PROCESOS DE OBJETIVACIÓN ALREDEDOR DE LAS IDEAS GEOMÉTRICAS EN LA ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA

Ivonne C. Sánchez y Juan Luis Prieto G.

En líneas generales, la investigación se centra en el aprendizaje geométrico manifestado por un alumno cuando comunica a dos profesores la técnica de construcción de un semicírculo con GeoGebra. Desde una perspectiva histórico-cultural, dicho aprendizaje es analizado en atención a los procesos de objetivación de saberes geométricos que tuvieron lugar durante la comunicación de la técnica, empleando para ello un análisis multi-semiótico. Los resultados destacan algunos aspectos de los procesos de objetivación evidenciados en el análisis, tales como la actividad semiótica desplegada, la actuación de los profesores y los problemas surgidos a lo largo de la comunicación de la técnica.

Términos clave: Análisis multi-semiótico; Aprendizaje geométrico; Comunicación de una técnica de construcción; GeoGebra; Procesos de objetivación

Processes of Objectification Around Geometric Ideas in the Production of Simulators with Geogebra

In general, the research focuses on the geometric learning revealed by a student who communicates to two teachers the technique of constructing a semicircle with GeoGebra. From a historical-cultural perspective, this learning is analysed in response to the processes of objectification of geometric knowledge that took place during the communication of the technique, using a multi-semiotic analysis. The results highlight some aspects of the processes of the objectification evidenced in the analysis, such as the semiotic activity deployed, the performance of the teachers and the problems that arise during the communication of the technique.

Keywords: Communication of the construction; GeoGebra; Geometric learning; Multi-semiotic analysis; Processes of objectivation; Technique

Sánchez, I. C. y Prieto, J. L. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA 14*(1), 55-83.

Debido al impacto que ha tenido la perspectiva cognitiva en el campo de la educación matemática, es por muchos aceptado que el aprendizaje en el alumno está determinado por mecanismos intelectuales de pensamiento y/o razonamiento que garantizan la apropiación del saber escolar. En geometría, por ejemplo, el aprendizaje se ha considerado por mucho tiempo un asunto de construcción de representaciones mentales de los conceptos geométricos a partir de procesos perceptivos y discursivos que se dan en interacción con los dibujos o diagramas de esos conceptos (Duval, 2005; Gutiérrez y Jaime, 2012; Hershkowitz, 1989; Mesquita, 1998; Vinner y Hershkowitz, 1983). Esta visión particular del aprendizaje en matemáticas ha resultado en una educación comprometida con el desarrollo individual de estructuras mentales sofisticadas que ayudan al alumno a pensar de forma correcta ante los problemas que enfrentan en el aula (Radford, 2014a).

En nuestro caso, la influencia de lo cognitivo también ha estado presente en esas primeras aproximaciones que hemos tenido en relación con el aprendizaje de la geometría en experiencias de elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG) (Prieto y Díaz-Urdaneta, 2019). En estos estudios, nuestro interés ha sido develar, en el discurso de los alumnos, las posibles relaciones que ellos establecen entre los aspectos espaciales de los dibujos creados en la ESG y las propiedades teóricas de los objetos geométricos evocados en el discurso. Sin embargo, no pasó mucho tiempo para darnos cuenta de lo poco conveniente que resultaba tratar de reducir el aprendizaje producido en la ESG a las características del lenguaje usado en el dominio de la geometría escolar. Si consideramos que la ESG es una instancia social de encuentro con los saberes escolares y de posicionamiento crítico ante tales saberes, entonces no cabía duda de que debíamos ampliar nuestra visión del aprendizaje en matemáticas, y para ello era importante tomar distancia de la perspectiva cognitiva.

Hacia finales de la década de los ochenta surgen las primeras teorías educativas socioculturales que hacen frente a las contradicciones generadas por una enseñanza guiada por aspectos cognitivos, a través de un replanteamiento de la relación individuo-sociedad que abrió las puertas a nuevas concepciones del pensamiento y el aprendizaje en matemáticas como fenómenos sociales, culturales e históricos (Bartolini-Bussi, 1991; Boero et al., 1995; Lerman, 1992). De esta manera, la perspectiva sociocultural ha animado el debate en relación con el papel que desempeña el trabajo humano en el desarrollo de los modos de producción históricos y culturales del saber matemático. En lo que concierne a la geometría, Sinclair et al. (2016) destacan la emergencia de los aspectos semióticos y encarnados del aprendizaje de la geometría en los estudios socioculturales contemporáneos (p. ej., el papel de los gestos, los diagramas y los artefactos digitales en la producción de los significados geométricos en la actividad del aula).

Consideramos que asumir una perspectiva sociocultural para estudiar el aprendizaje de la geometría en contextos de ESG implica prestar atención especialmente al modo en que profesores y alumnos piensan y actúan conjuntamente con respecto al saber geométrico, empleando una serie de recursos semióticos que la cultura escolar de la época pone a disposición de estos individuos. Para dar cuenta de este aprendizaje, en este trabajo analizamos los modos en que dos profesores de matemáticas y un alumno de educación media trabajan juntos en una situación de ESG en la que buscan comprender la técnica de construcción de un semicírculo con GeoGebra producida por el alumno con anterioridad.

UNA PERSPECTIVA DEL APRENDIZAJE GEOMÉTRICO EN LA ESG

En esta investigación hemos asumido una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje matemático, expresada en la Teoría de la Objetivación (TO) de Radford (2006; 2014a), para interpretar el aprendizaje geométrico producido en experiencias de ESG. En oposición al paradigma individualista, la TO propone una reconceptualización del aprendizaje matemático, no como el resultado de la acción del sujeto que construye su propio saber, sino como “un proceso colectivo, cultural e históricamente situado que pone de relieve el papel del trabajo social humano, el cuerpo, las emociones y el mundo material” (Radford, 2018a). Desde esta perspectiva, interesan las prácticas sociales “de creación de nuevos individuos capaces de reflexionar críticamente de manera matemática sobre las cuestiones urgentes de sus comunidades y su mundo” (Radford, 2017c, p. 141).

Para la TO, el aprendizaje tiene que ver no sólo con el saber matemático escolar, sino también con aquellos seres que se transforman y reafirman como sujetos de la educación en la búsqueda de este saber. Radford (2018b) se refiere al saber matemático como arquetipos de pensamiento, reflexión y acción constituidos histórica y culturalmente. Para estudiar el aprendizaje matemático, la TO introduce dos categorías conceptuales en la forma de *procesos de objetivación* y *de subjetivación*. Mientras que los procesos de objetivación dan cuenta de la manera en que aparecen los saberes en el aprendizaje, los procesos de subjetivación tienen que ver con el sujeto que aprende y sus formas de colaboración. En atención al propósito del estudio, en esta parte nos referimos al aprendizaje matemático en términos de procesos de objetivación. Ya en trabajos anteriores hemos dado cuenta de la otra vertiente del aprendizaje matemático en un contexto de ESG.

El significado que tiene la objetivación en la TO es diferente al de *cosificación*[1] de la experiencia humana, asumido por Wenger (2001, p. 83) y

1 Para Wenger (2001), la cosificación es “el proceso de dar forma a nuestra experiencia produciendo objetos que plasman esta experiencia en una «cosa».” (p.84).

otros teóricos sociales. Según Radford (2018b, p. 233), los individuos desde que nacen entran en contacto con situaciones, entidades o cosas que les objetan, que les parecen extrañas y desconocidas, pero que hacen parte del repertorio de sistemas de expresión, acción y pensamiento, constituidos histórico y culturalmente. La objetivación es precisamente ese proceso social, corporal, material y simbólico que implica:

> *volverse, progresiva y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción —algo que notamos gradualmente y al mismo tiempo adquiere significado. Son procesos de objetivación aquellos actos de notar significativamente algo que se revela a la conciencia por medio de nuestra actividad corpórea, sensorial y artefactual.* (Radford, 2017b, p. 121)

La manera de entender la objetivación que se propone desde la TO revela dos elementos de este proceso que son fundamentales para comprender cómo se produce el aprendizaje geométrico durante la ESG. Por un lado, la objetivación es un proceso subjetivo, emocional y afectivo de toma de conciencia de algo que se constituye en saber. De ahí que la toma de conciencia sea un reflejo del modo en que cada individuo reconoce el mundo objetivo (que le trasciende) y se orienta/posiciona críticamente en él, dentro de una dinámica de encuentro dialéctico con las formas codificadas de reflexión, acción y pensamiento. Tal toma de conciencia no es contemplativa, pues a través de la conciencia individual se forman sensibilidades culturales para ponderar, comprender, disentir, objetar y sentir a los otros, a uno mismo y al mundo (Radford, 2017b, p. 122).

