

GENERACIÓN Y CONTINUACIÓN DE PATRONES POR DOS ALUMNAS DE 6-7 AÑOS EN TAREAS DE SERIACIONES

Rodolfo Morales, María C. Cañadas y Encarnación Castro

Presentamos un estudio de casos a través de entrevistas semiestructuradas para describir la generación de patrones y la continuación de seriaciones cualitativas que realizan dos alumnas de 6-7 años. Describimos el trabajo realizado por las alumnas en diez tareas de patrones lógicos construidas de acuerdo a tres criterios: (a) atributos, (b) número de elementos en el núcleo y (c) variación de atributos entre elementos. Los resultados evidencian que las alumnas generan diferentes tipos de patrones y continúan diferentes tipos de seriaciones (reiterativas y no reiterativas), con distinto número de elementos en el núcleo.

Términos clave: Educación Primaria; Patrones; Pensamiento lógico matemático; Seriaciones

Creation and Continuation of Patterns by Two 6-7 Year-Old Students in Sequences Tasks

We present a case study using semi-structured interviews to describe pattern creation and continuation of qualitative series realized by two 6-7 years old students. We describe these students' responses to ten tasks which involve logical patterns design following three criteria: (a) attributes, (b) number of elements in the kernel, and (c) variation of attributes between elements. Results evidence that the students create different kinds of patterns and continue different kinds of series (reiterative and no reiterative), with different number of elements in the kernel.

Keywords: Elementary Education; Logic-mathematical thinking; Patterns; Sequences

Desde hace algunos años, la importancia de los patrones en matemáticas ha sido tal que ha habido un cambio significativo en lo que la comunidad científica entiende por saber y hacer matemáticas. Los patrones matemáticos se consideran la

estructura que permite modelizar las reiteraciones que se observan en el entorno (Cañadas y Castro, 2007), y la esencia y corazón de las matemáticas (Castro, 1995; Steen 1988; Zazkis y Liljedahl, 2002). Esta consideración ha calado en algunas comunidades de Educación Matemática durante las últimas décadas, tanto para tomarlos como objetos de enseñanza (p. ej., Ontario Ministry of Education, 2007), como para investigar sobre las aportaciones que el trabajo con patrones produce en el aprendizaje matemático de los estudiantes (p. ej., Mulligan y Mitchelmore, 2013). En los documentos curriculares también se han introducido los patrones como contenido. El *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) propone la inclusión de las actividades de exploración que hacen uso de diversos materiales, el fomento de la capacidad de seguir pautas y hacer frente a diferentes propiedades de las relaciones algebraicas. En el currículo español, los patrones tienen un carácter fundamental en Educación Primaria debido a que se propone que los alumnos deben ser capaces de describir, analizar y encontrar patrones en contextos numéricos, geométricos y funcionales al finalizar este nivel educativo (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

A pesar de que la literatura destaca y justifica la relevancia del trabajo con patrones y de que se hayan incluido en el currículo, la investigación sobre estas nociones, en general es escasa y la existente se centra, normalmente, en Educación Infantil. Los estudios en Educación Primaria son escasos, especialmente en lo relativo a patrones lógicos, particularmente en España. Lo anterior nos anima a indagar sobre la capacidad que tienen estudiantes de los primeros cursos de primaria para trabajar con patrones. Entendemos nuestro trabajo como un estudio exploratorio que pretende contribuir al conocimiento sobre el trabajo con patrones lógicos que realizan estudiantes de primeros cursos de Educación Primaria.

PATRONES

Un acercamiento a la idea de patrón incluye términos como secuencia, serie, orden, predecible, regularidad o estructura, entre otras. Todas ellas son relevantes y permiten acotar la esencia de la noción de patrón (Liljedahl, 2004). Un patrón “es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p. 57). Para las matemáticas básicas, un patrón se puede describir como cualquier regularidad predecible que, por lo general, implica relaciones lógicas, numéricas o espaciales (Mulligan y Mitchelmore, 2009). Dichas relaciones constituyen la estructura del patrón, el cual se rige por una regla que recoge esas relaciones. Un friso puede ser construido por una iteración de una figura, la estructura de una secuencia de números se puede expresar en una fórmula expresada simbólicamente y la estructura de una figura geométrica se muestra por sus diversas propiedades (Mulligan y Mitchelmore, 2012). Un ejemplo de patrón lo constituyen los números triangulares en su representación puntual (ver figura 1).

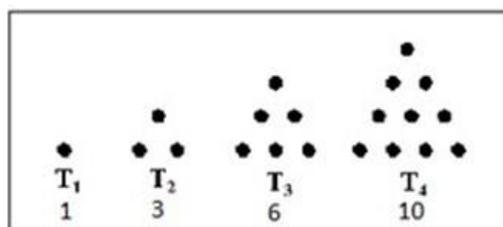


Figura 1. Números triangulares

La noción de patrón va unida a situaciones matemáticas diferentes, habiendo distintas modalidades de patrones. La literatura recoge diferentes tipos de patrones que se pueden trabajar en Educación Infantil y primeros cursos de Educación Primaria.

- ◆ Patrones visuales o espaciales, en los que la regularidad se percibe a través de la vista. Generalmente, se encuentran en el ámbito de la geometría (Thornton, 2001). La representación puntual de los números triangulares se considera un patrón visual.
- ◆ Patrones lineales o de repetición son aquellos en los que una unidad se repite cíclicamente. A la unidad que se repite se le llama unidad de repetición o núcleo. Un ejemplo de este tipo de patrones es ABABAB,... donde el núcleo es AB (Rittle-Johnson, Fyfe, McLean y McEldoon, 2013).
- ◆ Patrones numéricos, es cualquier patrón construido sobre el número y donde el valor numérico de los elementos en cada posición es importante. Por ejemplo, 1, 12, 123,... constituye un patrón numérico (Liljedahl, 2004).
- ◆ Patrones lógicos, son aquellos en los que predomina el razonamiento basado en igualdad y diferencia de atributos entre objetos (Ontario Ministry of Education, 2007). En la figura 2 recogemos un ejemplo de este tipo de patrones, donde cada figura geométrica se diferencia de la anterior en dos atributos (forma y color) y se mantiene el tamaño.



