas" las propiedades que se conocen del concepto. Las definiciones correctas y económicas contemplan solo las propiedades necesarias y suficientes del concepto. A su vez, estos niveles de definición permiten diferenciar dos tipos: definiciones particionales y definiciones jerárquicas. Las primeras contienen un listado de propiedades adicionales para garantizar la exclusión de casos especiales de un concepto. Por su parte, las definiciones jerárquicas presentan las características necesarias y suficientes del concepto de tal forma que los teoremas probados para este se apliquen automáticamente a sus casos especiales.

Reafirmando la diferenciación de definiciones particionales y jerárquicas, de Villiers, Govender y Pattersn (2009) proponen ciertas características que permiten distinguir definiciones correctas e incorrectas (Figura 2).

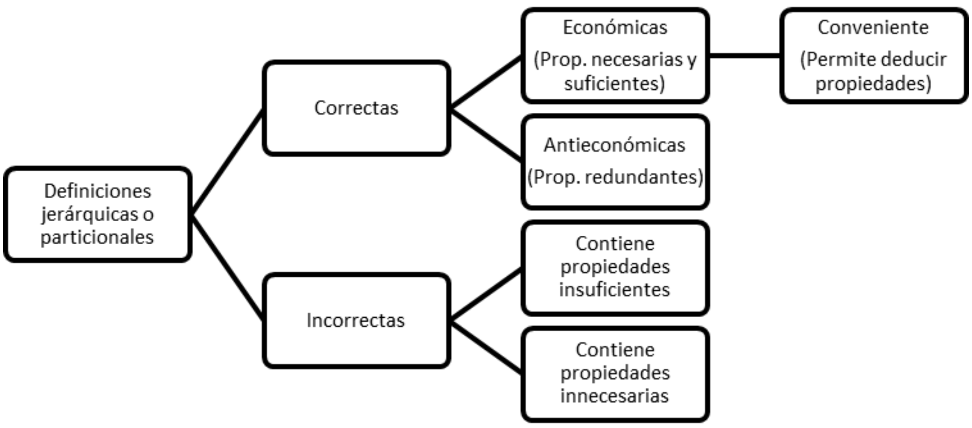


Figura 2. Clasificación según el contenido de la definición.
Fuente: Elaborado a partir de: de Villiers, Govender y Pattersn (2009)

Las primeras están compuestas de propiedades correctas que pueden ser necesarias y/o suficientes dando origen a definiciones económicas y antieconómicas, las primeras de estas constituyen definiciones convenientes. Por su parte, una definición incorrecta contiene propiedades insuficientes o innecesarias. Por su parte, Shir y Zaslavsky (2001) abordan las concepciones de una definición matemática, a partir del cuadrado. Estas involucran las características de una "buena" definición (jerarquía, existencia, no circularidad, no contradicción, inequívoca e independiente de la representación) que dan origen a diferenciar definiciones jerárquicas, procesuales o estructurales. Las primeras ya han sido abordadas en los párrafos anteriores, sin embargo, destacamos la distinción de niveles de jerarquía en dicho tipo de definiciones (p. ej. cuatro niveles para definir cuadrado en función de un concepto más general: polígono, cuadrilátero, paralelogramo y rombo o rectángulo). Las definiciones procesuales contienen una secuencia de pasos para construir su representación gráfica, razón por la cual, muchos no consideran como definición estos enunciados. Las definiciones estructurales se basan en las propiedades y elementos constituyentes del concepto.

Finalmente, Zazkis y Leikin (2008) diferencian definiciones apropiadas e inapropiadas a partir de las categorías "corrección" y "riqueza". La primera está en función del uso de características necesarias y suficientes mediadas por el rigor, mientras que la riqueza depende del uso de elementos no tradicionales, aunque esto no asegura su corrección (Figura 3).

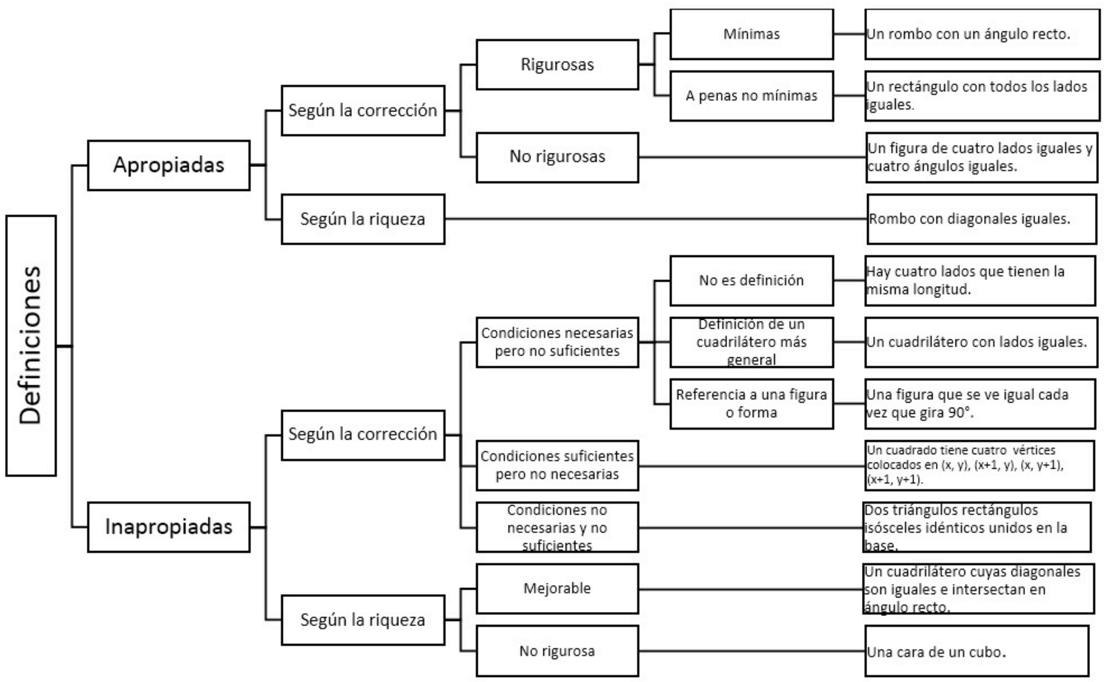


Figura 3. Tipos de definiciones y ejemplos de definiciones de cuadrado.
Fuente: Elaborado a partir de Zazkis y Leikin (2008)

Si bien ambas categorías son un lente organizativo en el análisis de definiciones, Zazkis y Leikin (2007, 2008) proponen, además, la "accesibilidad" y "generalidad" como categorías para analizar el espacio de ejemplos. Sin embargo, la visualización de la primera depende del diseño metodológico, mientras que la generalidad se considera intrínseca a la definición en sí misma. Este trabajo retoma las consideraciones pedagógicas y matemáticas (Winicki-Ladman y Leikin, 2000) para analizar las implicancias de una definición matemática y pone de relieve el potencial de generar definiciones puesto que, por un lado, permite evidenciar la comprensión de lo que implica una definición matemática y, por otro lado, manifestar la comprensión de los conceptos involucrados.

La revisión de los trabajos anteriores evidencia coincidencias en la diferenciación de definiciones descriptivas y constructivas, siendo las primeras el foco de atención de la mayoría de las investigaciones en educación matemática en torno al proceso de definición (Sinclair et al., 2016). Las definiciones descriptivas en relación con propiedades necesarias y suficientes de un concepto y mediadas por criterios de corrección, economía y jerarquía permiten diferenciar definiciones particionales y jerárquicas y dentro de estas, correctas (económicas o no) e incorrectas (de Villiers, Govenders y Pattersn, 2009), además de apropiadas e inapropiadas (Zazkis y Leikin, 2008). Las relaciones de inclusión, a su vez, posibilitan establecer niveles de jerarquía al construir una definición (Shir y Zaslavsky, 2001).