Por otro lado, para que la toma de conciencia ocurra es necesario que una cierta actividad se ponga en marcha, de manera que las reflexiones y acciones de los alumnos en ella lleven a formas de instanciación[2] del saber matemático que, en un principio, pueden aparecer como algo ajeno a nosotros, como una especie de alteridad. Radford (2017a) conviene en llamar *labor conjunta* a esta actividad, definiéndola como “un evento creado por una búsqueda común, es decir, una búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética.” (p. 125). Uno de los aspectos cruciales de esta labor es su naturaleza social, la cual no desaparece cuando se trabaja solo (p. ej., cuando un alumno resuelve un problema matemático en solitario). Se puede estar físicamente solo, pero aun así el alumno recurre a un conjunto de *signos* (palabras, gestos, inscripciones de todo tipo, etc.) y *artefactos* (calculadora, computador, software de aplicación, etc.) históricos y culturales que hacen de su trabajo un reflejo de la actividad social del aula. En la TO, estos signos y artefactos son llamados *medios semióticos de objetivación* (Radford, 2003, p. 41).

[2] Según Radford (2017a), la instanciación o actualización del saber se refiere al contenido conceptual concreto en el que se manifiesta, actualiza, materializa o encarna el saber.

Esto último revela otro aspecto de la labor conjunta que no podemos pasar por alto: su manifestación o aparición en la vida concreta "con los medios de trabajo creados por el propio ser humano, esto es, artefactos técnicos, herramientas." (Piedra, 2018, p. 175). En otras palabras, la labor conjunta no puede ser entendida al margen de la producción y uso de materiales y artefactos históricos y culturales. Es mediante la labor conjunta que estos materiales y artefactos revelan la conceptualidad que el trabajo humano ha depositado en ellos (Radford, 2017b, p. 123). Por esta razón, la cultura material de la época, y particularmente la tecnología digital, debe necesariamente ser integrada en la labor conjunta producida en la escuela. Esto con el fin de hacer aparente el saber que portan los artefactos usados por profesores y alumnos. Dada la importancia que la TO concede al trabajo con artefactos, se puede concluir que la cultura material interviene en los procesos de objetivación y ayuda a que estos se materialicen.

La comprensión de una técnica de construcción como resultado de la labor conjunta

Durante la ESG, la toma de conciencia en torno a los saberes geométricos escolares puede ocurrir en diferentes momentos. Un momento típico de esta actividad es el *trabajo matemático*, en donde los alumnos producen *dibujos dinámicos* que modelan las cualidades de forma, dimensión y movimiento presentes en objetos de la geometría sintética, que a su vez son modelos de objetos de la realidad. Al hablar de dibujo dinámico, nos referimos al dibujo creado con un Software de Geometría Dinámica (SGD) que conserva, en su desplazamiento, ciertas propiedades espaciales que dan cuenta de las propiedades geométricas declaradas en su construcción (Laborde, 1997), lo que convierte a este tipo de dibujo en "una instanciación concreta de la figura como concepto geométrico" (Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2012, p. 169).

En la producción de un dibujo dinámico intervienen dos elementos prácticos de la labor realizada: la tarea de construcción y su técnica correspondiente (Sánchez y Prieto, 2017). Mientras que la *tarea de construcción* es el problema matemático (declarado o no) al que se enfrentan los alumnos en situación de ESG, la *técnica de construcción* asociada se refiere al procedimiento empleado por ellos para producir el dibujo dinámico que da respuesta a la tarea de construcción. Del mismo modo que el dibujo dinámico se relaciona con el objeto geométrico que intenta modelar, la técnica de construcción de un dibujo dinámico puede entenderse como la instanciación concreta de una forma culturalmente codificada de pensar en un objeto geométrico (aquel modelado por el dibujo), en atención a su construcción con la ayuda de un SGD (Cabri, GeoGebra, etc.). Dicho de otra manera, la técnica de construcción es portadora de contenidos conceptuales particulares referidos a la construcción del objeto geométrico, modelado por el dibujo dinámico.

Dentro de la ESG, el software GeoGebra cumple un rol fundamental ya que, al ser un artefacto cultural, proporciona al usuario tanto de una serie de contenidos conceptuales en la forma de herramientas de construcción, medida y otras opciones, como de un espacio de trabajo conjunto estructurado conceptualmente para que el usuario experimente con los contenidos conceptuales y produzcan formas novedosas de construir los dibujos dinámicos (Radford, 2014b). Este espacio de trabajo es integrado al software por medio de sus diferentes apariencias (Graficación, CAS, Geometría, Gráficos 3D, etc.) y vistas (p. ej., vista gráfica, vista algebraica) (Hohenwarter y Hohenwarter, 2008). Veamos un ejemplo.

Si se quiere dibujar un rectángulo en la vista gráfica de GeoGebra, la herramienta Polígono nos sugiere una forma de construcción del objeto cuya demanda implica informar al software cuáles son los vértices que le definen (figura 1). En efecto, la herramienta Polígono es portadora de un contenido conceptual particular (una forma de entender al polígono) con el cual es posible materializar una forma de construcción del rectángulo que se espera sea aprendida por los alumnos. Por lo anterior, asumimos que el uso deliberado de las herramientas de construcción de GeoGebra puede afectar el significado de los contenidos conceptuales que portan estos recursos "al sugerir líneas potenciales de desarrollo cognitivo y social" (Radford, 2014b, p. 414).

Figura 1. Conceptualización del polígono por la herramienta correspondiente

En esta parte conviene precisar lo siguiente: el hecho de que una técnica de construcción reproduzca un dibujo con la consistencia geométrica esperada no garantiza que los alumnos reconozcan tal dibujo como un significante de un objeto geométrico. De hecho, los alumnos suelen tener dificultades para dar sentido a los pasos de la técnica en función de las relaciones entre el dibujo construido y su referente teórico (Prieto y Ortiz, en prensa). Al respecto, Laborde (1997) afirma que "el reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las propiedades geométricas no es espontáneo y debe ser objeto de aprendizaje" (p. 46).

Esto explica el hecho de que los alumnos en situación de ESG que emplean técnicas consistentes no siempre sean capaces de dar una explicación plausible de sus procedimientos de construcción, revelándose así las dificultades que tienen para vincular las acciones con el saber geométrico encarnado en el uso de las herramientas empleadas. Para que el saber geométrico que subyace en el uso de GeoGebra se revele a la conciencia, es necesario que los contenidos conceptuales incrustados en las herramientas, aparezcan durante la reflexión conjunta en torno a la técnica de construcción asociada. Es por ello que la labor conjunta dirigida a comunicar una técnica de construcción es parte de las actividades típicas de la ESG que permiten a profesores y alumnos movilizar una variedad de saberes geométricos, no solo mediante discursos orales basados en percepción visual o en teoría geométrica (Laborde, 1997), sino también por medio de otras formas de reflexión y expresión humana (Radford, 2006).

Este posicionamiento teórico aporta los insumos necesarios para el estudio del aprendizaje geométrico en experiencias de ESG, atendiendo a una caracterización de los procesos de objetivación en torno a los saberes geométricos que se revelan a los individuos en momentos clave de la ESG, como cuando se despliega una labor conjunta para tratar de comprender la técnica de construcción de una figura geométrica con GeoGebra. Lograr tal caracterización es el objetivo de esta investigación.

METODOLOGÍA

La metodología implementada en el trabajo se corresponde con la de una investigación cualitativa, de tipo descriptiva e interpretativa. Según Bogdan y Biklen (2007), la investigación cualitativa tiene las siguientes características: el ambiente natural es la fuente directa de los datos, los resultados tienen una fuerte componente descriptiva, los investigadores cualitativos se preocupan más por los procesos que por los productos, el análisis de los datos suele hacerse de forma inductiva, y el significado es de vital importancia en este enfoque.

Participantes y contexto

En la investigación participaron tres profesores de matemáticas y tres alumnos de educación media (15-16 años), quienes formaban parte del proyecto "Club GeoGebra para la Diversidad" en el año escolar 2015-2016. La finalidad de este proyecto era conformar clubes GeoGebra en algunas instituciones oficiales de Educación Media en Venezuela, de manera que profesores y alumnos participantes del proyecto pudieran contar con un espacio para la ESG (Prieto, 2017). Cada semana, los integrantes de un club se reunían de forma libre y voluntaria en sesiones de trabajo de 2 a 4 horas de duración. En este estudio centramos la atención en una sesión de trabajo del club GeoGebra "Hugo Montiel Moreno", en la cual tres profesores (dos de ellos ajenos al club) discuten con los alumnos sobre el estatus de sus construcciones hasta el momento, con miras al encuentro regional de clubes GeoGebra de ese año escolar.

Durante la sesión, los alumnos debían presentar las tareas de construcción que formularon para elaborar sus simuladores y explicar la manera en que las resolvieron. La dinámica de trabajo durante la sesión giró en torno a las técnicas de construcción empleadas por los alumnos en sus experiencias de simulación, produciéndose con ello una labor conjunta orientada hacia la comprensión de estas técnicas. Dicha labor no fue lineal, sino que se produjo como un diálogo de ideas argumentadas sobre los pasos y acciones realizadas con el software para materializar una técnica.