Figura 2. Ejemplo de patrón lógico

Los tipos de patrones presentados no son excluyentes, es decir, un patrón puede ser de varios tipos a la vez. Por ejemplo, un patrón puede ser visual y de repetición. Por lo general, podemos considerar que en todo tipo de patrones matemáticos interviene el razonamiento lógico y que la estructura es lo que determina el patrón. Se dicen isomorfos los patrones de la misma estructura. Por ejemplo, los dos patrones de la figura 3 son isomorfos porque están constituidos por tres elementos diferentes y el patrón es análogo.



Figura 3. Ejemplo de patrones isomorfos

El trabajo con patrones admite varias acciones como descubrir, reproducir, crear, determinar la regla de formación y describirla, encontrar su estructura o representar la estructura simbólicamente. En el caso de los patrones lineales, que dan lugar a una seriación, también se pueden buscar elementos de dicha seriación, bien continuando una parte inicial ya existente o intercalando elementos ausentes. Además, la seriación puede ser construida usando objetos reales, objetos físicos que los estudiantes pueden tomar con sus manos (Lee y Freiman, 2006) o bien dibujados sobre un soporte plano como pantalla de computadora o papel.

SERIACIONES

Unido al trabajo con patrones están las seriaciones, componente fundamental del pensamiento lógico matemático (Piaget, 1968). “Seriar consiste en ordenar colecciones de objetos manteniendo constante unos atributos de los objetos a excepción de otros (uno o varios) que sirven de comparación” (Castro, Del Olmo y Castro, 2002, p. 44). El pensamiento lógico matemático tiene asociadas diferentes capacidades como: identificar, reconocer, comparar, definir, relacionar y operar con las cualidades sensoriales de los objetos (Alsina, 2006; Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Según Piaget (1977), una estructura lógico matemática es una forma de organizar elementos considerando sus atributos. Entre las estructuras lógicas básicas que señalan Piaget e Inhelder (1976) están las seriaciones.

Las seriaciones se pueden formar de acuerdo a los atributos que tienen los elementos a seriar. Por lo general, una seriación es una organización de elementos que atiende a un patrón, a una regularidad. El elemento de repetición o núcleo de una seriación está constituido por el conjunto de menor número de elementos donde se observa el patrón que permite generar la seriación (Castro, 1995). Se pueden distinguir diferentes tipos de seriaciones de acuerdo a los tipos de atributos que se consideran para organizar los objetos que las componen. Así, se distingue entre seriaciones cualitativas y cuantitativas. Las primeras consideran atributos cualitativos como: color, tamaño o forma de los objetos. Las segundas consideran atributos cuantitativos de los objetos como: longitud, peso o volumen. Atendiendo al patrón que las genera, Fernández (2008) diferencia tres tipos de seriaciones que describimos a continuación.

- ◆ Seriaciones reiterativas son aquellas donde existe un núcleo. En la figura 4 presentamos un ejemplo donde el núcleo está conformado por un cuadrado verde y un círculo azul, que se repite constantemente. Se mantienen

otras características como el tamaño. Los elementos del núcleo se diferencian en color y forma.



Figura 4. Ejemplo de seriación reiterativa

- ◆ Seriaciones constantes, en las que cada pieza, objeto o elemento, es igual que el anterior y que su sucesor.
- ◆ Seriaciones no reiterativas, en las que hay un número fijo de diferencias entre elementos consecutivos. Puede haber una sola diferencia (en forma, en color, en tamaño, entre otras) o más (usualmente, dos o tres diferencias). La figura 2 muestra una seriación no reiterativa.

El núcleo del patrón que genera la serie puede permanecer constante en cuanto a cantidad de elementos y atributos que varían o se mantienen, o puede ser variable. Lo primero se da en seriaciones reiterativas y un ejemplo está en la figura 3. En el caso de que el núcleo sea variable, se habla de patrones de desarrollo y el patrón puede ser creciente o decreciente. En un patrón de crecimiento hay un aumento de los elementos al seguir la secuencia, en los de reducción hay una disminución. El patrón 1, 121, 12321, 1234321,... es de crecimiento. Un patrón de crecimiento puede a su vez ser de disminución (o decrecimiento), cambiando el origen y el sentido de lectura de la seriación.

En ocasiones, los criterios para distinguir el tipo de patrón que genera una seriación hacen referencia a los atributos que se utilizan para generar el núcleo del patrón (Owen, 1995). Por ejemplo, la secuencia cuya estructura responde a ABCABCABC..., puede entenderse generada por un patrón reiterativo con un núcleo de longitud tres (ABC) y la secuencia cuya estructura sea del tipo ABcABcABc generada por un patrón de repetición, pero más complejo que el anterior, ya que contiene un núcleo de longitud tres y, además, entre sus elementos hay un cambio de atributo. Se pone así en evidencia que manteniendo constantes unos atributos y variando otros, se añade complejidad a un patrón reiterativo (Threlfall, 1999; Zazkis y Liljedahl, 2002).