METODOLOGÍA

El estudio que presentamos se incluye en una investigación más amplia, situada en el paradigma interpretativo, con el que se pretende caracterizar el conocimiento especializado de estudiantes para profesor de matemática de Educación Secundaria Básica en formación inicial, respecto de los polígonos en general y de los cuadriláteros en particular. En este documento, en concreto, pretendemos acercarnos al conocimiento relacionado con la definición de cuadriláteros y con la práctica de definir que tienen dos futuros profesores. Esto incluye, por un lado, la definición e imagen mental que tienen de los cuadriláteros, los tipos de definiciones que consideran y las características atribuidas a una definición matemática. Por otro lado, involucra el conocimiento sobre cómo se aprende el contenido, su enseñanza y los estándares de aprendizaje, movilizado en una práctica de aula simulada. Así pues, presentamos un estudio instrumental de casos (Stake, 2007) dado que el interés está puesto en comprender las distintas dimensiones del conocimiento matemático especializado, a partir de las evidencias mostradas por los casos de dos profesores en formación identificados como Laura y Samuel, respecto de los temas antes mencionados. En este, nos enfocamos en las interacciones específicas que ocurren en un contexto micro (la asignatura Práctica Profesional A), contemplando el carácter humanista y complejo de la educación al comprender significados, las características de los informantes, la subjetividad y las interacciones entre informantes e investigadora quien es, además, la profesora de la asignatura en la que se desarrolla la investigación.

La asignatura Práctica Profesional A tiene naturaleza teórica y práctica, es la primera de las tres que integran el *Practicum* de la carrera de Educación de una universidad privada del Norte de Perú. Se cursa en el octavo cuatrimestre de los diez que componen la carrera, luego de haber estudiado asignaturas de formación pedagógica, curricular y de especialidad. En este último grupo resaltamos la asignatura Geometría Plana y Trigonometría, perteneciente al tercer cuatrimestre, puesto que atiende el contenido matemático desde un enfoque disciplinar, lo cual posibilita un abordaje profundo sobre los cuadriláteros. En el desarrollo de Práctica Profesional A se diferencian dos etapas, la primera centrada en el estudio de documentos curriculares y la planificación de sesiones de enseñanza-aprendizaje. La segunda etapa se caracteriza por la planificación y ejecución de sesiones de enseñanza-aprendizaje simuladas en las que los roles de docente y estudiante se rotan en cada sesión. Así pues, es esta segunda etapa la que se toma en cuenta en esta investigación, luego de que los futuros profesores han completado un cuestionario de respuesta abierta.

Considerando lo anterior, la recogida de datos ocurre mediante los métodos de encuesta, revisión de documentos y observación, lo cual permite una triangulación metodológica y de las fuentes de datos (Stake, 2007). Así, en dicha recogida de datos primero (después de que se ha cursado la asignatura Geometría Plana y Trigonometría y al iniciar la Práctica Profesional A) se propone completar un cuestionario de respuesta abierta, compuesto por cuatro situaciones de enseñanza, tres de las cuales abordan la identificación de aspectos determinantes en la concepción de distintos cuadriláteros, las características necesarias para definirlos y la clasificación jerárquica de los mismos. Estas situaciones contextualizan los ítems y requieren que los futuros profesores asuman el rol de docentes de estudiantes hipotéticos de segundo grado de secundaria (13-14 años). En un segundo momento, la docente-investigadora pide la elaboración de un plan de clase, para ampliar o aclarar algún conocimiento específico en torno a las propiedades, definición y clasificación de los cuadriláteros, según una consigna dada

Tabla 1). Finalmente, se ejecuta el plan de clase elaborado (simulación en el aula de formación) y se registra en video para su posterior transcripción.

Tabla 1
Temas y consignas para construir el plan de clase

Informante	Tema	Consigna para la construcción de la sesión
Samuel	Clasificación inclusiva de cuadriláteros	Construir una clasificación inclusiva de los cuadriláteros. Elaborar un esquema de esta y definir cada uno de ellos según el esquema.
Laura	Clasificación inclusiva de cuadriláteros	Empezar la sesión proporcionando a los alumnos distintos cuadriláteros numerados en una hoja para que los clasifiquen, bajo el criterio que quieran, pero cuidando que estén relacionados y no tratándolos como clases disjuntas.

Tanto la elaboración del plan de clase como su ejecución formaban parte de la evaluación de la asignatura Práctica Profesional A, por ello puede decirse que el desarrollo ordinario de la misma no se alteró. Los datos que usaremos en esta investigación son las respuestas de dos estudiantes para profesor a los ítems propuestos en la situación 3 del cuestionario (Figura 4), su plan de clase y la transcripción de la implementación de ese plan en un contexto de simulación. De estas transcripciones se han seleccionado unidades de análisis en las que se evidencia el conocimiento especializado de los futuros profesores, identificados en relación con los subdominios y categorías del MTSK. Al citarlas se contempla la numeración completa del fragmento en el que se localizan, aunque no se tome el texto completo (p.ej. PC-Laura, 86-90 significa Plan de clase de Laura, texto tomado entre las líneas 86-90).

De los datos recogidos se hace un análisis de contenido (Bardin, 1996) para identificar unidades de análisis referidas a los subdominios del MTSK, involucrados en la definición de los cuadriláteros. Al respecto, nos apoyamos en investigaciones sobre la definición e imagen de un concepto matemático y sobre la práctica matemática de definir, contempladas en el marco teórico. Así pues, se determinan como aspectos de interés los elementos del MTSK en relación con la definición e imagen conceptual de los cuadriláteros, propiedades y tipos de definición, con predominio de las definiciones jerárquicas o inclusivas. Posterior a esto, se realiza una "interpretación directa de los ejemplos individuales y la suma de ejemplos hasta que se pueda decir algo sobre ellos como conjunto o clase" (Stake, 2007, p. 69).

El análisis, y la posterior comunicación de resultados, inicia con la Situación 3 del cuestionario (Figura 4) puesto que con ella se indaga, a priori, el conocimiento matemático base incluido en el KoT y el conocimiento de la definición como práctica matemática (KPM), en un contexto de enseñanza que precisa de los futuros profesores el reparo en el conocimiento matemático de los hipotéticos estudiantes involucrados en la situación dada (KFLM). Los hallazgos del cuestionario se ven complementados o ampliados al realizar la revisión documental del plan de clase elaborado, como parte de la práctica docente simulada, por los futuros profesores. Finalmente, se realiza la observación de la ejecución de dicho plan. Así, luego de interpretar las evidencias encontradas en cada instrumento y por cada informante, se presenta una mirada integral de los elementos del MTSK evidenciados.

Situación 3: El profesor, en su casa, ha seguido reflexionando sobre el conocimiento que evidenciaron sus alumnos en la clase de "Cuadriláteros" y ha considerado que es necesario hacerles ver los aspectos que determinan que un cuadrilátero sea lo que es. Cree que si tienen claro esto y las propiedades que les atañe a cada uno, podrán establecer relaciones entre los distintos cuadriláteros y luego clasificarlos.

Si usted fuese aquel profesor:

1. ¿Qué aspectos o elementos les señalaría a los alumnos como determinantes en la concepción de cada cuadrilátero? ¿En qué deberían fijarse sus alumnos para diferenciar cada cuadrilátero?
2. Si ahora tuviera que señalar las propiedades que son **necesarias para determinar y luego definir** cada cuadrilátero ¿Cuáles enunciaría?