De toda la sesión tomamos el caso de Andrés, un alumno cuya actividad de comunicación de sus técnicas de construcción a dos de los tres profesores, revelan procesos de objetivación que consideramos representativos de la actividad de ESG.

El caso de Andrés

En el momento de la investigación, Andrés cursaba cuarto año de Educación Media en la institución que albergaba al club. Tras su incorporación al proyecto, el alumno decidió trabajar en la elaboración de un simulador del mecanismo de Klann[3] (figura 2a). En la sesión, Andrés explicó a los profesores la manera en que había resuelto tres tareas de construcción referidas a los objetos geométricos indicados en la figura 2b, con el fin de representar la biela del mecanismo en la vista gráfica de GeoGebra. De estas tareas, analizamos los procesos de objetivación surgidos en la comunicación de la técnica de construcción de un semicírculo a partir de un punto exterior (primera tarea).

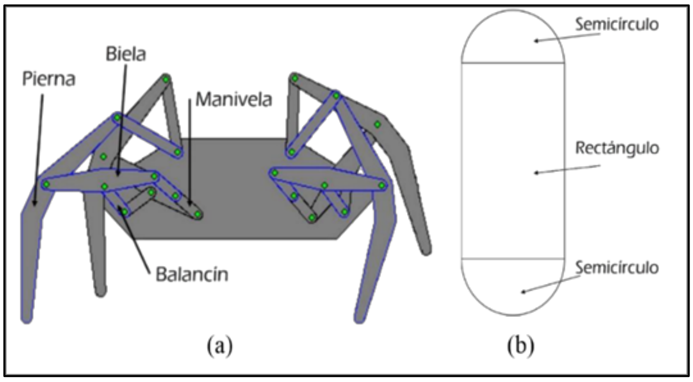

Figura 2. Imagen del mecanismo de Klann y boceto de la biela (Villalobos, 2016)

Recolección de los datos

Los datos de la investigación provienen de la discusión de Andrés y los dos profesores en relación a la técnica de construcción del semicírculo empleada por el alumno con anterioridad. Para capturar la discusión, decidimos utilizar una cámara de vídeo pues este tipo de herramienta permite capturar realidades naturales y complejas como las producidas durante el proceso de trabajo matemático en la ESG. En el vídeo se podía apreciar el despliegue de los recursos semióticos y significados movilizados por Andrés y los profesores para

[3] Dispositivo mecánico diseñado para simular el sistema de locomoción de las patas de un animal, con la finalidad de sustituir a las ruedas en terrenos de difícil acceso.

comunicar sus ideas. El vídeo fue transcrito en su totalidad con un procesador de texto.

Análisis de los datos

El análisis de los datos se realizó por etapas. En una primera etapa, realizamos una lectura inicial de las transcripciones con el propósito de identificar, discutir y describir la técnica de construcción del semicírculo producida por Andrés, que luego fue compartida con los profesores. La finalidad de esta etapa fue reconocer las particularidades del trabajo geométrico realizado por el joven para construir dicha figura con el software, en especial los contenidos conceptuales que fueron movilizados en esta construcción y su relación con la técnica empleada por el alumno.

Esta técnica de construcción se compone de pasos y acciones. Mientras que los pasos de la técnica marcan la progresión de operaciones hacia la obtención del dibujo esperado (según los requerimientos de uso de la herramienta seleccionada por Andrés), las acciones comprenden los actos particulares realizados por el alumno con el software para completar cada paso. Dado que el GeoGebra no cuenta con una herramienta propia para dibujar semicírculos, el alumno tuvo que recurrir a una herramienta auxiliar (Semicircunferencia) y añadir un paso más a la técnica (paso 3) para lograr el cometido.

Técnica de construcción del semicírculo

Los pasos seguidos en la construcción del semicírculo a partir de un punto exterior (punto A) a través de la herramienta de Semicircunferencia fueron tres.

El primer paso fue determinar los extremos del semicírculo. Para la realización de este paso:

- Se trazó una recta a perpendicular al eje y por el punto A (acción 1.1).
- Se rotó la recta a con respecto al punto A, un ángulo de 16,59° y sentido contrario a las agujas del reloj, generando así la recta a' (figura 3a) (acción 1.2).
- Se trazó una circunferencia d con centro en el punto A y radio igual a un patrón de medida que se llamó Patrón (acción 1.3).
- Se interceptó la recta a' con la circunferencia d, generando así el punto B (figura 3b) (acción 1.4).
- Se trazó una recta b, perpendicular al eje x, que pasara por el punto B (acción 1.5)
- Se rotó la recta b con respecto al punto B, un ángulo de 33° y sentido contrario a las agujas del reloj, generando así la recta b' (acción 1.6).
- Se creó un deslizador de ángulo α, con valores mínimo y máximo de 0° y 66°, respectivamente, e incremento de 1° (acción 1.7).
- Se rotó la recta b' con respecto al punto B, un ángulo α y sentido horario, generando así la recta b'_2 (figura 3c) (acción 1.8).

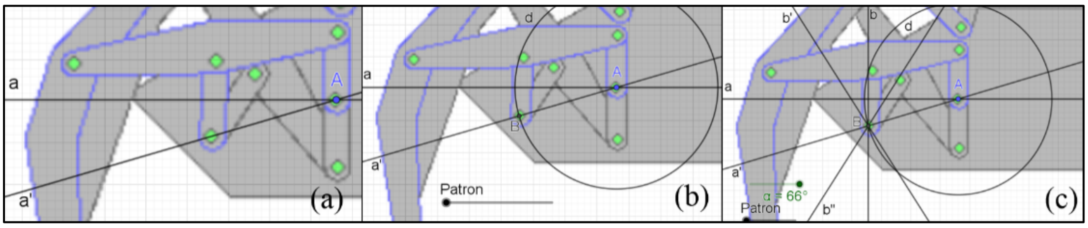

Figura 3. Construcción de la recta que contiene a los extremos del semicírculo

- Se trazó una recta m, perpendicular a b'' por el punto B (figura 4a) (acción 1.9).
- Se construyó una circunferencia e con centro en B y radio 0,052×Patrón (figura 4b) (acción 1.10).
- Se intersecó la circunferencia e con la recta m, generando los puntos C y D que son los extremos del semicírculo (figura 4c) (acción 1.11).

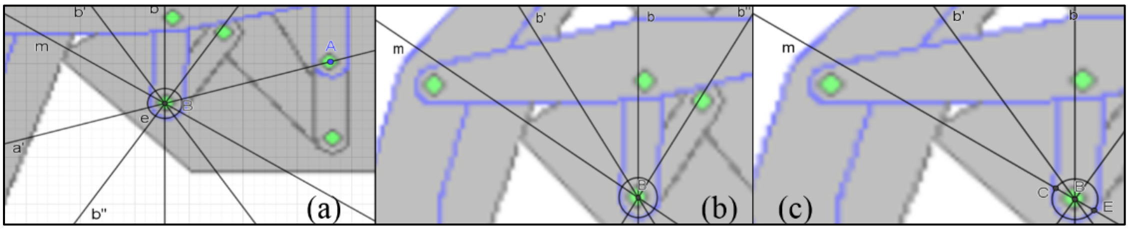

Figura 4. Determinación de los extremos del semicírculo

El segundo paso fue aplicar la herramienta de Semicircunferencia, para ello se dibujó la semicircunferencia f de extremos C y D (figura 5a).

El tercer y último paso fue modificar la opacidad de la semicircunferencia f para destacar su superficie (figura 5b).

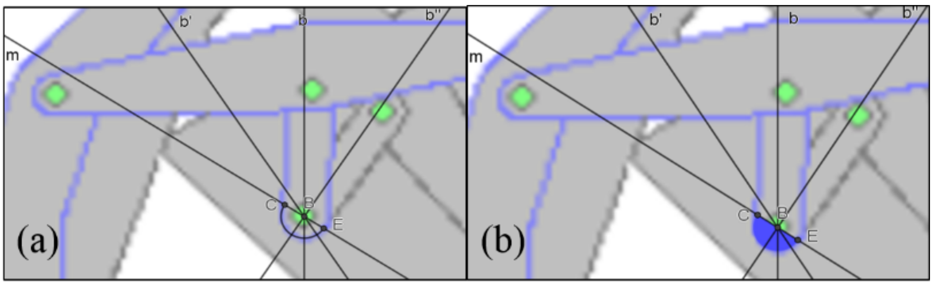

Figura 5. Construcción del semicírculo

En la segunda etapa, entramos en contacto con los datos recolectados. Al respecto, leímos las transcripciones para detectar fragmentos de la discusión entre Andrés y los profesores que parecían mostrar evidencias de la toma de conciencia de algún objeto geométrico subyacente en el trabajo conjunto desplegado en torno a la técnica. Cada fragmento constituye un segmento destacado (Radford, 2015) que refleja un momento particular de la explicación de la técnica instanciada. Para identificar los segmentos, centramos la atención en los cambios de foco a lo largo de la discusión, considerando los pasos y acciones de la técnica descrita.