Para realizar una seriación se debe entender cómo un elemento se refiere a los elementos que son anteriores y posteriores, aspecto fundamental en la competencia del trabajo con patrones de repetición, o bien identificar el núcleo (Papic, 2015) y continuar la secuencia de acuerdo con él. Según Mulligan y Mitchelmore (2009), en la actividad intervienen una componente cognitiva (reconocimiento de la estructura) y otra meta-cognitiva (la tendencia a buscar, analizar y realizar patrones).

ANTECEDENTES

Numerosos investigadores enfatizan la importancia de los patrones en la enseñanza de las matemáticas (p. ej., Fox, 2005; Lüken, 2012; Mason, 1999) y dan diferentes razones para ello. Algunas de estas razones detallan que el trabajo con patrones es una habilidad que influye en el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en los primeros niveles (Castro-Rodríguez y Castro, 2016). Esta actividad, que incluye la capacidad de identificar y describir los atributos de los objetos y los vínculos de similitudes y diferencias entre ellos, contribuye especialmente al desarrollo de la facultad de comparación, base de las operaciones lógicas de secuenciación y clasificación.

La capacidad de los estudiantes para trabajar con patrones tiene un efecto positivo en el rendimiento en matemáticas de dichos estudiantes (Papic, 2007). Al trabajo con patrones también se le atribuyen otras potencialidades como ser parte integral del desarrollo de las estructuras numéricas (base diez) y aritméticas (aditiva y multiplicativa), de las unidades de medida, del razonamiento proporcional y de la exploración de datos ya que permiten desarrollar estrategia de pensamiento necesarias para la comprensión de dichas operaciones (Zaskis y Liljedahl 2002). El trabajo con patrones mejora las habilidades cognitivas abstractas de los sujetos ya que es un precursor de la capacidad matemática de generalizar (Threlfall, 1999; Warren, Miller y Cooper, 2012).

La conexión del trabajo con patrones y la iniciación al álgebra escolar es admitida tanto por los investigadores que trabajan sobre patrones como por los que se centran en el *early algebra*, argumentando que estos forman una parte importante del proceso de generalización y de la representación simbólica, elementos integrantes del álgebra (p. ej., Blanton y Kaput, 2011; Rodrigues, 2015; Threlfall, 1999). La exploración de patrones lineales conlleva encontrar una relación entre los elementos del patrón y su posición en la serie que genera. Dicha relación se puede utilizar como generalización para encontrar elementos en otras posiciones de la secuencia (Barbosa y Vale, 2015). Mediante experiencias de explorar y discutir patrones, los estudiantes pueden establecer conjeturas y generalizaciones sobre las relaciones matemáticas (Fox, 2005; Papic, 2007). Detectar patrones ayuda a la resolución de problemas, es un paso primordial para el razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007; Pólya, 1945) y contiene la semilla de la demostración (Mason, 1999).

Las estrategias de los estudiantes en su trabajo con patrones se han abordado en diferentes niveles educativos (Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; Rodrigues y Serra, 2015; Threlfall, 1999; Warren, Miller y Cooper, 2012). Threlfall (1999) identifica diferentes estrategias de niños de 3-5 años al extender una seriación siguiendo un patrón: (a) colocar nuevos elementos de forma aleatoria; (b) repetir el último elemento de la seriación (perseverancia); (c) usar los elementos dados, pero en cualquier otro orden; (d) realzar un tramo simétrico reproduciendo inversamente la secuencia dada; y (e) continuar reproduciendo el patrón delibe-

radamente. Papic et al. (2011) identificaron cinco estrategias que usan niños de entre 3-5 años cuando trabajan con patrones de repetición. Estas estrategias, ordenadas de menos a mayor sofisticación, son: (a) disposición aleatoria de los objetos; (b) comparación directa, al copiar un patrón se hace una correspondencia de uno a uno; (c) alternancia, centrándose en dos objetos sucesivos independientemente de la unidad de repetición; (d) unidad básica de repetición, identificación de la unidad de repetición, independientemente del número, tipo y complejidad de elementos y atributos, utilizándola para extender el patrón; y (e) unidad de repetición avanzada, se puede transferir el mismo patrón en diferentes representaciones o materiales.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVO

La revisión de la literatura nos lleva a plantearnos las siguientes preguntas de investigación.

- ◆ ¿Qué tipo de seriaciones generan dos alumnas de 6-7 años?
- ◆ ¿Cuántos atributos consideran en dichas seriaciones?
- ◆ ¿Qué estrategias emplean estas alumnas al continuar las seriaciones?
- ◆ ¿Dependen las estrategias de los atributos considerados?

Estas preguntas nos llevan a plantear el siguiente objetivo general de investigación: indagar sobre los tipos de patrones que generan dos alumnas de 6-7 años en la continuación de seriaciones.

MÉTODO

Esta investigación es de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2007). De acuerdo a los antecedentes revisados, abordamos un problema de investigación del cual se han hecho pocos estudios. Se trata de un estudio de caso porque llevaremos a cabo la indagación a través del análisis del trabajo de dos alumnas de 6-7 años, con el fin de conocer en profundidad el trabajo que realizan los sujetos (Stake, 1999).

Sujetos

Los participantes son dos alumnas (A1 y A2) de 6 y 7 años, que cursaban primero y segundo curso de Educación Primaria, respectivamente, en Granada (España). La selección de estas alumnas fue intencional, con previa autorización de los padres. Las alumnas presentan las siguientes características: ambas tenían un rendimiento medio en sus estudios; pertenecen a familias de clase media; una asiste a un centro público de la zona centro de la ciudad, la otra a un colegio concertado de la zona norte; las dos, tras haber cursado Educación Infantil, tenían

algunos conocimientos previos sobre seriaciones y habían manipulado los bloques lógicos de Dienes (Dienes y Golding, 1971). Aunque pueden considerarse alumnas prototípicas del sistema educativo español, no tenemos intención de generalizar los resultados del estudio.