Cuadrilátero	Propiedades que lo definen

3. Si usted quisiera mostrar las relaciones entre los distintos cuadriláteros que están estudiando y para ello necesita jerarquizar estos, identificando primero el cuadrilátero más general ¿A cuál elegiría, qué cuadrilátero es el que menos propiedades añadidas tiene? Escriba su nombre y defínalo.

   Si le sirve de ayuda piense en el siguiente **ejemplo**: *se podría decir que un cuadrado es un cuadrilátero con condiciones añadidas a las del rombo, puesto que, además de ser paralelogramo con 4 lados iguales, tiene sus cuatro ángulos iguales, de este modo el rombo es una clase más general que el cuadrado.*
4. ¿Cómo organizaría los cuadriláteros convexos si empieza por el más general de estos (ítem 3), hasta llegar al más particular (el que más propiedades añadidas tiene)? Muestre esta organización en un esquema y luego explique por qué los ha organizado de esa manera. **Recuerde que debe empezar por el más general hasta llegar al más particular.**
5. Después de haber organizado los cuadriláteros en un esquema, deberá definir cada uno, cuidando la coherencia con el esquema realizado, esto es, definiendo el más particular en función del cuadrilátero inmediatamente anterior.
6. Para continuar la reflexión sobre las relaciones entre los distintos cuadriláteros, el profesor formula a sus alumnos las siguientes proposiciones, pidiéndoles que indiquen si son verdaderas o falsas y que justifiquen verbal, y gráficamente **si es necesario**, cada una de sus respuestas. ¿Qué respondería usted a cada afirmación?
   a) Todos los cuadriláteros son trapezoides ( )
   b) Todo paralelogramo es un rombo ( )
   c) Algunos cuadrados son trapecios ( )
   d) Todo rectángulo es un paralelogramo ( )
   e) Algunos rombos son cuadrados ( )
   f) Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados ( )

Figura 4. Situación 3 del cuestionario

RESULTADOS

Los resultados se muestran a partir de las especificidades sobre el conocimiento especializado reconocidas en cada uno de los casos analizados.

Conocimiento especializado de Laura

Laura es una estudiante con rendimiento académico medio alto. Cursa la asignatura por segunda vez. Tiene una actitud crítica respecto de su propio conocimiento y eso le lleva a hacer los cambios que cree conveniente.

Respuestas de Laura en el cuestionario

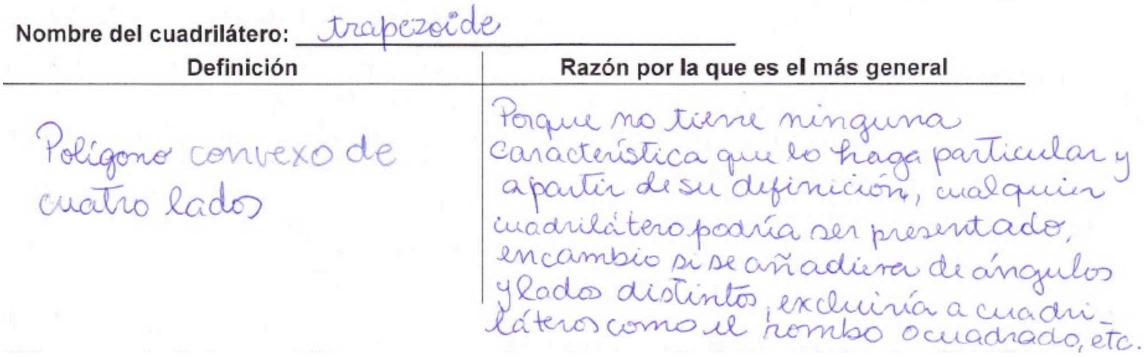
Laura diferencia los cuadriláteros en tres grupos: Paralelogramos, trapecios y trapezoides. En tal sentido, señala al paralelismo, la medida de los lados y la medida de los ángulos como aspectos determinantes en la concepción de cada cuadrilátero (KoT) y en torno a dichos aspectos enuncia propiedades para definirlos, sin reparar en su necesidad o suficiencia (KPM) (ver por ejemplo las definiciones inapropiadas según su corrección, mostradas en la Figura 3). Parece considerar la jerarquía (Shir y Zaslavsky, 2001) como un criterio para definir (KPM). Así, a los tres grupos diferenciados (paralelogramos, trapecios y trapezoides) asocia el concepto "cuadrilátero" y al romboide, rectángulo, rombo y cuadrado asocia "paralelogramos". A su vez, las propiedades explicitadas tienen un propósito excluyente (Figura 5).

Paralelogramo	- cuadrilátero - los dos pares de lados opuestos son paralelos.
Romboide	- paralelogramo - sus lados opuestos tienen la misma medida. - ángulos opuestos miden igual y ninguno es recto - ángulos consecutivos son de medida diferente

Figura 5. Propiedades necesarias señaladas en el cuestionario (ítem 2)

Lo anterior evidencia conocimiento de definiciones jerárquicas y particionales que le permite a Laura, por un lado, identificar al trapezoide como el cuadrilátero más general y considerar que la añadidura de características excluiría cuadriláteros (Figura 6).

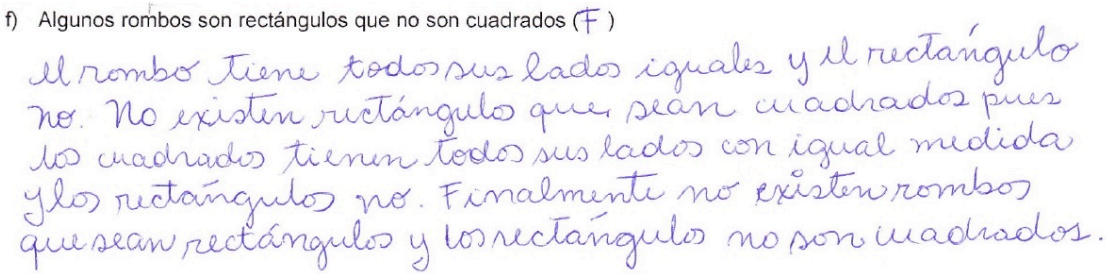
Laura restringe los trapezoides a los cuadriláteros convexos porque en la situación 2 del cuestionario (diálogo sobre la clasificación de dichos cuadriláteros) se ha centrado el interés en estos. De hecho, titula su esquema de clasificación de esa forma y al justificar su decisión evidencia reparo en las formas de interacción de un estudiante con el contenido matemático (KFLM) pues señala que, colocar al trapezoide como primer concepto (de arriba abajo) y luego volver a señalarlo como uno de los tres grupos de cuadriláteros diferenciados puede generar confusión en los estudiantes. De manera complementaria, sostiene que considerar el paralelismo como criterio de clasificación facilita la relación entre los cuadriláteros, evidenciando con esto la relación entre KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos), KFLM (fortalezas y dificultades, interacción con el contenido) y KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).


Nombre del cuadrilátero: trapezoide

Definición	Razón por la que es el más general
Polígono convexo de cuatro lados	Porque no tiene ninguna característica que lo haga particular y apartir de su definición, cualquier cuadrilátero podría ser presentado, encambio si se añadiera de ángulos y lados distintos, excluiría a cuadriláteros como el rombo o cuadrado, etc.