En la tercera etapa, realizamos un análisis multi-semiótico (Sabena, Robutti, Ferrara y Arzarello, 2012) con el fin de identificar en los segmentos destacados la variedad de significados y medios semióticos puestos en juego por los participantes durante la labor conjunta. Asumiendo que la cognición tiene naturaleza multimodal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards y Arzarello, 2009), durante el análisis centramos la atención en la manera en que los participantes combinaron diferentes signos y artefactos para tratar de hacer aparente la conceptualidad de la que es portadora la herramienta Semicircunferencia. Para dar cuenta de los significados revelados en el análisis, hacemos uso de la noción de *nodo semiótico* de Radford, Demers, Guzmán y Cerulli (2003), la cual es definida como "piezas de la actividad semiótica del alumno, en donde la acción, los gestos y la palabra trabajan juntas para lograr la objetivación del saber" (p. 56).

De esta manera, llamamos nodo semiótico a cada forma en la que Andrés y los profesores combinaron distintos medios semióticos para lograr un estado de conciencia más o menos estable sobre algún objeto geométrico subyacente en la comunicación de la técnica. La observación de los nodos semióticos en los segmentos implicó un retorno hacia los vídeos con el fin de identificar otros medios semióticos puestos en juego, más allá del lenguaje oral. Con ello logramos enriquecer las transcripciones al incorporarles imágenes que reflejaran la variedad de signos y artefactos que fueron integrados al discurso oral de los participantes. Este tipo de análisis nos permitió tanto el reconocimiento de los significados geométricos emergentes y de su evolución a lo largo de la labor conjunta, como la organización de los resultados de la investigación.

RESULTADOS

En este apartado se describen los procesos de objetivación en torno a saberes geométricos incrustados en el uso de ciertas herramientas de GeoGebra empleadas por Andrés para construir el semicírculo, los cuales tuvieron lugar durante la discusión sobre la técnica de construcción por el alumno y los profesores. Para la descripción, hemos decidido organizar los resultados en función de los nodos semióticos que emergieron en la discusión de estos sujetos. Los nodos son agrupados alrededor de las ideas geométricas de rotación y semicírculo.

La idea de rotación

La labor conjunta comienza cuando Andrés intenta explicar a los profesores la manera en que él utilizó la herramienta Rotación de GeoGebra para llevar a cabo las primeras acciones de la técnica. Esta herramienta es depositaria de una conceptualidad de la rotación como una transformación del plano, que puede aplicarse en tanto se conozcan los siguientes elementos: objeto a rotar, centro de rotación y amplitud del ángulo. En la explicación de Andrés se observa que el joven recurre a esta herramienta en tres ocasiones (ver acciones 1.2, 1.6 y 1.8), dando lugar a procesos de objetivación relacionados con la idea de rotación que se producen en tres momentos distintos de la discusión. En cada uno de estos momentos, palabras, acciones y gestos de los participantes trabajan juntas en la objetivación de la conceptualidad detrás de la herramienta Rotación.

Primer momento

En la línea 13, Andrés comienza su explicación dibujando la recta a' (homóloga a a) en su cuaderno de notas. Mientras realiza el dibujo, el joven produce un discurso oral en el que reconoce que a' es el producto de una rotación con centro en A (acción 1.2), pero omite referirse al objeto a rotar y al ángulo de rotación, dos de los elementos requeridos por el software para el uso de la herramienta Rotación por el usuario.

13. Andrés: Primero tracé una recta que pasa por [el punto] A [dibuja sobre el papel una recta (figura 6)]. Mejor dicho, rote una recta que pasara por el centro de la semicircunferencia.

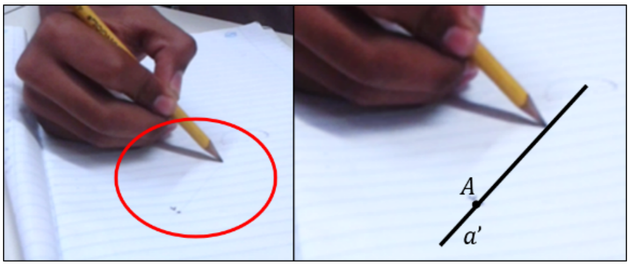

Figura 3. Trazado de la recta a'

En ese momento, Andrés usó de manera coordinada medios semióticos que incluyen palabras e inscripciones (dibujo a mano alzada) para expresar una acción concreta de la técnica, lo que pone de manifiesto la comprensión que en el momento tiene el alumno de la conceptualidad que porta la herramienta Rotación de GeoGebra. Sin embargo, se puede notar que esta comprensión es incompleta al no incluir toda la información necesaria y suficiente para el empleo de la herramienta.

En vista de ello, uno de los profesores (profesor 1) interviene con el fin de tratar de hacer aparente la omisión de información respecto al objeto a rotar y el ángulo de rotación. En cuanto al objeto a rotar, este profesor se ocupó en el acto de interpretar la explicación de Andrés, destacando el hecho de que la recta a' (dibujada en el cuaderno de notas) es el producto de la rotación de alguna recta de la cual no se tiene información (línea 14). Para hacer esto, el profesor se basó en el uso coordinado del dibujo elaborado por Andrés, de palabras y de gestos que le permitieron resaltar aquellos elementos característicos de la rotación que estaban presentes en la explicación del alumno, además de formular preguntas enfocadas en el elemento faltante (línea 16).

14. Profesor 1: O sea, que [la recta] pasará por un punto que está por aquí [señala con el dedo índice la localización del punto *B* (figura 7a)]. Y cuando me hablas [se refiere a Andrés] de que esta recta [señala la recta a' desplazando su dedo índice por el trazo, de izquierda (figura 7b) a derecha (figura 7c)] es una rotación, ¿es una rotación de quién? [dirige la pregunta a Andrés, refiriéndose al objeto a rotar].

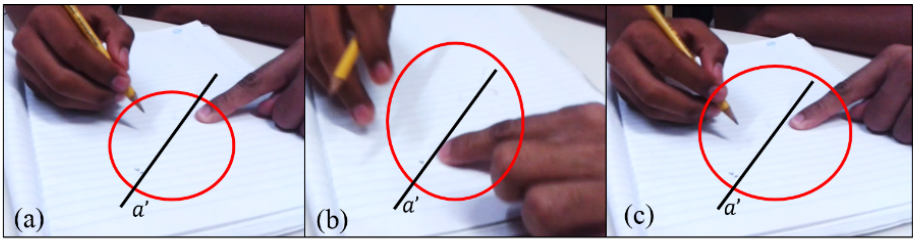

Figura 4. Señalamiento de la recta a'

16. Profesor 1: ¿De cuál otra [recta]?... Para que ésta [señala la recta a' dibujada por Andrés (figura 8)] sea la recta rotada, debe existir una recta que tú [se refiere a Andrés] rotaste [se refiere al objeto a rotar].

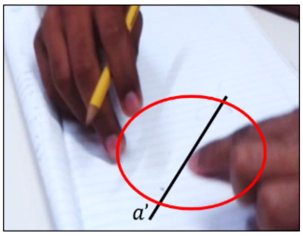

Figura 5. Señalamiento de la recta a'

La forma en que el profesor interviene condujo al alumno a producir una respuesta en la que se evidencia la toma de conciencia del objeto a rotar como uno de los elementos fundamentales para el empleo de la herramienta Rotación (línea 17), el cual merecía ser incorporado a la explicación del primer paso de la técnica.

17. Andrés: Esta tiene que ser a' [señala con el lápiz la recta $a´$ (figura 9a)] porque fue la [recta] rotada. Y ésta tiene que ser a, la otra recta [se refiere al objeto a rotar, dibujando sobre el papel una recta horizontal (figuras 9b y 9c)].

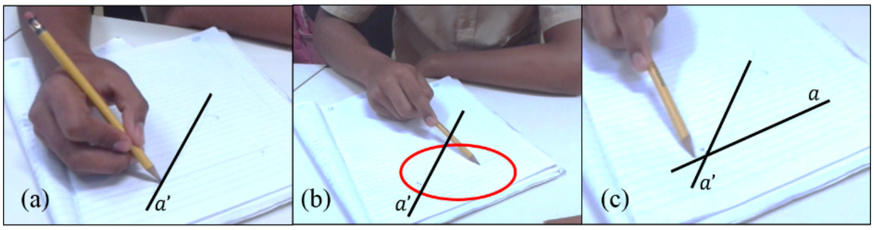

Figura 6. Identificación del objeto a rotar (recta a) y el objeto rotado (recta a')

Para emplear la herramienta Rotación de GeoGebra, también es necesario indicar el sentido de la rotación. Las opciones ofrecidas por el software para hacer esto son *sentido antihorario* y *sentido horario*. Llegado el momento, Andrés señala la recta a' con la punta del lápiz, mientras explica con palabras el sentido de la rotación que había asumido: antihorario (línea 21). La tensión que refleja Andrés al final de la línea 21 se convierte en un grito de ayuda puesto que el joven no tenía plena seguridad de lo hecho. Este llamado fue captado por uno de los profesores (profesor 2), quién trata de brindar confianza al alumno, sintonizando con sus palabras al señalar el sentido de la rotación mediante el giro de su mano derecha sobre la muñeca (línea 22). Al mismo tiempo, otro de los profesores (profesor 1) sintoniza con ellos dos, acompañando la labor con la frase "en sentido antihorario" (línea 23).