Materiales

Partimos del material manipulativo conocido como bloques lógicos de Dienes (Dienes y Golding, 1971). Tomamos una variante de este material con la que las alumnas estaban familiarizadas. Una unidad de los bloques lógicos considerados consta de 48 piezas sólidas. Cada pieza se define por cuatro atributos: color, forma, tamaño y textura. Cada atributo presenta las variables siguientes.

- ◆ Color: azul, rojo, verde y amarillo.
- ◆ Forma: cuadrado, círculo y triángulo.
- ◆ Tamaño: grande y pequeño.
- ◆ Textura: liso y rugoso.

Dado que con una unidad de bloques lógicos no es posible construir seriaciones reiterativas (no existen dos piezas con los cuatro atributos iguales), consideramos varias unidades. Cada pieza se diferencia de los demás en uno, dos, tres o cuatro atributos. Este material permite ser manejado sensorialmente por un individuo para fomentar su pensamiento matemático (Swan y Marshall, 2010).

Tareas

Diseñamos las tareas considerando tres variables de tarea que se desprenden del marco conceptual, relacionadas con las seriaciones cualitativas y la noción de patrón. Estas variables son: (a) atributos de los objetos (color, forma, tamaño y textura), (b) número de elementos en el núcleo y (c) variación de atributos entre elementos diferentes. De acuerdo con estas variables de tarea, organizamos los tipos de seriaciones por orden hipotético de dificultad según Threlfall (1999) y Zazkis y Liljedahl (2002). En concreto, diseñamos diez tareas de seriaciones que se corresponden con patrones lógicos. En las primeras seis tareas varían dos atributos y dos se mantienen fijos entre dos elementos consecutivos. En las cuatro siguientes, de mayor complejidad, varían tres atributos y uno se mantiene fijo. Presentamos a las alumnas los dos elementos iniciales de la seriación, y les proponemos continuar poniendo aquellos elementos que consideren van a continuación de los dos presentados. La figura 5 muestra los dos elementos iniciales de una de las tareas de seriaciones propuestas. Estos elementos responden a una seriación donde el patrón que la genera corresponde a una variación de dos atributos —color (verde a amarillo) y forma—, y se mantienen otros dos —tamaño y textura— entre los dos elementos consecutivos.



Figura 5. Elementos iniciales en una tarea de seriación

Después de una primera propuesta para continuar la seriación y el razonamiento correspondiente de la alumna, les preguntamos sobre las diferencias y semejanzas entre los objetos presentados, haciendo hincapié en la acción que han de realizar, se trata de continuar la serie poniendo piezas de acuerdo con un criterio que incluya a las piezas ya colocadas.

Entrevistas

Las alumnas realizaron las tareas durante una entrevista semiestructurada individual, con una duración de 90 minutos, fuera de su horario escolar. El primer autor de este trabajo realizó la entrevista y la segunda autora llevó a cabo la recogida de datos con video cámara y grabadora audio, además tomó fotos y anotaciones.

Utilizamos un protocolo de entrevista con posibles preguntas, compuesto de dos partes: (a) preguntas que invitaban a las alumnas a continuar seriaciones diferentes a las reiterativas (p. ej., ¿qué sucede de un elemento (pieza) a otro?; ¿en qué son iguales y en qué se diferencian?; de acuerdo a lo que tú me has dicho, ¿qué otro elemento pondrías a continuación?) y (b) preguntas que les incitaban a explicar las seriaciones construidas (p. ej., ¿por qué continuaste con ese elemento?, ¿por qué ordenaste los elementos de esa forma?).

Categorías de análisis

Las categorías que empleamos para el análisis de los datos surgen del marco conceptual del estudio y son las siguientes.

- ◆ Tipo de seriación: reiterativa versus no reiterativa.
- ◆ Número de elementos que presenta el núcleo del patrón.
- ◆ Atributos que cambian o se mantienen entre los elementos del núcleo del patrón que genera la seriación: número y tipo (color, forma, tamaño y textura).

RESULTADOS

Mostramos resultados generales de las seriaciones continuadas por las alumnas A1 y A2 en las diez tareas propuestas. Posteriormente mostramos algunos ejemplos de los patrones generados para continuar seriaciones y diálogos mantenidos durante las entrevistas. Los ejemplos y diálogos han sido seleccionados por considerarlos más representativos y que informan mejor acerca del objetivo de investigación.

Resultados generales A1

A1 continuó seriaciones reiterativas y no reiterativas en las tareas propuestas, atendiendo a diferente número de elementos en el núcleo del patrón (uno, dos y cinco). Resumimos estos resultados en la tabla 1.

Tabla 1

Tipos de seriaciones continuadas por A1

Número de elementos en el núcleo	Tareas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Seriaciones reiterativas										
2	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓
5	✓									
Seriaciones no reiterativas										
1	✓	✓				✓	✓			

Nota. ✓=se observa.

En la tabla 1 se observa que A1 continuó seriaciones reiterativas de dos elementos en el núcleo en 9 de 10 tareas. En la tarea 1 continuó seriaciones de dos y cinco elementos en el núcleo. Estas seriaciones las realizó espontáneamente, sin intervención del entrevistador.

Continuó seriaciones no reiterativas de un elemento en el núcleo en cuatro de las tareas (1, 2, 6 y 7), realizándolas con intervención del entrevistador.

En la tarea 6 continuó con una seriación no reiterativa y en las tareas 1, 2 y 7 continuó con seriaciones reiterativas y no reiterativas.