Figura 6. Cuadrilátero más general: definición y justificación (ítem 3)

Todo el conocimiento evidenciado hasta aquí por Laura se mantiene coherente al construir las definiciones de cada cuadrilátero (ítem 5) y la partición vuelve a confirmarse en el análisis que hace sobre las proposiciones que vinculan dos o más cuadriláteros (Figura 7). Así, para Laura, un rombo no puede ser rectángulo, así como los rectángulos tampoco pueden ser cuadrados.


f) Algunos rombos son rectángulos que no son cuadrados (F)

el rombo tiene todos sus lados iguales y el rectángulo no. No existen rectángulo que sean cuadrados pues los cuadrados tienen todos sus lados con igual medida y los rectángulos no. Finalmente no existen rombos que sean rectángulos y los rectángulos no son cuadrados.

Figura 7. Análisis de la proposición f realizada (ítem 6)

En síntesis, las definiciones que construye son descriptivas, apropiadas según su corrección (aunque el listado de propiedades-Figura 5- no se limita a condiciones necesarias y suficientes), rigurosas y en general no mínimas o antieconómicas. Solo en el caso del trapezoide (Figura 6) aporta una definición mínima (si bien está definiendo trapezoides convexos) e inclusiva. Incluso, según las características propuestas por Shir y Zaslavsky (2001), esta definición es jerárquica porque tiene como referencia a un concepto más general (polígono) el cual le dota de existencia. No cae en contradicciones, es inequívoca y no circular, aunque estar referida solo a los trapezoides convexos le genera cierta dependencia en la representación que pueda emplearse.

Plan de clase de Laura y su ejecución

Laura elabora un plan de clase para primero de secundaria (12-13 años) que tiene como referencia predominante la consigna dada por la docente investigadora (

Tabla 1).

De los conceptos o procedimientos indicados, como se aprecia en la Figura 8, puede verse que no diferencia elementos constituyentes (lados, ángulos y vértices) de secundarios (diagonales) tal como corresponde a una definición estructural (Shir y Zaslavsky, 2001).

II. APRENDIZAJE ESPERADO

CONCEPTOS O PROCEDIMIENTOS	CAPACIDAD
Cuadriláteros: Polígono de cuatro lados. Sus elementos son: Lados, ángulos, vértices y diagonales. Características de cada cuadrilátero. Clasificación tradicional de cuadriláteros. Clasificación inclusiva de cuadriláteros. (Anexo N° 01)	- Identifica los cuadriláteros. - Clasifica los cuadriláteros. - Reconoce las características de cada cuadrilátero. - Construye una clasificación inclusiva de cuadriláteros teniendo en cuenta sus características.
ACTITUD	Participa en clase prestando atención, respondiendo las preguntas que se le plantea o cuestionando el conocimiento dado.

Figura 8. Aprendizaje esperado propuesto por Laura en su plan de clase

Pero si analizamos las características propuestas por los autores citados, la definición muestra cierta jerarquía al asociar los cuadriláteros con los polígonos (concepto más general), es existente, no circular ni contradictoria y es inequívoca e independiente de la representación utilizada. Esta última cualidad se confirma por las figuras de cuadriláteros que propone, al iniciar la sesión de clase, para desarrollar una clasificación tradicional y luego una inclusiva, a partir del agrupamiento de dichos cuadriláteros, según características comunes.

Así, en la Figura 9, Laura ha contemplado una variedad de cuadriláteros (de lados cruzados y no cruzados, convexos y cóncavos, en posiciones no estándar-la base no paralela a la horizontal- en su mayoría y en algunos casos -3 y 11, 4 y 5- visualmente parecidos lo que obliga a usar herramientas de medición) que hacen pensar en la posesión de una imagen conceptual rica y variada que posibilita la construcción de definiciones matemáticas acordes a dichas representaciones (KoT – definiciones, propiedades y sus fundamentos).

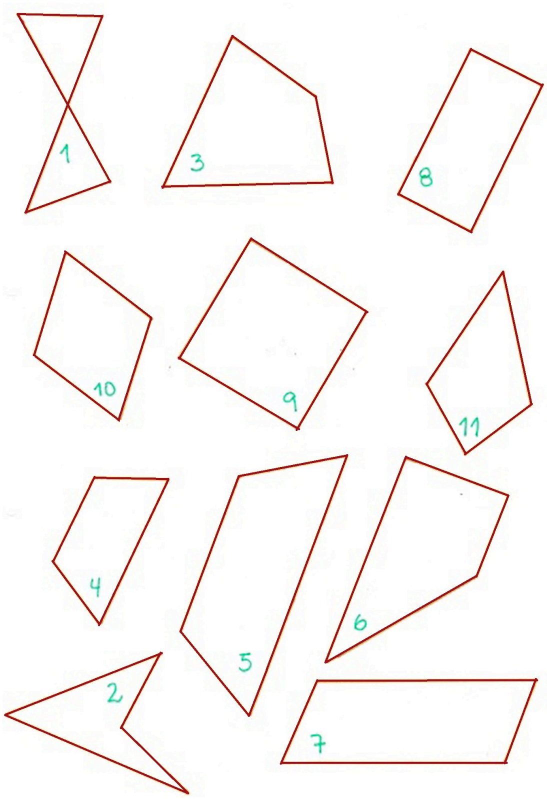


Figura 9. Cuadriláteros dados para análisis y clasificación (PC-Laura, anexo 2)

Tal como se indica en el aprendizaje esperado (Figura 8), Laura inicia su clase con la clasificación que denomina tradicional, lo que da evidencia de su conocimiento del tema (coherente con lo realizado al completar el cuestionario) y de las expectativas de aprendizaje del currículo peruano (KMLS) puesto que, al desarrollar su clase señala (SC-Laura, 86-90):

Laura: Entonces una clasificación, vamos a decir así, común que se ve durante los cursos de matemática de primaria es esta: los cuadriláteros se clasifican según el criterio que es el paralelismo de los lados, en cuántos lados paralelos tiene, si tiene uno se llama trapecio, si tienen dos se llaman paralelogramos y si no tienen ningún lado se llaman trapezoide.

Si bien la consigna dada por la docente-formadora tiene su foco en la clasificación inclusiva, no en la definición (

Tabla 1), la relación de interdependencia que hay entre estas dos prácticas matemáticas (de Villiers, Govender y Pattersn, 2009) obliga a que Laura cuestione a sus estudiantes sobre las características que determinan cada cuadrilátero, lo cual también es requisito en la construcción de definiciones matemáticas. Por ejemplo (SC-Laura, 277-301):

Laura: (…) Dentro de todos estos cuadriláteros de los que hemos visto las características […] ¿Cuál es el más general, el que tiene menos características?

Sandra: El romboide.

Laura: El romboide […] ¿De acuerdo?

Diana: El trapezoide

Laura: El trapezoide, ¿por qué el trapezoide y no el romboide?

Diana: Porque no tiene ningún lado paralelo, sus lados no son iguales.

Sandra: No tiene nada (risas de todos).

Laura: Simplemente es un cuadrilátero ¿Ok? Ahora, de los trapezoides nosotros vimos dos tipos ¿sí?: el trapezoide simétrico y el asimétrico ¿Cuál de los dos es el que tiene menos características?

Sandra: Asimétrico.

Laura: El asimétrico porque en el simétrico vemos que las diagonales se cortan perpendicularmente, que tiene dos lados iguales, dos pares de lados iguales, entonces, nosotros vamos a ver dentro de todos los trapezoides es el más general ¿sí? ¿Qué figura sigue?

Todos: El simétrico.

Laura: ¿Sí? ¿Seguros? El trapezoide simétrico. En sus carpetas les he dejado unas reglas. Lo que van a hacer es unir las reglas formando cuadriláteros, formen un trapezoide. Tienen diferentes medidas y estos chinches que se abren por la parte de atrás; ahora si lo van haciendo en la mesa y van formando con las reglas de cartulina… A ver chicos un trapezoide asimétrico.