21. Andrés: Ésta [señala con el lápiz la recta a (figura 10)] la roté de manera antihorario [se refiere al sentido de la rotación]. No sé cuál… [se presenta una duda en Andrés].

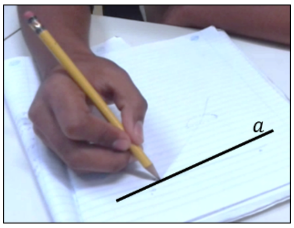

Figura 7. Señalamiento de la recta a

22. Profesor 2: Así [señala el sentido de la rotación mediante el giro de su mano de derecha (figuras 11a y 11b)].

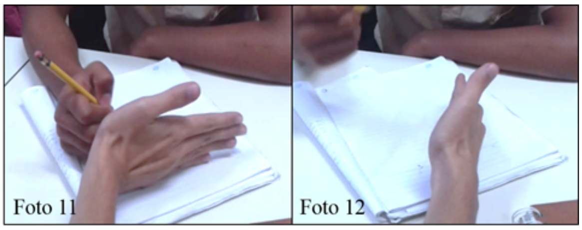

Figura 8. Sentido de la rotación de la recta a

23. Profesor 1: En sentido antihorario.

La discusión sobre el ángulo de rotación comenzó cuando uno de los profesores (profesor 2) indica con el dedo índice el lugar en donde se localizaba dicho ángulo dentro del dibujo a mano alzada (línea 24). Casi al mismo tiempo, el otro profesor (profesor 1) le hace una pregunta al alumno referida al valor de la amplitud del ángulo, mientras coloca el dedo índice sobre la abertura que hay entre las rectas trazadas (lados del ángulo) en el cuaderno (línea 26). Al no recordar este valor, el profesor 1 realizó una estimación del mismo basado en su percepción visual sobre el dibujo en el papel (línea 28).

24. Profesor 2: Aquí está el ángulo [señala con su dedo índice la localización del ángulo en el dibujo (figura 12)].

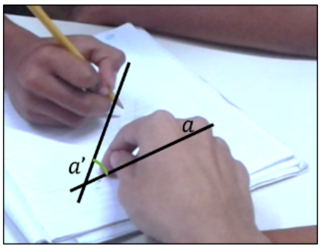

Figura 9. Señalamiento del ángulo en el dibujo

26. Profesor 1: ¿Con qué ángulo lo rotaste?, ¿te acuerdas? [señala la abertura del ángulo con su dedo índice (figura 13)].

27. Andrés: No.

28. Profesor 1: Por el dibujo que tenemos aquí [refiriéndose al dibujado en el papel] debe tener como unos 30°. Habrá que verlo en el GeoGebra [se refiere a medir el ángulo con una herramienta de GeoGebra].

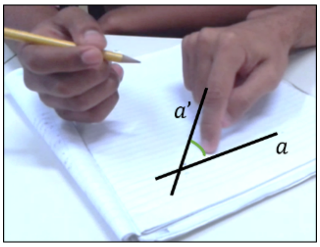

Figura 10. Señalamiento de la abertura del ángulo

Segundo momento

En otro momento de la discusión, Andrés da cuenta de un nuevo uso de la rotación en su construcción (acción 1.6). Señalando con el lápiz la recta *b* sobre el papel, el alumno comenta a los profesores su decisión de rotar esta recta con un ángulo de 33°, en sentido antihorario (línea 75). El uso coordinado de palabras y gestos por parte de Andrés en este momento dio lugar a una nueva conceptualización de la noción de rotación encarnada en la herramienta, en la cual el joven toma conciencia de los elementos omitidos por él en el momento anterior. A pesar de este avance, en la línea 75 se observa que el alumno no incluye en su discurso ni el centro de rotación (elemento necesario para aplicar la herramienta Rotación), ni la recta obtenida (la figura homóloga b'). En este momento, la explicación de Andrés tampoco contiene toda la información requerida por la herramienta del software para su adecuado empleo.

75. Andrés: Esta recta que dibujé [señala la recta b con su lápiz (figura 14a)], yo decidí que tuviera un ángulo de 33° [se refiere al ángulo de rotación] que se movía [usa el lápiz para emular el movimiento de la recta (figura 14b)], entonces, la roté [se refiere a la recta] a 33° en sentido antihorario.

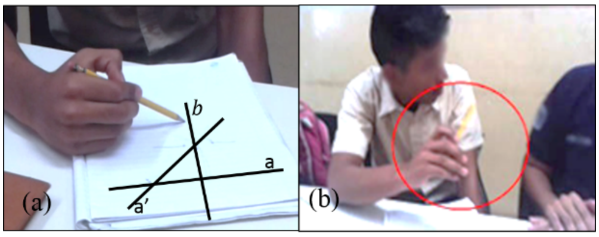

Figura 11. Rotación de la recta b con un ángulo dado

En un intento por aclarar la explicación de Andrés, uno de los profesores (profesor 1) interviene para complementar la descripción del procedimiento del joven, dibujando en el cuaderno la recta b' y precisando al alumno que b' era la recta homóloga producida al rotar la recta vertical b con un ángulo de 33° y en sentido antihorario (línea 76). El modo en que el profesor usa palabras y dibujos para persuadir a Andrés parecía estar cargado de la información necesaria y suficiente para considerar legítima la explicación de la acción 1.6. Sin embargo, era evidente que tanto Andrés como este profesor omitieron hablar del centro de rotación, omisión que quedó en segundo plano después que otro de los profesores (profesor 2) preguntara al joven por las demás construcciones realizadas (línea 79).

76. Profesor 1: Ajá, y te quedó otra, que es ésta que está aquí [dibuja la recta b' sobre el papel (figura 15)], a partir de la vertical con un ángulo de rotación de 33° en sentido anti horario.

79. Profesor 2: Y luego, ¿qué hiciste? [dirige su pregunta a Andrés].

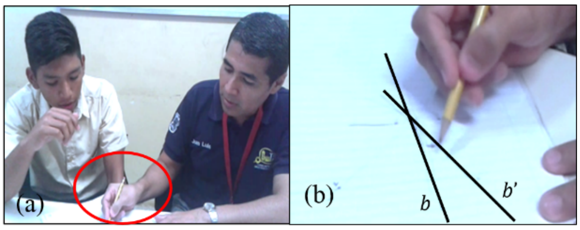

Figura 12. Trazado de la recta b' sobre el papel

Tercer momento

La manera en que Andrés explica a los profesores la construcción de la recta $b_2{}'$ revela cierta sensibilidad del alumno hacia la necesidad de una adecuada comunicación de la rotación en el caso de la acción 1.8. De allí que el contenido de la discusión en este nodo semiótico giró en torno a los elementos requeridos por la herramienta Rotación para ser empleada. En primera instancia, el joven se refiere al ángulo de rotación, aunque de forma implícita, cuando expresa el procedimiento realizado para representar este objeto en la interfaz del software. Usando palabras, Andrés comunica su decisión de crear un deslizador de tipo Ángulo, llamado α, con valores angulares de 0° como mínimo y de 66° como máximo (línea 82). Con ello, el alumno reconoce tanto la cualidad variable del ángulo de rotación requerido en este caso, como la potencialidad de la herramienta Deslizador para modelar el conjunto de valores asociados al ángulo.

Luego de la intervención de Andrés, uno de los profesores (profesor 1) le pide al joven justificar la elección de los 66° como el valor máximo del deslizador (línea 83). La respuesta de Andrés se apoyó en la acción 1.6, particularmente en el ángulo de rotación de 33°. Para producir su respuesta, el alumno emplea un discurso oral que acompaña con gestos icónicos que se producen tras señalar el ángulo de rotación sobre el dibujo en papel, y al realizar un barrido con el lápiz en señal del movimiento de rotación aplicado a la recta *b* para obtener b'. A partir de esta información, Andrés concluye que esa misma amplitud de 33° debía ser recorrida por la recta $b_2{}'$ hasta llegar a su posición final (línea 84). De esta manera, la coordinación de palabras, dibujo y gestos permitió a Andrés dar una respuesta sobre el uso del deslizador para la representación del ángulo de rotación que fue legitimada por el profesor al interpretar su explicación como una duplicación del primer ángulo (línea 85).