Hay una tendencia de A1 a la continuación de seriaciones reiterativas de dos elementos en el núcleo en casi todas las tareas. Solo en la tarea 6 continuó una seriación no reiterativa. Para estas seriaciones, A1 generó un patrón de repetición, repitiendo en ocasiones los dos elementos iniciales de la tarea (1, 2) y en otras tareas (3, 4, 5, 7, 8, 9, 10) repitiendo tres atributos —color, tamaño y textura— de estos elementos.

Ejemplo de patrones y entrevista A1

Mostramos ejemplos del trabajo de A1 en las tareas 1 y 2 porque dan evidencia de diferentes tipos de seriaciones y patrones.

En la figura 6 mostramos tres instantes del trabajo de A1 en la tarea 1. En esta tarea los dos elementos iniciales variaban los atributos —forma (cuadrado-círculo), color (verde-amarillo)— y se mantenían fijos —tamaño (grande) y textura (liso)—. A1 inicialmente logró identificar los atributos que variaban y se mantenían fijos en estos dos elementos iniciales. Cuando se le propuso continuar la seriación, generó un patrón de repetición con los dos elementos iniciales como

núcleo. De esta manera continuó una seriación reiterativa de dos elementos en el núcleo (imagen izquierda, figura 6).

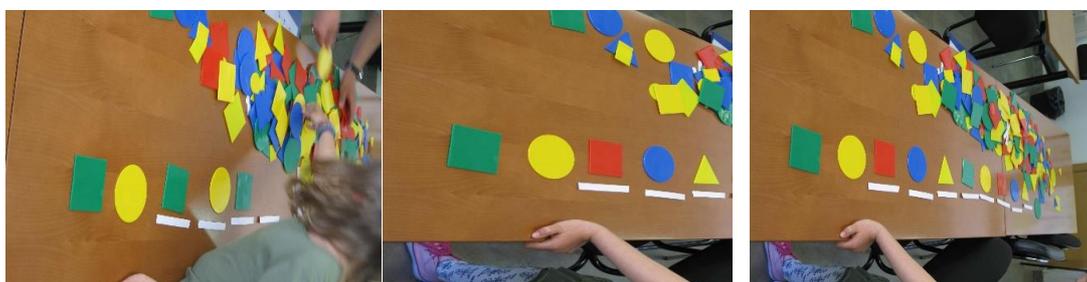


Figura 6. Seriaciones reiterativas y no reiterativas en tarea 1

El entrevistador, al observar que A1 había continuado una seriación reiterativa, la orientó a través de preguntas relativas a las diferencias e igualdades de atributos de los dos elementos iniciales, para que generara un patrón lógico. A través de esa orientación, A1 continuó la seriación no reiterativa de acuerdo al patrón lógico (imagen central, figura 6), los elementos se diferencian entre sí en los atributos —color y forma— y se mantienen iguales —tamaño y textura (liso)—. Comprobamos lo anterior en el siguiente fragmento de entrevista. En él se muestra la orientación del entrevistador y el patrón generado por A1 para continuar la seriación. A1 enfatizó en el cambio de atributos —forma y color— y aquel que se mantiene igual —tamaño—.

1. *E:* Mira, siempre tienes que fijarte de aquí a aquí (indica con el dedo el segundo y tercer elemento, imagen izquierda, figura 6.) ¿En qué cambia?
2. *A1:* En forma y color.
3. *E:* Entonces, ¿qué otro elemento me puede servir ahí (indicando al tercer elemento, imagen izquierda, figura 6)?, ¿solamente el verde?
4. *A1:* No, la roja.
5. *E:* ¿Esa? (le muestra un cuadrado rojo grande liso). ¿Por qué la roja?
6. *A1:* Porque tiene el mismo tamaño y solo cambia el color.
7. *E:* ¿Solo cambia el color? ¿Y qué más cambia?
8. *A1:* Los vértices.

A continuación, el entrevistador pidió a A1 que continuara la seriación por sí misma. Al igual que al inicio de la tarea, generó otro patrón de repetición, esta vez considerando un núcleo compuesto por los cinco elementos que formaban la seriación (los cinco elementos de la imagen central, figura 6), continuando una seriación reiterativa de cinco elementos en el núcleo (imagen derecha, figura 6). El siguiente fragmento muestra que A1 se refiere a la seriación reiterativa que continuó, además se observa que identificó el núcleo del patrón generado.

9. *E:* ¿Por qué hiciste eso?

10. A1: Porque parece una serie.

11. E: ¿Cuáles son las figuras que parecen una serie?

12. A1: Cuadrado, círculo, cuadrado, círculo, triángulo.

La figura 7 muestra dos instantes del trabajo de A1 en la tarea 2. En esta tarea los dos elementos iniciales variaban los atributos —forma (cuadrado-círculo) y tamaño (grande-pequeño)— y se mantenían fijos —color (azul) y textura (liso)—. A1 inicialmente logró identificar los atributos que variaban y se mantenían fijos en estos dos elementos iniciales. Cuando se le propuso continuar la seriación, generó un patrón de repetición considerando los dos elementos iniciales como núcleo. A1 repitió los dos elementos iniciales, manteniendo iguales sus atributos (imagen izquierda, figura 7). Cuando se le preguntó sobre su propuesta A1, tenía claro que debía continuar la seriación de acuerdo al patrón de repetir los dos elementos iniciales con sus mismos atributos al igual que en la tarea anterior, porque lo había trabajado en el colegio ya que cuando el entrevistador le pregunta si es como la que hace en el colegio, A1 responde “es que no sé hacer otra más”.