Del diálogo puede verse, por un lado, aquella relación de interdependencia entre clasificación y definición que le lleva a identificar el cuadrilátero que menos características tiene y a enunciar un listado de todas las que se conocen, sin reparar en la necesidad y suficiencia de estas. Por lo tanto, se promovería definiciones descriptivas y antieconómicas, correspondiente con el nivel 2 de Van Hiele (de Villiers, 1998). Por otro lado, se visualiza que el desempeño docente de Laura se apoya en el uso de dos tipos de representaciones de los cuadriláteros para su enseñanza, uno estático al presentar figuras de cuadriláteros (Figura 9), y otro dinámico al proponer la construcción de cuadriláteros a partir de tiras de cartulina cuya longitud y posición se va variando convenientemente (Recursos materiales y virtuales; estrategias, técnicas, tareas y ejemplos-KMT). Esto último lleva a pensar en una especie de definición procedimental que orienta una clasificación jerárquica, del cuadrilátero más general al más particular.

Conocimiento especializado de Samuel

Samuel es un estudiante con buen rendimiento académico, cursa la asignatura por primera vez y muestra una actitud abierta cuando se le cuestiona algo. Sin embargo, no siempre responde evidenciando seguridad y corrección.

Respuestas de Samuel en el cuestionario

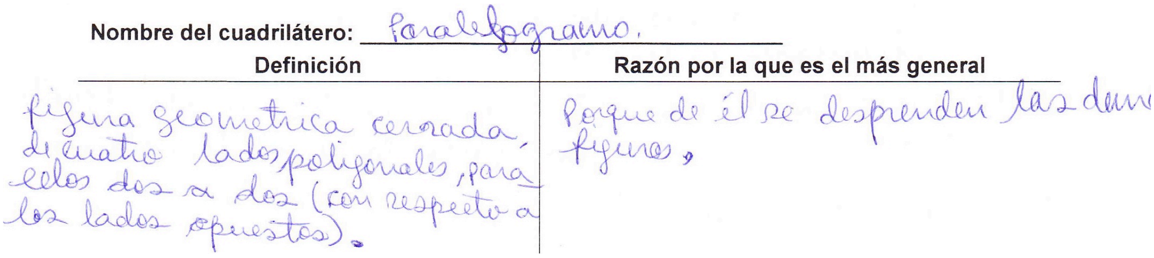
Samuel se enfoca en cuatro aspectos como propiedades que definen cada cuadrilátero: medida de los ángulos, paralelismo de los lados, medida de las diagonales y medida de los lados (Definiciones, propiedades y sus fundamentos-KoT) (Tabla 2). Además, considera la formación de triángulos congruentes a partir del trazado de diagonales. Esto también se observa cuando se refiere al rectángulo y cuadrado.

Tabla 2

Propiedades necesarias señaladas por Samuel en el cuestionario (ítem 2)

Cuadrilátero	Propiedades que lo definen
Paralelogramo	Los ángulos opuestos son siempre iguales/ no son rectos. Sus lados son paralelos (dos a dos). La diagonal determina triángulos congruentes no rectángulos.
Romboide	Los ángulos opuestos son siempre iguales/no son rectos. Las diagonales son distintas. Sus lados son paralelos (dos a dos). La diagonal determina.
Rombo	Los lados son iguales/ (sus ángulos no necesariamente son rectos). Presenta una diagonal mayor y una diagonal menor. La diagonal mayor determina triángulos congruentes/ no rectángulos.

La consideración de las propiedades anteriores deja ver la falta de reparo en las características necesarias y suficientes para definir (KPM). Llama la atención la similitud de propiedades tanto para el paralelogramo como para el romboide, sin diferenciar a alguno de ellos como clase que contiene al otro (aunque quizás lo pretendiera al incluir en el romboide que sus diagonales son distintas). También, se observa una postura excluyente puesto que ninguno de los dos incluiría al rectángulo o cuadrado (KoT). Se generan ciertas contradicciones al identificar al cuadrilátero más general, pues señala al paralelogramo como tal (Figura 10) y luego, al organizar los cuadriláteros convexos, reduce estos al rectángulo, cuadrado y rombo como elementos de la clase "paralelogramos" (Figura 11), pese a que en la justificación de dicha organización señala que "el paralelogramo comprende todos los cuadriláteros dado que de él se desprende el rectángulo, cuadrado, rombo, trapecio, romboide".


Nombre del cuadrilátero: Paralelogramo.

Definición	Razón por la que es el más general
figura geometrica cerrada, de cuatro lados poligonales, paralelos dos a dos (con respecto a los lados opuestos).	Porque de él se desprenden las dem figuras,

Figura 10. Cuadrilátero más general: definición y justificación (ítem 3)

La definición construida de paralelogramo (Figura 10) pone en evidencia un confuso conocimiento de conceptos y propiedades (KoT).

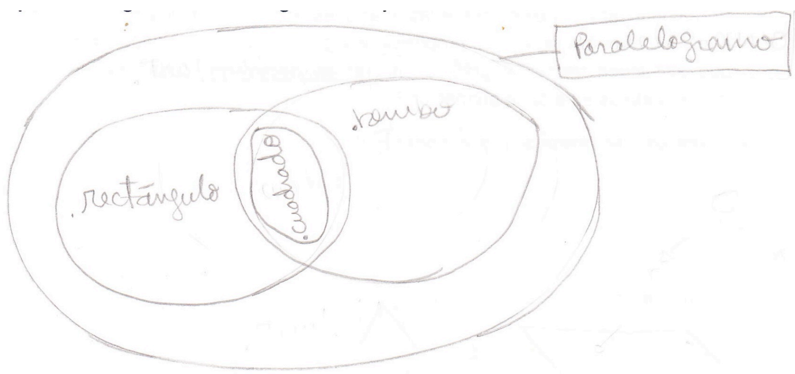


Figura 11. Organización de los cuadriláteros convexos (ítem 4)

Si analizamos las cualidades de una definición matemática (Shir y Zaslavsky, 2001) puede decirse que hay cierta jerarquía al asociar paralelogramo a un concepto más general (aunque no el inmediatamente superior) como “figura geométrica”, lo cual le dota, a la vez, de existencia, siempre que esta no se reduzca a representación gráfica. También es no contradictoria, sin embargo, al señalar “lados poligonales” puede caerse en la circularidad porque los lados son inherentes a los polígonos. Luego, decir “paralelos dos a dos (con respecto a los lados opuestos)” no solo remarca la circularidad sino también lleva a equivocación porque el paralelismo solo es posible en lados opuestos. La acotación que Samuel hace puede ser consecuencia de una imagen conceptual prototípica de paralelogramo, lo cual evidenciaría una falta de independencia de la figura, respecto del enunciado verbal, y una limitada representación gráfica de dicho cuadrilátero (limitado registro de representación gráfico; así como de definiciones, propiedades y fundamentos-KoT y de condiciones necesarias y suficientes para genera definiciones-KPM) y el predominio de dicha imagen conceptual sobre la definición conceptual de cada cuadrilátero. De allí que justifique su elección del cuadrilátero más general en función de las “figuras” que están contenidas en los paralelogramos (Figura 10) y que sus argumentos para valorar las proposiciones que relacionan dos o más cuadriláteros (ítem 6) sean gráficos con posiciones estándar o prototípicas (Figura 12).