82. Andrés:	Bueno, creé un deslizador de [tipo] ángulo de [valor] mínimo 0° y máximo 66°.
83. Profesor 1:	¿Por qué 66°? [dirige su pregunta a Andrés].
84. Andrés:	Porque si rotamos esta recta [señala con el lápiz la recta *b* (figura 16a)] para acá [señala con el lápiz la recta b' (figura 16b)], entonces, digamos que el mismo movimiento tiene que darlo para acá [señala con el lápiz el espacio entre *b* (figura 16c) y por donde debería pasar b_2´ (figura 16d)].

85. Profesor 1: El doble de 33°.

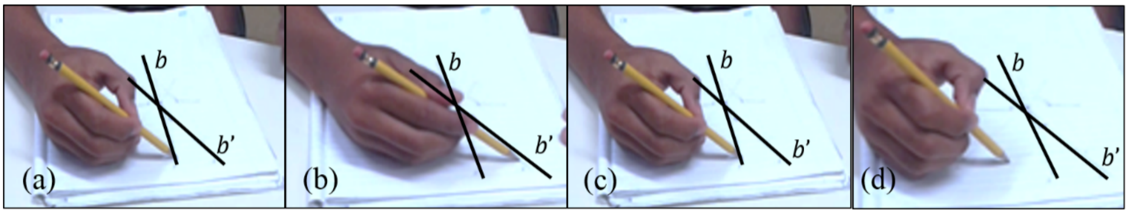

Figura 13. Explicación de la decisión de considerar un ángulo de 66°

Aunque Andrés reconoce el valor del ángulo de rotación y su necesaria representación a través de un deslizador, al retomar su explicación de la acción 1.8, él se muestra poco seguro al identificar sobre el papel aquellos elementos necesarios para emplear la herramienta Rotación. En su intento, Andrés identifica el objeto a rotar (la recta b') cuando le señala con el lápiz sobre el dibujo, pero no es capaz de identificar el ángulo de rotación aplicado a este objeto, por lo cual se queda en silencio por un instante (línea 88). Inmediatamente, uno de los profesores (profesor 1) interviene para recordarle al joven que el ángulo de rotación es el mismo ángulo α que él había representado por medio del deslizador (línea 89). El alumno parece tomar conciencia de este hecho al responder afirmativamente a la intervención del profesor (línea 90). Para terminar su idea, el profesor dibuja en el papel la recta homóloga, obtenida tras la rotación (línea 91).

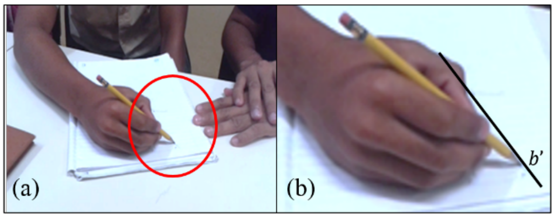

Figura 14. Señalamiento de la recta b'

88. Andrés: Luego roté esta recta [señala con el lápiz la recta b' (figura 17)], con…

89. Profesor 1: El ángulo alfa del deslizador que estaba entre 0° y 66°.

90. Andrés: Sí.

91. Profesor 1: Ok. Y te quedó una recta aquí me imagino [dibuja la recta $b_2{}'$ sobre el papel (figura 18)].

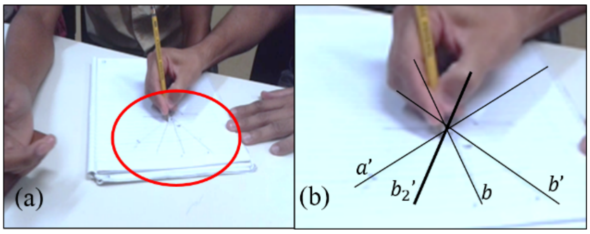

Figura 15. Trazado de la recta b_2'

Hasta ese momento, las explicaciones surgidas en torno a la acción 1.8 de la técnica, acompañadas por una serie de medios semióticos de objetivación, parecían satisfacer las necesidades de comprensión de los participantes. Sin embargo, tanto Andrés como los profesores omitieron hablar del centro de rotación, otro de los elementos necesarios para emplear la herramienta Rotación. La omisión de este elemento en la discusión se produce tras hablar sobre los demás elementos de la rotación ignorados por Andrés en sus explicaciones, especialmente sobre el ángulo de rotación. De esta manera, los participantes pierden el interés en el centro de rotación como un elemento esencial en la labor desplegada.

La idea de semicírculo

En cierto momento de la discusión, la labor se orienta al reconocimiento del lugar que ocupa la herramienta Semicircunferencia en el desarrollo de la técnica de construcción del semicírculo (líneas 38 a la 43). Todo comienza cuando los profesores detectan que Andrés no vincula la explicación de las acciones 1.1 a la 1.8 con la construcción del semicírculo durante su discurso, esto es, que el alumno no hizo explícito en su discurso que la ejecución de las diferentes acciones le llevaría a construir el semicírculo en el software.

Ante la evidente falta de conexión con la técnica, los profesores llevan a cabo una reflexión sobre las condiciones para el empleo de la herramienta Semicircunferencia, que luego contrastan con las acciones de Andrés hasta ese momento. La intención con ello era hacer consciente al joven de que todo lo discutido hasta ese momento no aportaba la información necesaria para emplear la herramienta en cuestión. En sus reflexiones, los profesores elaboran un discurso en torno a la conceptualización del objeto encarnado en la herramienta, combinando palabras, gestos y dibujos de manera sincronizada.

38. Profesor 1:	Entonces, fíjense en una cosa, para dibujar la semicircunferencia, ¿qué se necesita conocer? [dirige la pregunta a Andrés].
39. Andrés:	Los extremos.
40. Profesor 1:	Ok. ¿Y cuáles son los extremos? Me imagino que aquí [en el dibujo] son este punto y este punto [dibuja dos puntos en el papel (figura 19)]. No tienes ninguno de los dos [dirigiéndose a Andrés].
41. Andrés:	[mueve la cabeza en señal de haber admitido lo dicho por el

profesor].

42. Profesor 1: Los debes determinar [se refiere a los extremos de la semicircunferencia]. Si tuviera estos extremos, usando la herramienta Semicircunferencia, los selecciono y determino la figura. No necesito nada más. Entonces, fíjate en todo lo que has explicado y aún no tienes un extremo, solo tienes el centro de la semicircunferencia.

43. Profesor 2: Habrá que ver cómo usaste el centro para luego determinar esos puntos [se refiere a los extremos del semicírculo]. ¿Qué hiciste luego?

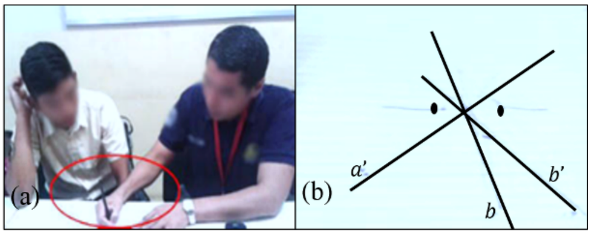

Figura 16. Trazado de los extremos del semicírculo

Luego de esta situación, los datos muestran que Andrés fue capaz de explicar a los profesores el modo de determinar los puntos extremos, poniendo de manifiesto cierto nivel de conciencia respecto al semicírculo y su contorno en ese momento. En la línea 97 se observa que Andrés hace referencia al trazado de la recta m (acción 1.9) sobre la cual se localizan los extremos del semicírculo, esto por medio de un discurso oral que acompaña con un uso muy particular del dibujo en papel. Andrés se refiere a m como una recta perpendicular a b_2' que pasa por B, pero en sus palabras sustituye la recta de referencia en la relación (recta b_2') por una seña realizada con la punta del lápiz, coordinada con la palabra "esta".

La novedad de este modo de usar el dibujo radica en que Andrés no recurre a la marca en grafito de la recta m sobre el dibujo para darse a entender. En su lugar, el alumno reemplaza el trazado de b_2' por un ligero movimiento del lápiz sobre aquella zona en donde la recta debería ser dibujada. Este mismo uso coordinado de palabras y señas por sobre el dibujo se mantiene presente en la explicación, cuando Andrés se refiere tanto a la circunferencia e (acción 1.10) como a los puntos C y D (acción 1.11) que son los extremos del semicírculo (línea 99).