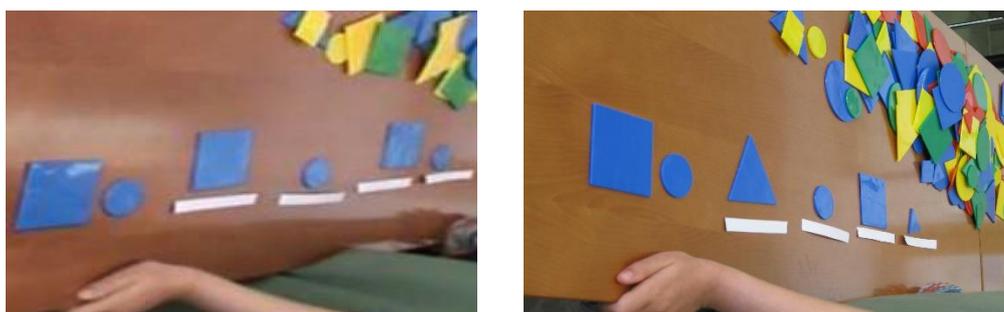


Figura 7. Seriaciones reiterativa de dos elementos en el núcleo en tarea 2

Posteriormente, el entrevistador le pidió fijarse en las diferencias e igualdad de atributos que observara entre los elementos, para que generara un patrón lógico y así continuar una seriación no reiterativa. Ante esta intervención A1 logró generar un patrón lógico continuando una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo, cambiando la —forma y tamaño— y manteniendo iguales —color (azul), textura (liso)— entre elementos consecutivos (imagen derecha, figura 7). Aunque esta seriación se podría considerar como reiterativa de dos elementos en el núcleo en la que se reitera el tamaño, el color y la textura y solo cambia la forma cada dos elementos, en la justificación de su propuesta durante la entrevista, evidenciamos el patrón lógico generado. A1 aludió al cambio de atributos —tamaño y forma— y aquel que se mantiene igual —color— entre elementos. El siguiente fragmento de entrevista detalla la intervención del entrevistador y el patrón lógico de un elemento en el núcleo empleado por A1 para continuar la seriación no reiterativa.

13. E: Fíjate... ¿Qué cambia aquí? (señalando los dos primeros elementos de la imagen izquierda, figura 7).

- 14. *AI:* La figura.
- 15. *E:* Entonces, ¿puedes poner otra figura que no sea el cuadrado grande azul?
- 16. *AI:* Sí.
- 17. *E:* A ver pon otra (la alumna ubica los elementos que se ven en la imagen derecha, figura 7)... ¿Por qué hiciste eso?
- 18. *AI:* Son azules y cambian de forma.
- 19. *E:* ¿Y qué más cambia?
- 20. *AI:* Los vértices.
- 21. *E:* Pero son lo mismo que la forma. ¿Cambia el tamaño?
- 22. *AI:* Sí.

Resultados generales A2

A2 continuó seriaciones reiterativas y no reiterativas en las tareas propuestas, atendiendo a diferente número de elementos en el núcleo (uno, dos y cuatro). Resumimos estos resultados en la tabla 2.

Tabla 2
Tipos de seriaciones continuadas por A2

Número de elementos en el núcleo	Tareas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Seriaciones reiterativas										
2				✓		✓	✓	✓	✓	✓
4				✓						
Seriaciones no reiterativas										
1	✓	✓	✓		✓			✓		

Nota. ✓=se observa.

En la tabla 2 se observa que A2 continuó seriaciones reiterativas en más de la mitad de las tareas (4, 6, 7, 8, 9, 10). En estas tareas, consideró núcleos de dos elementos. En la tarea 4 tuvo en cuenta un núcleo de dos y cuatro elementos. Estas seriaciones las realizó espontáneamente, sin intervención del entrevistador.

Por otro lado, continuó seriaciones no reiterativas en la mitad de las tareas propuestas (tareas 1, 2, 3, 5 y 8), en todas ellas de un elemento en el núcleo. Por lo general, estas seriaciones las continuó espontáneamente, requiriendo poca orientación del entrevistador. Además, A2 continuó una seriación reiterativa y otra no reiterativa en la tarea 8.

En las seriaciones reiterativas, A2 generó un patrón de repetición, repitiendo los dos elementos iniciales (tareas 4, 6 y 8), o los tres atributos de estos elementos (tareas 7, 9 y 10).

Ejemplos de patrones y entrevista A2

Mostramos ejemplos del trabajo de A2 en las tareas 4 y 8 porque dan evidencia de diferentes tipos de seriaciones y patrones.

La figura 8 muestra dos formas de continuar seriaciones reiterativas de A2 en la tarea 4, de dos y cuatro elementos en el núcleo. En esta tarea los dos elementos iniciales variaban los atributos —tamaño (grande-pequeño) y textura (liso-rugoso)— y se mantenían fijos —color (amarillo) y forma—. A2 identificó los atributos que variaban y los que se mantenían entre los dos elementos iniciales. Cuando se le propuso continuar la seriación, inicialmente generó un patrón de repetición con los dos elementos iniciales como núcleo, manteniendo tres atributos —color, tamaño y textura— y cambiando un atributo —forma— (imagen izquierda, figura 8). Posteriormente, el entrevistador le solicitó que continuara la seriación para indagar sobre el patrón empleado. A2 continuó la seriación generando un nuevo patrón reiterativo, de modo que repitió los cuatro elementos, que conformaban la seriación hasta ese momento, manteniendo iguales sus atributos (imagen derecha, figura 8). El siguiente fragmento confirma lo anterior, dando cuenta además, del núcleo que identifica A2.

El entrevistador pregunta a A2 después de que continuara la seriación reiterativa, con el fin de que confirmara el patrón generado.

23. E: ¿Por qué continuaste de esa forma?
24. A2: Es como una serie (señalando a los cuadrados y a los círculos de la imagen derecha, figura 8).
25. E: ¿Cuál es esa serie?
26. A2: Cuadrado, círculo, cuadrado, círculo (señalando por cada término —cuadrado o círculo— a dos elementos de la seriación, imagen derecha, figura 8).