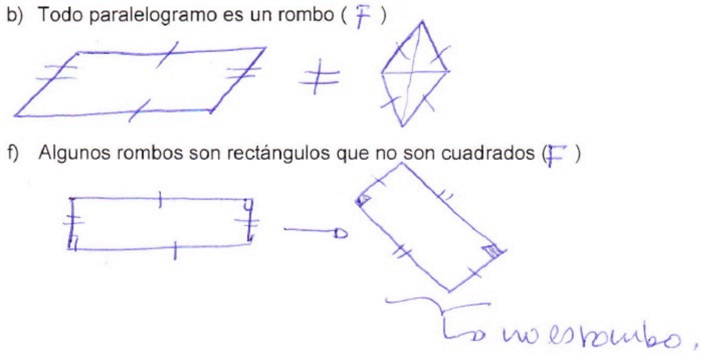


Figura 12. Análisis de las proposiciones (b) y (f) realizada por Samuel (Ítem 6)

Las características de la definición comentadas en el párrafo anterior se mantienen en las definiciones que construye Samuel, a partir de su esquema de organización (Figura 11). Según esto, en la Figura 13 se observa que la jerarquía se circunscribe al concepto "cuadrilátero" en lugar de "paralelogramo", pese a esto, la definición es existente porque tanto cuadrilátero y paralelogramo son conceptos definidos. Sin embargo, equiparar romboide y paralelogramo genera cierta circularidad. También se cae en contradicción al sostener que el rombo es un caso particular de cuadrado, y se ve la influencia de la representación gráfica al acotar que el rectángulo "presenta un lado mayor que el otro".

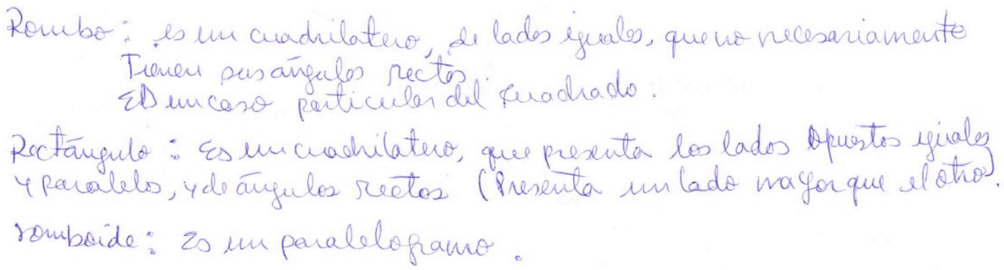

Rombo: es un cuadrilatero, de lados iguales, que no necesariamente Tienen sus ángulos rectos. Es un caso particular del cuadrado.
Rectángulo: Es un cuadrilatero, que presenta los lados opuestos iguales y paralelos, y de ángulos rectos (Presenta un lado mayor que el otro).
romboide: es un paralelogramo.

Figura 13. Definiciones de la clase paralelogramos construidas (ítem 5)

Plan de clase de Samuel y su ejecución

Si bien la consigna dada a Samuel era elaborar una clasificación inclusiva de los cuadriláteros, también representarla en un esquema y definir los cuadriláteros de acuerdo a este esquema (

Tabla 1), los aprendizajes esperados que propone en su plan de clase se enfocan en una clasificación convencional donde los ángulos internos y la medida de los lados son los criterios de clasificación (Figura 14). La inclusión solo puede verse, de cierta manera, en la clase "paralelogramo" en la que considera al rectángulo, rombo y cuadrado. Llama la atención que no mencione al romboide, pese a que sí lo hizo en el cuestionario (aunque casi como sinónimo del paralelogramo) y finalizando la ejecución de su sesión.

II. APRENDIZAJES ESPERADOS:

CONCEPTOS	CAPACIDADES
✓ **Cuadrilátero convexo:** Es el cuadrilátero cuyos ángulos internos miden menos de 180º. ✓ **Cuadrilátero cóncavo:** Es un cuadrilátero que posee un ángulo interno mayor de 180º. ✓ **Paralelogramo:** Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. • **Rectángulo:** Es un paralelogramo que tiene dos pares de lados paralelos y sus ángulos internos son rectos. • **Rombo:** Es un paralelogramo que tiene sus lados iguales. • **Cuadrado:** Es un paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos y de igual lados. ✓ **Trapecio:** Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. ✓ **Trapezoide:** Es un cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.	✓ Clasifica los cuadriláteros en función de sus ángulos internos y de la medida de sus lados. ✓ Diferencia los cuadriláteros según sus características o propiedades. ✓ Analiza diversas situaciones sobre cuadriláteros.

Figura 14. Aprendizajes esperados propuestos por Samuel en su plan de clase

Respecto de lo anterior, en el desarrollo de su sesión, Samuel considera la medida de los ángulos para diferenciar cuadriláteros convexos y cóncavos, pero en lugar de las medidas de los lados, se refiere al paralelismo de estos. Según este criterio, diferencia los tres grupos convencionales señalados en los aprendizajes esperados (paralelogramos, trapecios y trapezoides) y es sobre los cuadriláteros que asocia a cada grupo, que desarrolla definiciones inclusivas. Así, inicia el análisis de los paralelogramos como clase que integra al rectángulo, rombo y cuadrado (en ese orden) y cuya relación se visualiza en un esquema realizado por un estudiante (César), haciendo uso de diagramas de Venn, tal como Samuel le había indicado (Figura 15).

Figura 15. Clasificación de los cuadriláteros (PC-Samuel, 500-509)

El establecimiento del esquema anterior se logró luego de que Samuel promoviera la definición del paralelogramo como clase y de los cuadriláteros que en ella se incluyen. Como puede verse en los siguientes extractos de la sesión (SC-Samuel, 248-439), las definiciones son totalmente distintas a las dadas en la tabla de aprendizajes esperados (Figura 14).

Samuel: […] un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales. […]. Entonces un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son iguales. […] dentro de los paralelogramos encontramos a tres cuadriláteros […] que son los rectángulos, el rombo y el cuadrado. […] Un rectángulo es un paralelogramo que tiene un ángulo recto. […] un rombo es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos congruentes. […] ahora vamos a ver lo qué es un cuadrado […] A ver, dígame César, los lados de este, de este cuadrado, ¿son paralelos?

César: Sí

Samuel: Ya. ¿Presenta ángulos rectos?

César: Sí

Samuel: Ya. ¿Los lados son iguales?

César: También

Samuel: Entonces, […] ¿Cumple la propiedad el cuadrado de tener un ángulo recto?

Laura: Sí

Samuel: Sí, ¿de acuerdo?

El diálogo continúa llevando a los supuestos alumnos a que un cuadrado es también un rombo, así como es un rectángulo, y concluyendo que un cuadrado es "un paralelogramo que tiene un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes", evidenciándose un claro propósito inclusivo. Estas definiciones muestran condiciones necesarias y suficientes, guardan jerarquía, son existentes, no circulares ni contradictorias, son inequívocas e independientes de la representación o figura. En las definiciones consignadas en los aprendizajes esperados, como se muestra en la Figura 14, se nota jerarquía (al referirse a cuadrilátero o paralelogramo) y circularidad al definir rectángulo (paralelogramo con pares de lados paralelos). Prima una intención particional pues Samuel enuncia características que impiden establecer relaciones entre cuadriláteros, cosa que no ocurre en el desarrollo de la sesión.

Tal como hizo en el cuestionario, recurre a los objetos del entorno para identificar cuadriláteros (Fenomenología y aplicaciones-KoT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos-KMT). De este modo, les propone una lámina (Figura 16) para que reconozcan en ella todos los cuadriláteros posibles.

Figura 16. Lámina propuesta para identificar cuadriláteros en objetos del entorno (SC-Samuel, 84-101)

La Figura 16 da luces de las imágenes conceptuales que posee Samuel respecto de los cuadriláteros. Si bien la posición prototípica de los objetos puede responder a su ubicación en el entorno, tanto estos como el anexo propuesto en su plan de clase (Figura 17) evidencian la influencia de imágenes convencionales, caracterizadas por alineación horizontal o apoyadas sobre uno de sus vértices.