97. Andrés: Ya de esta recta [señala con el lápiz la recta b_2' (figura 20a)], fue que yo trace una perpendicular a esa [b_2'] que pasa por B [señala con el lápiz la recta (figuras 20b y 20c). Y de allí determiné…

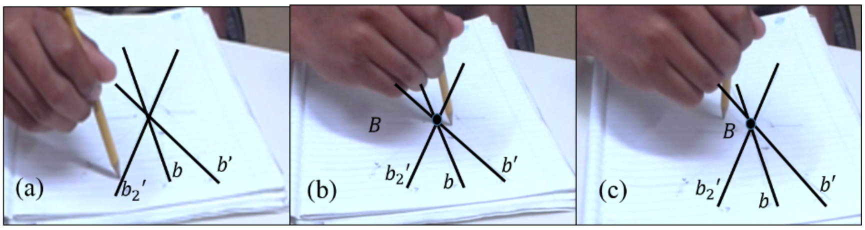

Figura 17. Explicación de la recta que contiene a los extremos

98. Profesor 2: Los extremos…

99. Andrés: Dibujé la circunferencia y determiné los extremos del semicírculo.

100. Profesor 2: Ya. Con esta recta [se refiere a b_2'] (figura 21a) culmina la simulación del movimiento [usa su dedo índice para señalar la recta y mueve la mano de derecha a izquierda para indicar el movimiento] (figuras 21b y 21c).

Figura 18. Representación del movimiento de b_2' con la mano del profesor 2

Pese a ello, los profesores insisten en integrar las trazas de la recta m y los puntos C y D a la labor en la que se comunican las acciones 1.10 y 1.11, para lo cual invitan al alumno a que participe con ellos en una recapitulación de estas acciones (líneas 110 a la 106). Los profesores aprovechan el momento para pedirle a Andrés que dibuje con el lápiz los elementos antes mencionados, dejando entrever su preferencia por el dibujo geométrico como recurso semiótico que puede dar legitimidad al modo de comunicar una técnica.

101. Profesor 1: ¡Claro! Porque del movimiento de esta recta [se refiere a b_2'] depende del movimiento del semicírculo. Y el trabajo termina ahí. Luego viene el contorno del semicírculo. ¿Cómo se dibujó este contorno? Determinando los dos extremos [de la semicircunferencia]. ¿Cómo se determinaron estos dos extremos? [dirige su pregunta a Andrés].

102. Andrés: Trazando una perpendicular.

103. Profesor 1: Trazando una recta perpendicular a la [recta] b_2'.

104. Profesor 2: Que pase por B. ¡Dibújala! [dirigiéndose a Andrés (figura 22)].

106. Andrés: Dibujé una circunferencia centrada en B y con un radio determinado [traza la circunferencia sobre el dibujo] (figura 23a) y, luego, corté la recta perpendicular con la circunferencia para que me dieran los dos extremos de semicírculo [marca los puntos sobre el papel] (figuras 23b y 23c).

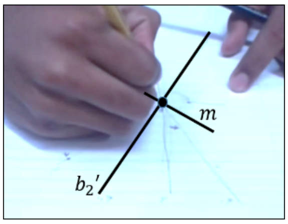

Figura 19. Trazado de la recta perpendicular

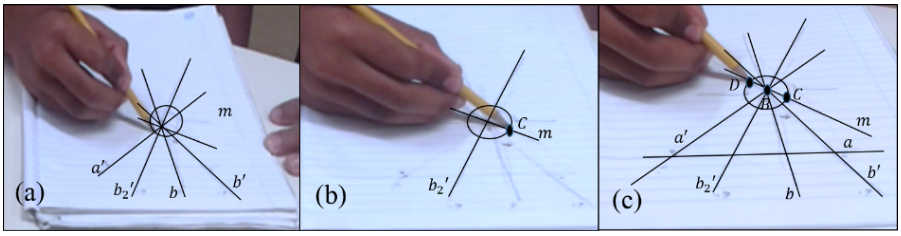

Figura 20. Determinación de los extremos del semicírculo

Para dar continuidad a la explicación, uno de los profesores (profesor 2) le pide a Andrés que informe sobre lo hecho luego de haber determinado los extremos del semicírculo (línea 107). La respuesta del alumno puso de manifiesto una falta de conciencia sobre el paso 2 de la técnica, al omitir el empleo de la herramienta Semicírculo luego de ser hallados los puntos *C* y *D* (línea 108). Las líneas 109 a la 115 muestran el modo en que los profesores intervienen en la discusión para hacer al joven replantearse su explicación, reconociendo la aplicación de la herramienta a partir de los extremos del semicírculo. Esta discusión tiene lugar mediante palabras vinculadas con algunas señas sobre el dibujo.

107. Profesor 2: Y luego, ¿qué hiciste? [dirige la pregunta a Andrés].

108. Andrés: Le di opacidad.

109. Profesor 2: ¿Opacidad?

110. Profesor 1: No, todavía no. No puedes darle opacidad porque no tienes nada a que darle opacidad. ¿A qué te refieres? ¿A la circunferencia? [dirige la pregunta a Andrés].

111. Andrés: No. Ahí utilice la herramienta Semicircunferencia.

112. Profesor 2: ¡Exacto! Ahí termina.

113. Profesor 1: Creaste, construiste la semicircunferencia. Y luego le diste opacidad.

114. Andrés: Luego le di opacidad [a la semicircunferencia].

115. Profesor 2: Y allí termina la primera tarea de construcción.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En esta investigación nos hemos apoyado en una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje matemático para dar cuenta de los procesos de objetivación alrededor de determinados saberes geométricos que son movilizados por un alumno y dos profesores de matemáticas durante la labor de comunicar una técnica de construcción con GeoGebra. Mediante un análisis multi-semiótico, hemos podido identificar algunos nodos semióticos que nos aportan información sobre ciertos hallazgos de los procesos de objetivación del saber geométrico ocurridos en experiencias de ESG. Estos hallazgos tienen que ver con la actividad semiótica desplegada, la actuación de los profesores durante la labor conjunta y las dificultades surgidas a lo largo de ésta.

La actividad semiótica desplegada

Los resultados han puesto de manifiesto la variedad de signos (palabras, gestos, dibujos) y artefactos (lápiz, papel) que componen los diferentes nodos semióticos desplegados en la labor de comprensión de una técnica de construcción. Con respecto a los gestos y dibujos, encontramos que estos recursos han cumplido una función mediadora destacada en los procesos de objetivación, en tanto fueron producidos de manera sincronizada con el discurso oral para revelar las conceptualidades geométricas implícitas en las herramientas de construcción de GeoGebra usadas por el alumno. Por ejemplo, en los primeros tres nodos semióticos se observa que el alumno toma conciencia de la idea de rotación encarnada en la herramienta Rotación de un modo progresivo. Para ello, fue necesario en cada momento desplegar una actividad semiótica compuesta de un repertorio de signos (palabras, gestos y dibujos) y de maneras de combinar estos signos para hacer que Andrés reconociera al objeto a rotar y al ángulo de rotación como dos elementos característicos de toda rotación en el plano, manteniendo así cierta uniformidad en el modo de comunicar las primeras acciones de la técnica. El conjunto de signos y sus relaciones en cada momento de la discusión es un ejemplo de lo que Arzarello (2006) denomina paquete semiótico (semiotic bundle).

En el marco de la actividad semiótica desplegada en los nodos semióticos, los gestos fueron empleados por Andrés y los profesores, tanto para señalar o indicar los objetos geométricos sobre el dibujo como para recrear ciertos movimientos relacionados con la rotación. Particularmente, estos individuos usaron sus manos (acompañadas con el lápiz o no) para localizar puntos, rectas, curvas o ángulos sobre el dibujo a mano alzada, y también para emular el movimiento de alguna recta a la que se habría aplicado una rotación. Estos tipos de gestos usados por Andrés y los profesores con el fin de comunicar los pasos y acciones de la técnica están en correspondencia con algunas de las categorías de gestos teorizadas por McNeill (1992), específicamente con los gestos de tipo icónico y deíctico.

Siguiendo a este autor, podemos concluir que la dimensión icónica de la labor conjunta desplegada estuvo presente, ya que para Andrés y los profesores algunos gestos se parecían visualmente a las entidades que éstos pretendían describir. En concreto, destaca una escena del segundo nodo semiótico en la cual el profesor 2 realiza un movimiento de su mano sobre el dibujo en alusión al giro de la recta b' en la acción 1.8. Otra dimensión identificada es la deíctica, referida a la forma en que los sujetos indicaban un objeto geométrico específico (o alguno de sus aspectos característicos) representado en el espacio del papel. Ambas dimensiones han sido reportadas en los estudios de Gómez (2013) y Pantano (2014), aunque con diferentes denominaciones. En el caso de Gómez, él los engloba en una categoría llamada signos kinestésicos. Por su parte, Pantano es más específico al referirse a ellos como señalamientos con el dedo o un lápiz.