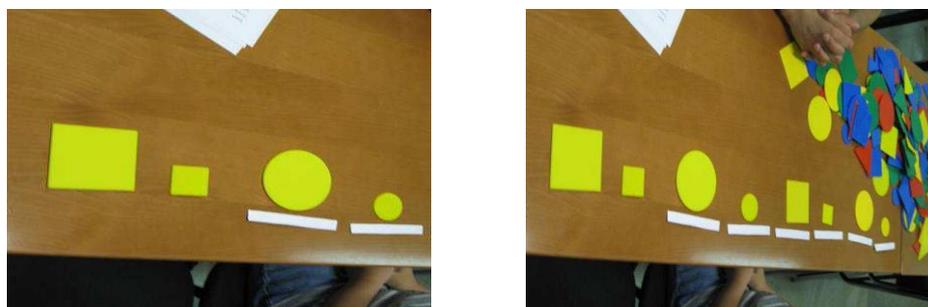


Figura 8. Seriaciones reiterativas en tarea 4

La figura 9 muestra dos momentos del trabajo de la alumna A2 en la tarea 8. En esta tarea, los dos elementos iniciales variaban los atributos —color, tamaño y

textura (liso a rugoso)— y se mantenía la misma forma. La alumna A2 logró identificar los atributos que variaban y se mantenían fijos en estos dos elementos iniciales. Cuando se le propuso continuar la seriación en esta tarea A2 inicialmente generó un patrón de repetición considerando como núcleo los dos elementos iniciales manteniendo los atributos —color, tamaño y textura— y manteniendo —forma— (imagen izquierda, figura 9). De esta manera A2 continuó una seriación reiterativa de dos elementos en el núcleo.



Figura 9. Seriaciones reiterativa (imagen izquierda) y no reiterativa (imagen derecha) en tarea 8

Luego, el entrevistador, para llevar a A2 a generar un patrón lógico y continuarlo, y así seguir una seriación no reiterativa, cambió algunos elementos de la seriación que la alumna había ubicado inicialmente y, a través de preguntas, A2 logró generar este patrón, continuando una seriación no reiterativa de un elemento en el núcleo (imagen derecha, figura 9). El siguiente fragmento de entrevista evidencia que A2 da cuenta del patrón lógico generado para continuar esta seriación orientada por el entrevistador. A2 enfatizó en el cambio de atributos —color y textura— existente entre los elementos.

27. E: Si hacemos esto (cambia el tercer elemento, un círculo rojo pequeño rugoso [imagen izquierda, figura 9], por un círculo verde pequeño rugoso) ¿está bien?
28. A2: Sí.
29. E: ¿Por qué?
30. A2: Porque cambia de color.
31. E: Y si hacemos esto (cambia el elemento el tercer elemento [imagen derecha, figura 7] por un círculo verde pequeño liso) ¿lo podemos hacer?
32. A2: No, porque no es rugoso.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Hemos presentado diversos tipos de patrones que generan dos alumnas de 6 y 7 años de edad con bloques lógicos. Los patrones generados aluden a patrones de

repetición y patrones lógicos, permitiendo la continuación de seriaciones reiterativas y no reiterativas, respectivamente. Las diversas acciones y capacidades asociadas al pensamiento lógico matemático como: manipulación de elementos, identificación, descripción y diferenciación de atributos entre elementos, ayudaron a generar patrones y extender tales seriaciones por parte de las alumnas. Ambas alumnas lograron identificar los atributos que variaban y aquellos iguales en los objetos.

Generalmente, ambas alumnas manifestaron haber encontrado un patrón y lo explicaron de forma adecuada. A estas edades ya existe una predisposición para la búsqueda de justificaciones verbales respecto a las aserciones realizadas por los estudiantes (Piaget, 1977). Por tanto, el lenguaje verbal no supuso un obstáculo para comunicar y justificar los patrones y seriaciones continuadas.

Evidenciamos que A1 tendió a generar patrones de repetición, continuando seriaciones reiterativas. Consideraba los dos elementos iniciales de la seriación como núcleo, repitiéndolos y manteniendo iguales sus atributos, o al menos tres de ellos (color, tamaño y textura).

Destacamos que A1 logró continuar seriaciones no reiterativas pero con orientación del entrevistador. A través de preguntas relativas a las diferencias e igualdad de atributos de los dos primeros elementos iniciales de la seriación, pudo generar y continuar un patrón lógico y seguir una seriaciones no reiterativa.

En A2 no hubo una tendencia en generar algún tipo de patrón ya sea de repetición o lógico. A2, al igual que A1 para continuar seriaciones reiterativas, consideró los dos elementos iniciales como núcleo, manteniendo en ocasiones sus mismos atributos y en otras ocasiones mantuvo tres atributos (tamaño, forma y textura). En las primeras tareas (1, 2, 3 y 5) logró generar un patrón lógico y continuar seriaciones no reiterativas de un elemento en el núcleo sin ayuda del entrevistador. Sin embargo, a medida que avanzaba el número de tareas requirió ayuda del entrevistador (tarea 8), porque en algunas generó un patrón de repetición, continuando seriaciones reiterativas. Suponemos que esto se debió al aumento en la variación de atributos ya que a partir de la tarea 7 en adelante fueron tres los atributos que variaban entre los elementos, tornándose más complejo para que A2 se centrara en un patrón lógico y continuar una seriación no reiterativa (Threlfall, 1999; Zazkis y Liljedahl, 2002). A partir de este estudio sería importante profundizar y determinar los niveles de complejidad de las tareas y los factores de los que depende, abarcando una mayor cantidad de sujetos.