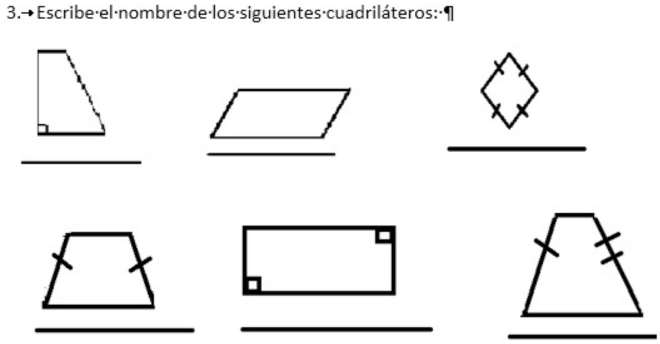


Figura 17. Imágenes de cuadriláteros propuestos para consolidar los tipos de cuadriláteros (PC-Samuel)

A pesar del uso de representaciones gráficas prototípicas y del rol que se le atribuya a la posición de estas, Samuel cuestiona este aspecto y parece tener claro que la posición no determina el tipo de cuadrilátero, sin embargo, puede ser un elemento definitorio para los alumnos (KFLM):

Samuel: […] Ustedes creen si yo a esta figura la giro y la pongo de tal manera que AD quede sobre la base horizontal seguirá siendo rombo o no. […]

Laura: No

Samuel: ¿Por qué?

Laura: Porque es un cuadrado […]

Samuel: Ya, pero necesariamente ¿todo rombo siempre es un cuadrado? Eso lo vamos a ver en unas situaciones que ustedes mismos lo van a deducir, pero la idea es que, si esta figura le doy ese giro, ¿seguirá siendo rombo? (SC-Samuel, 355-385)

Discusión y conclusiones

Como hemos puesto de manifiesto, el conocimiento especializado de los dos estudiantes para profesor sobre los cuadriláteros muestra claras diferencias. En el conocimiento mostrado por Laura se evidencia el peso de características convencionales para caracterizar cuadriláteros (paralelismo e igualdad de lados y ángulos) y de definiciones excluyentes. Sin embargo, da muestras de comprender las clasificaciones inclusivas, y de saber definir en esos términos, sobre todo en el plan de clase y su ejecución. Esto parece sustentarse en su conocimiento de las propiedades de distintos tipos de cuadriláteros y en una imagen conceptual de los mismos con cierta riqueza. Muestra haber reflexionado sobre algunos aspectos del aprendizaje de los alumnos en relación con el contenido, incluyendo la posible dificultad de las definiciones inclusivas, y parece ser consciente de la importancia de la variedad en las representaciones gráficas que se aportan a los alumnos sobre cuadriláteros, lo que le lleva a elegir, además de representaciones gráficas estáticas, un recurso dinámico. Si bien considera definiciones antieconómicas, en general son correctas, rigurosas, no circulares, ni contradictorias, inequívocas e independientes de la representación. Parece reconocer la jerarquía en una definición y las definiciones son descriptivas. En su plan de clase se observa la influencia de su conocimiento sobre el currículum nacional en relación con los cuadriláteros en secundaria.

Por su parte, Samuel no solo contempla características convencionales al caracterizar los cuadriláteros, sino que, al paralelismo y a la medida de lados y de ángulos, añade la medida de las diagonales y como consecuencia de su intersección, la formación de triángulos congruentes. Pese a esto, las definiciones que construye en el cuestionario y en el plan de clase se caracterizan por un criterio excluyente o particional, por un escaso reparo en características necesarias y suficientes, y por una marcada influencia de representaciones gráficas prototipo que evidencia el predominio de la imagen conceptual sobre la definición. La perspectiva gráfica se extiende al uso de imágenes cotidianas de cuatro lados en el desarrollo de la sesión de clase. En esta, contrariamente a lo señalado en el cuestionario y el plan de clase, se observa el desarrollo de definiciones inclusivas para los cuadriláteros de la clase paralelogramos. Estas definiciones guardan correspondencia con el esquema de clasificación, previamente construido, sobre los paralelogramos y se caracterizan por contener condiciones necesarias y suficientes, ser inclusivas, existentes, no circulares ni contradictorias, inequívocas e independientes de las representaciones gráficas. Este cambio, respecto del desarrollo del cuestionario y el plan de clase, da indicios de un proceso reflexivo que le permite a Samuel reestructurar el conocimiento que posee en torno a los cuadriláteros.

El conocimiento de definiciones, propiedades y fundamentos (KoT) se evidencia más completo en el cuestionario resuelto por Laura que en el de Samuel. Así, mientras Laura diferencia tres grupos de cuadriláteros (paralelogramos, trapecios y trapezoides), Samuel se limita a los paralelogramos. Dicha diferenciación y la identificación de propiedades de los cuadriláteros se basa, en ambos casos, en aspectos convencionales como la medida de los ángulos, el paralelismo de los lados y la medida de estos. Sin embargo, Samuel añade un cuarto aspecto que resulta menos convencional que los anteriores: la medida de las diagonales, lo cual propicia cierta riqueza en las definiciones que puedan construirse en torno a este aspecto (Zazkis y Leikin, 2008).

La identificación de propiedades necesarias para definir cada cuadrilátero (KoT y KPM) pone en evidencia, en ambos casos, el escaso reparo en condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones y también, en el caso de Laura, la consideración de niveles de jerarquía (Shir y Zaslavsky, 2001) y de perspectivas particionales que le permiten identificar al trapezoide como el cuadrilátero más general, asociar a cada uno de los tres grupos de cuadriláteros diferenciados los que le corresponden (partiendo del concepto inmediatamente superior: paralelogramo-cuadrilátero, romboide-paralelogramo), organizar los cuadriláteros en un esquema (aunque sin interrelacionar los tres grupos), definir según este todos los cuadriláteros considerados y atribuir un valor de verdad a las proposiciones que relacionan dos o más cuadriláteros manteniendo una postura excluyente. Por su parte, Samuel evidencia, predominantemente, una postura excluyente al enunciar las propiedades necesarias para definir cada cuadrilátero, confusión al jerarquizar estos (puesto que identifica como cuadrilátero general al paralelogramo) y uso de representaciones gráficas prototípicas para argumentar el valor de verdad de las proposiciones que relacionan dos o más cuadriláteros.

Pese al escaso reparo en condiciones de necesidad y suficiencia al definir de ambos informantes (KPM), Laura proporciona una definición de trapezoide jerárquica, existente, no circular, inequívoca e independiente de la representación (KPM). De las demás definiciones puede decirse, en general, que gozan de integridad (Chinnappan y Lawson, 2005) aunque resultan inapropiadas según la corrección (Zazkis y Leikin, 2008), son descriptivas, no económicas, y jerárquicas, pero también particionales (de Villiers, Govender y Patterson, 2009). Por su parte, Samuel proporciona una definición de paralelogramo que se caracteriza por evidenciar cierta jerarquía, existencia y no contradicción, pero sí circularidad, equivocidad y dependencia de representaciones gráficas prototípicas (KPM). En general, Samuel proporciona definiciones con cierta integridad debido a que no siempre son correctas (Chinnappan y Lawson, 2005), esto lleva a calificarlas como inapropiadas, tanto por su corrección como por la riqueza (Zazkis y Leikin, 2008), descriptivas, visuales y no económicas, y particionales (de Villiers, Govender y Patterson, 2009).