Los dibujos también fueron recurrentes durante la comunicación de la técnica, aunque no hayan sido usados tan naturalmente por el alumno como ocurrió con los gestos. Como consta en el segundo nodo, ocasionalmente los profesores pedían aclaraciones al alumno a través de dibujos con el fin de encaminar la discusión hacia la comprensión de objetos geométricos evocados. La insistencia de los profesores en el uso de dibujos en papel durante la labor conjunta es un reflejo de la importancia que ellos otorgan al dibujo geométrico como un medio para alcanzar la legitimidad en la explicación de las acciones de una técnica de construcción. Según Laborde (1997), la interpretación de dibujos en geometría es una práctica que favorece el reconocimiento de propiedades espaciales asociadas a las propiedades geométricas del objeto que el dibujo intenta modelar. En nuestra investigación, encontramos que los profesores hicieron grandes esfuerzos por dirigir la discusión hacia puntos de encuentro entre lo visual y lo teórico, procurando que cada trazo que compone al dibujo llegara a significar alguna cualidad de la rotación o del semicírculo. Sin embargo, es importante señalar que tanto el dibujo a mano alzada como su interpretación se vieron afectados por la conceptualización encarnada en las herramientas de construcción que fueron empleadas por el alumno.

La actuación de los profesores

Los resultados del primer momento muestran que la actuación de los profesores durante la comunicación de la técnica tuvo una implicación importante en el aprendizaje de la idea de rotación. En el caso del profesor 1, él coincide o sintoniza con los medios semióticos empleados por Andrés (palabras y dibujos) y los utiliza para hacer que el joven tome conciencia de la idea de rotación detrás de la herramienta empleada. Específicamente, este profesor recurre al dibujo del alumno y lo usa de manera coordinada con una explicación verbal para hacer que Andrés reconozca el objeto a rotar como uno de los elementos característicos de la rotación vista como objeto geométrico. Por su parte, el profesor 2 también sintoniza con los medios semióticos del alumno, pero lo hace de un modo distinto a su colega. En algunas intervenciones de Andrés observamos que este profesor complementa los significados del alumno con ciertos gestos y señas que amplían el paquete semiótico emergente.

Debido a que ambas formas de coincidir o sintonizar con los medios semióticos de objetivación de Andrés favorecieron la toma de conciencia de la geometría puesta en juego, podemos concluir que la actuación de estos profesores fue una estrategia útil para lograr que el alumno se haya apropiado de parte de la conceptualidad detrás de la herramienta Rotación. Arzarello, Paola, Robutti y Sabena (2009) se refieren a este tipo de estrategia como juego semiótico del profesor. Además, la forma en que los profesores y el alumno interaccionan refleja el modo ético en que ellos trabajan juntos, hombro con hombro hacia la instanciación del saber geométrico, muy a pesar de sus diferencias cognitivas, emocionales y de otra índole. En la TO, esta interacción recibe el nombre de *togethering* (Radford y Roth, 2011), una categoría analítica que tiene como objetivo dar cuenta de la mediación entre profesores, alumnos, signos y artefactos durante el despliegue de la labor. *Togethering* es el resultado de una forma conjunta de compromiso ético, de un acuerdo colectivo de la actividad, motivada y basada en la confianza y responsabilidad.

Las dificultades surgidas en la labor

A pesar de que Andrés logra tomar conciencia de las ideas de rotación y semicírculo durante la labor conjunta, podemos concluir que el reconocimiento de la conceptualidad que portan las herramientas de GeoGebra empleadas por el alumno no fue un asunto fácil de conseguir por varias razones. En primer lugar, durante el segundo y tercer momento, notamos que cierta información característica de la rotación como objeto geométrico es omitida de manera recurrente. A medida que avanza en su explicación, el alumno integra progresivamente cierta información de las rotaciones realizadas que habían sido omitidas por él en momentos anteriores, mientras deja en el camino otros datos que también se corresponden con la conceptualidad encarnada en la herramienta Rotación. Al no ser identificadas a tiempo, estas omisiones conducen a imprecisiones en el aprendizaje geométrico por parte de Andrés.

Las dificultades de comprensión reportadas en el último nodo semiótico están relacionadas con una falta de conexión entre las distintas acciones realizadas por Andrés como parte del paso 1 de la técnica. En particular, notamos que al principio de la discusión el alumno no tuvo conciencia de los vínculos entre las primeras acciones de la técnica (1.1 hasta la 1.8) con las restantes, dentro de un sistema de acciones más general, determinado por los pasos de construcción del semicírculo. La detección de este problema por los profesores permitió desplegar acciones encaminadas a que Andrés fuera consciente del hecho y reorganizara su explicación en función de los pasos de la técnica. De esta labor, destacan las capacidades del alumno para explicar el modo en que determinó los extremos del semicírculo, lo que revela cierta conciencia de la idea de semicírculo y de su contorno tal como es incrustada en la herramienta correspondiente.

Aunque los resultados de esta investigación representan un avance en la comprensión del aprendizaje producido en el seno de la ESG, el haber analizado una labor conjunta particular orientada hacia comprender una técnica de construcción no garantiza el reconocimiento profundo de este fenómeno, por lo cual vemos necesario realizar otros estudios centrados en los procesos de objetivación que ocurren durante la ESG, de manera que los resultados obtenidos contribuyan a que nuestros profesores mejores sus condiciones de gestión de la actividad.

REFERENCIAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME*, *9*(número especial), 267-299.

Arzarello, F., Paola, D. Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97-109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Bartolini-Bussi, M. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1* (pp. 1-16). Assisi, Italia: PME.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. y Scaliet, E. (1995). Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching and learning in compulsory school. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 151-166). Recife, Brasil: PME.

Bogdan, R. y Biklen, S. K. (2007). *Qualitative Research for Education. An Introduction to Theory and Methods* (5.ª ed.). Boston, MA: Pearson.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, *32*, 55-70.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*, 61-76.

Hohenwarter, J. y Hohenwarter, M. (2008). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28*(2), 135-146. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15003.05921.

Laborde, C. (1997). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (p. 33-48). Madrid, España: Una Empresa Docente.

Lerman, S. (1992). The function of language in radical constructivism: A Vygotskian perspective. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of 16th conference of international group for the psychology of mathematics education,* (vol. 2, p. 40-47). Durham, NH: PME.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representations in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-196. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80058-5

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Pantano, O. (2014). Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Piedra, R. (2018). El papel del trabajo en el desarrollo del pensamiento humano. *HYBRIS. Revista de Filosofía, 9*(2), 173-206. https://doi.org/10.5281/zenodo.1578164.

Prieto, J. L. (2017). *Proyectos de simulación con GeoGebra: una estrategia del desarrollo del pensamiento científico desde el servicio comunitario* (Trabajo de ascenso no publicado). Universidad del Zulia, Maracaibo.

Prieto, J. L. y Díaz-Urdaneta, S. (2019). Un itinerario de investigación alrededor de la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), 668-674.

Prieto, J. L. y Ortiz, J. (en prensa). Saberes necesarios para la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Bolema, 33*(65).

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *51*(1), 37-70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *RELIME*, 9(número especial), 103-129.

Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2014b). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(3), 405-422. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Revista Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18), 547-567.

Radford, L (2017a). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 115-136). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017b). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 97-112). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2017c). Ser, subjetividad y alienación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 139-165). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2018a, diciembre 6). Conferencia Dr. Luis Radford [Archivo de vídeo]. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=Age-EmXa_LI.

Radford, L. (2018b). Questões em torno da Teoria da Objetivação. *Obutchénie. Revista de Didática e Psicologia Pedagógica*, *2*(1), 230-251. https://doi.org/10.14393/OBv2n1a2018-12.

Radford, L., y Roth, W. M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2-3), 227-245. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9282-1.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. y Cerulli, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production of meaning. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME27–PMENA25)* (pp. 55-62). Honolulu, HI: PME.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 91-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y.

Sabena, C., Robutti, O., Ferrara, F. y Arzarello, F. (2012). The development of a semiotic frame to analyse teaching and learning processes: Examples in preand post-algebraic contexts. En L. Coulange, J-P. Drouhard, J-L. Dorier y A. Robert (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 231-245). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Sánchez, I. V. y Prieto, J. L. (2017). Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 96*, 79-101.

Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2012). The GSP as a technical and psychological-symbolic tool: The case of a lateral entry teacher. En C. E. Vasco, C. A. Álvarez, O. León, A. Athanasopoulou, A. Sáenz-Ludlow, B. D'Amore (Eds.), *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas* (pp. 167-188). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6.

Villalobos, E. (2016) La geometría en los balancines del mecanismo de Klann. En J. L. Prieto y R. Gutiérrez (Comps), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 249-257). Maracaibo, Venezuela: A. C. Aprender en Red.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM*, *83*(1), 20-25.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Madrid, España: Paidós.

Ivonne C. Sánchez
Asociación Aprender en Red, Venezuela
ivonne.s.1812@gmail.com

Juan Luis Prieto G.
Universidad del Zulia, Venezuela
juanl.prietog@gmail.com

Recibido: 05/02/2019. Aceptado: 14/08/2019
doi: 10.30827/pna.v14i1.8657

ISSN: 1887-3987