Consideramos llamativo el hecho de que ambas alumnas entiendan que serie es aquella repetición de un grupo de elementos manteniendo sus mismos atributos. Este hecho se debe al trabajo sobre patrones realizado en niveles escolares previos. Creemos que esto influyó en que las alumnas se centraran en el patrón de repetición, sobre el patrón lógico, para continuar seriaciones. Por tanto, es importante que desde los primeros niveles educativos se fomente el trabajo con patrones lógicos para la continuación o construcción de seriaciones no reiterativas,

como forma de que no relacionen la idea de patrón únicamente con el patrón de repetición.

Ambas alumnas emplearon estrategias similares cuando continuaron un patrón reiterativo. Ambas fueron capaces de identificar el núcleo (Papic et al., 2011) como se observa en la línea 12 (A1) y 26 (A2), y reprodujeron deliberadamente el patrón (Threlfall, 1999) como se observa en la imagen izquierda y derecha de la figura 6 (A1) e imagen derecha de la figura 8 (A2). Estas estrategias son las más sofisticadas encontradas por los autores citados anteriormente, en niños de entre 3 y 5 años, por tanto, era de esperar que estas alumnas manifestaran este tipo de estrategias.

No hay duda de que la capacidad de pensar lógicamente es una piedra angular de la matemática. De ahí la relevancia de trabajar con patrones. No obstante, es necesario poner atención a este trabajo dado que los escolares pueden tener éxito en la generación o continua repetición de patrones utilizando un enfoque procedimental o recursivo, sin pensar en la estructura del patrón, necesaria como paso hacia la generalización y el álgebra (Zazkis y Liljedahl, 2002). Es importante que en el trabajo con patrones se haga hincapié en el núcleo del mismo, la estructura que presenta, la codificación de los patrones que no depende del material utilizado (en el sentido de que podrían transferir el mismo patrón a diferentes modos o materiales) o la evolución en el nivel de complejidad de los patrones. Todas ellas son variables a considerar en el trabajo con patrones y seriaciones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del plan nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y con el apoyo de una beca CONICYT PFCHA 72150072, otorgada por el gobierno de Chile.

REFERENCIAS

- Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona, España: Octaedro.
- Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, 10, 57-70.
- Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Heidelberg Springer.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 69-81.

- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada, España: Comares.
- Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67.
- Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico matemático. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 87-107). Madrid, España: Pirámide.
- Castro, E., del Olmo, M. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Dienes Z. y Golding, E. (1971). *Lógica y juegos lógicos*. Barcelona, España: Teide.
- Fernández, J. (2008). *Desarrollo del pensamiento lógico matemático*. Madrid, España: Grupo Mayéutica-Educación.
- Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 313-320). Melbourne, Australia: PME.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2007). *Fundamentos de metodología de la investigación*. México, D. F: Editorial Mcgraw-Hill.
- Lee, L. y Freiman, V. (2006). Developing algebraic thinking through. Pattern exploration. *Mathematics teaching in the middle school*, 11(9), 428-433.
- Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 26(3), 24-42.
- Lüken, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA*, 7(1), 41-50.
- Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, 4(3), 232-246.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, 19349-19420.
- Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33-49. doi: 10.1007/BF03217544
- Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2012). Developing pedagogical strategies to promote structural thinking in early mathematics. En J. Dindyal, L. Pien Cheng y S. Fong Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 529-536). Adelaide, Australia: MERGA.
- Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29-45). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Ontario Ministry of Education (2007). *A guide to effective instruction in mathematics. Kindergarten to grade 3. Patterning and algebra*. Ontario, Canadá: Autor.
- Owen, A. (1995). In search of the unknown: A review of primary algebra. En J. Anghileri (Ed.), *Children's mathematical thinking in the primary years* (pp. 124-148). Londres, Reino Unido: Cassell.
- Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(3), 8.
- Papic, M. (2015). An early mathematical patterning assessment: Identifying young Australian indigenous children's patterning skills. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 519-534. doi: 10.1007/s13394-015-0149-8
- Papic, M., Mulligan, T. y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the developing of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268. doi: 10.5951/jresematheduc.42.3.0237
- Piaget, J. (1968). Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia. En J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonne, A. Lichnerowicz, G. Choquet y C. Gattegno, *La enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-28). Madrid, España: Aguilar.
- Piaget, J. (1977). *Seis estudios de psicología*. Barcelona, España: Seix Barral.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1976). *Génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificaciones y seriaciones*. Buenos Aires, Argentina: Guadalupe.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376-396. doi: 10.1080/15248372.2012.689897
- Rodrigues, M. y Serra, P. (2015). Generalizing repeating patterns: A study with children aged four. En I. Sahn, S. A. Kiray y S. Alan (Eds), *Proceeding of book International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology* (pp. 120-134). Antalya, Turquía: ICEMST.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(29), 611-616.
- Swan, P. y Marshall, L. (2010). Manipulative materials. *APMC*, 15(2), 13-19.
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Londres, Reino Unido: Cassell.
- Thornton, S. (2001). A picture is worth a thousand words. En A. Rogerson (Ed.), *New ideas in mathematics education: Proceedings of the International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project* (pp. 251-256). Palm Cove, Australia: ALMA.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2012). Repeating patterns: strategies to assist young students to generalise the mathematical structure. *Australasian Journal of Early Childhood*, 37(3), 111-120.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402. doi: 10.1023/A:1020291317178

Rodolfo Morales
Universidad de Granada
alefut7@hotmail.com

María C. Cañadas
Universidad de Granada
mconsu@ugr.es

Encarnación Castro
Universidad de Granada
encastro@ugr.es

Recibido: Marzo de 2017. Aceptado: Mayo de 2017.

Handle: <http://hdl.handle.net/10481/47545>