Sobre la imagen conceptual de cuadrilátero (KoT) diremos que Laura posee imágenes más ricas y variadas, no solo por contemplar cuadriláteros simples sino también de lados cruzados (complejos), así como cóncavos y convexos. Además, las representaciones propuestas no se reducen a posiciones prototípicas como sí ocurre con Samuel (KMT). En el caso de este último, son representaciones convexas prototípicas (Herskowitz, 1990), caracterizadas por una posición horizontal o apoyadas en un vértice, tal como convencionalmente se muestra en los libros de texto.

El conocimiento base evidenciado en el cuestionario (C) se amplía en ambos casos en el desarrollo del plan de clase (PC) y su ejecución (SC), posiblemente porque, pese a que su rol docente sigue siendo simulado, les demanda la movilización de otros conocimientos como, por ejemplo, los comprendidos en el dominio didáctico del contenido.

Así, en el caso de Laura se observa la consideración de dos clasificaciones: una convencional (particional) y otra inclusiva (jerárquica), que ponen en evidencia un conocimiento de los temas (KoT) más amplio y ligado al desarrollo curricular, en cuanto a expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual y secuenciación de los temas (KMLS), puesto que toma como referencia la propuesta de libros de texto de los dos grados de primaria anteriores al que se planifica la sesión. También emerge la variedad de las imágenes conceptuales que posee de los distintos cuadriláteros, lo cual le permite usar dos tipos de representación de los cuadriláteros para su enseñanza: una estática (lámina con dibujos de cuadriláteros) y otra dinámica (tiras de cartulina para construir cuadriláteros), que se constituyen en recursos y estrategias de enseñanza (KMT). Además, el uso del recurso dinámico se vincula, de cierta forma, a las definiciones procesuales (Shir y Zaslavsky, 2001) que orientan una clasificación jerárquica, del cuadrilátero más general al más particular. En el caso de Samuel, el uso de los cuadriláteros en el entorno (KoT-KMT) es el detonante para iniciar el estudio de este tema. Sin embargo, la lámina empleada (Figura 16) da luces de las imágenes mentales que posee de los cuadriláteros, y de un conocimiento de estos marcado por la convexidad y convencionalismo (KoT), que le impide integrar en un esquema los tres grupos de cuadriláteros (diferenciados según el paralelismo de sus lados) para limitarse solo a los paralelogramos. Esto justifica, de cierta manera, que las definiciones dadas posean un carácter particional.

En el conocimiento especializado de ambos futuros profesores se observa la fuerte influencia de las características convencionales para definir los distintos tipos de cuadriláteros (KoT), la fuerza de las definiciones particionales y la consideración de definiciones no económicas. Si bien los futuros profesores dan muestras de comprender definiciones inclusivas, sobre todo en situaciones de enseñanza, tienen dificultades para realizarlas. La futura profesora que muestra menos problemas con las definiciones inclusivas, muestra también imágenes conceptuales más ricas, menos prototípicas y más diversas, probablemente como consecuencia de un conocimiento más íntegro y conectado (Chinnappan y Lawson, 2005) que parece redundar en el conocimiento sobre cómo los alumnos de Primaria comprenden este contenido (KFLM) y en las estrategias y recursos que pueden emplearse para su enseñanza (KMT), lo cual corrobora la asociación entre el conocimiento de la materia y el conocimiento didáctico del contenido (Murphy, 2012). De las propiedades de una definición matemática la jerarquía, existencia y no contradicción son las más presentes en las definiciones que enuncian los futuros profesores; además, todas las definiciones son descriptivas.

El trabajo presentado confirma la necesidad de trabajar la definición como práctica matemática en la formación inicial de profesores puesto que permite movilizar distintas dimensiones de conocimiento especializado, sustentado en un conocimiento base imprescindible. A su vez, atender esta necesidad, requiere de la complementariedad metodológica que sitúe a los futuros profesores en distintos escenarios de actuación (Carreño, Climent y Flores, 2017), de tal forma que se cuestione, amplíe y profundice el conocimiento requerido para la enseñanza. Por otro lado, se hace evidente la necesidad de visualizar la interacción entre las prácticas matemáticas definir y clasificar, en los escenarios abordados en este trabajo u en otros escenarios que puedan generarse en la formación inicial o continua.

Los resultados de este estudio apoyan la importancia de trabajar en la formación de profesores clasificaciones de figuras geométricas con criterios no convencionales, y la definición de las clases resultantes. Además, evidencia la necesidad de incidir más en la reflexión tanto matemática como didáctica sobre clasificaciones inclusivas, lo que conlleva la exploración de propiedades y relaciones entre estas. La importancia de un conocimiento matemático sólido del concepto geométrico, en este caso cuadrilátero, tanto en relación con su definición como con su imagen conceptual, como base para una reflexión didáctica, ha sido puesto de manifiesto, asimismo.

Finalmente, el análisis de definiciones por parte de profesores o futuros profesores se muestra una actividad que permite tanto reflexionar sobre las características matemáticas de una definición, como sobre la importancia de estas características en un contexto escolar. En general, el abordaje de la definición como práctica matemática, supone una oportunidad para identificar aspectos conceptuales y didácticos que requieren atención y, en consecuencia, reorientar los planes de estudio de asignaturas específicas o incluso de la estructura formativa.

Referencias

Aslan-Tutak, F. y Adams, T. (2015). A Study of Geometry Content Knowledge of Elementary Preservice Teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education, 7*(3), 301-318.

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido.* Madrid, España: Akal.

Carreño, E., Climent, N. y Flores, E. (2017). Conocimiento geométrico especializado de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria al cursar la asignatura práctica profesional. Una reflexión sobre el plan de clase y su desarrollo. *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. CB-1279* (pp. 274-284). Madrid, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. HaseR, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 185-206.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasci, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathemtics Education, 20*(3), 236-253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981.

Chinnappan, M. y Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 197-221.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Oliver, y K. Newstead (Ed.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psichology of Mathematics Education. 2* (pp. 248-255). University of Stellenbosch, Sudáfrica: Stenllenbosch.

De Villiers, M., Govender, R. y Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. En T. Craine, y R. Rubinstein (Eds.), *Understanding Geometry for a Changing World* (pp. 189-203). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Flores, E., Escudero, D. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3055-3064). Ankara, Turquía: Middle East Technical University Education.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1999). Preservice primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(3), 253-275.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning of Geometry. En P. Nesher, y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Mariotti, M. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 2019-248.

Murphy, C. (2012). The role of subject knowledge in primary prospective teachers' approaches to teaching the topic of area. *Journal of mathematics teacher education, 15*, 187-206.

Shir, K. y Zaslavsky, O. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of square. M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 161-168). Utrecht, Netherlands: Utrecht Freudenthal Institute, Faculty of Mathematics and Computer Science, Utrecht University.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *American Educational ResearchAssociation, 15*(2), 4-14.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An

ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education, 48*(5), 691-719. doi:10.1007/s11858-016-0796-6

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4ª ed.). (R. Filella, Trad.). Madrid, España: Morata.

Steele, M. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal Mathematics Teacher Education, 16*, 245-268.

Ülger, T. K. y Tapan-Broutin, M. S. (2017). Pre-service mathematics teachers' understanding quadrilaterals and the internal relatinships between quadrilaterals: The case of parallelograms. *European journal of Educational Research, 6*(3), 331-345.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlans: Kluwer Academic Publishers.

Winicki-Ladman, G. y Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions I. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17-21.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 15-21.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

Emma Carreño
Universidad de Piura
emma.carreno@udep.pe

Nuria Climent
Universidad de Huelva
climent@uhu.es

Recibido: 15/04/2019. Aceptado: 27/07/2019
doi: 10.30827/pna.v14i1.9265

ISSN: 1887-3987