Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada

M. Elena Herrera, M. Victoria Velasco y Juan F. Ruiz-Hidalgo

Con la intención inicial de poner de manifiesto la dificultad en la selección de libros de referencia para recomendar en los primeros cursos de cálculo, se plantea una investigación en la que el concepto de derivada y los resultados esenciales del Cálculo Diferencial se comparan en dos textos de cálculo clásicos. Siguiendo una metodología de análisis de textos y utilizando la técnica del análisis de contenido, se establecen categorías de análisis que permiten concluir que, en muchos conceptos y resultados básicos relativos al cálculo diferencial, los significados que se manifiestan en los distintos textos pueden llegar a ser muy diferentes.

Términos clave: Cálculo diferencial; Derivada; Libros texto; Significado

Comparing Textbooks of Calculus: The Case of the Derivative

With the initial aim of highlighting the difficulty in selecting reference books for undergraduate students of the first years of Calculus, we propose a research work to compare the notion of the derivative and many essential results of Differential Calculus in two classical texts. By following a rigorous methodology for analyzing texts and using the technique of content analysis, we establish categories of analysis to conclude that meanings of many concepts and basic results, in our case about Differential Calculus, can be very different in both texts.

Keywords: Derivative, Differential calculus; Meaning; Textbooks

El Cálculo Diferencial es uno de los contenidos centrales que se imparten en la asignatura de Matemáticas de los últimos cursos de la educación preuniversitaria, y de los primeros cursos universitarios de los grados científicos y técnicos. El Cálculo en general, y por tanto esta parte del mismo, es una de las materias que presenta mayores dificultades de aprendizaje para los estudiantes, lo que se ve reflejado en la alta tasa de fracaso escolar que tradicionalmente se ha asociado a esta disciplina. Desde hace algunos años se han venido desarrollando y

Herrera, M., Velasco, M y Ruiz-Hidalgo, J. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA, 11*(4), 280-306.

consolidando grupos de trabajo que intentan mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos relacionados con el Análisis Matemático.

Este trabajo se enmarca en el ámbito del llamado Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). A modo de síntesis de la problemática abordada por el PMA, se puede apuntar que una fuente de dificultad principal reside en que las ideas intuitivas de los estudiantes entran en conflicto con las definiciones formales de los conceptos matemáticos. Además de considerar los aspectos cognitivos, la investigación en PMA se ha centrado en aspectos epistemológicos del Cálculo, en el papel que las tecnologías juegan en la enseñanza (especialmente en la visualización), en la historia y génesis de los conceptos, en el papel del profesor, o en los problemas en la transición entre la enseñanza secundaria y la universitaria (Tall, 1991; Kidron, 2014).

En el marco de la Educación Matemática, el estudio de los textos se considera fundamental porque el libro de texto es apoyo del saber, en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; y es a la vez instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de una disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes (Choppin, 1980). Otro aspecto básico a tener en cuenta en el estudio de los libros de texto escolares es que son más influyentes en las prácticas docentes que, incluso, los decretos legislativos (Schubring, 1987).

Este trabajo consiste en la comparación de dos textos universitarios clásicos de Cálculo Infinitesimal, centrando la atención en el Cálculo Diferencial, entendiendo que este núcleo temático constituye una parte básica de la disciplina. Siguiendo la línea del análisis textual, focalizada en la descripción, evaluación o caracterización del contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica (Gómez, 2011), hemos utilizado el análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011) para organizarlo mediante categorías que describen los diferentes elementos propios de los libros de matemáticas (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Tras realizar un estudio de los textos recomendados en las asignaturas de Cálculo de los grados de Matemáticas de las universidades españolas, analizando la bibliografía de las guías docentes de las asignaturas, optamos por seleccionar dos de ellos: Spivak (2012), en tercera edición en español, y Larson y Edwards (2010), en su novena edición en español (figura 1). Este proceso está descrito en la metodología.

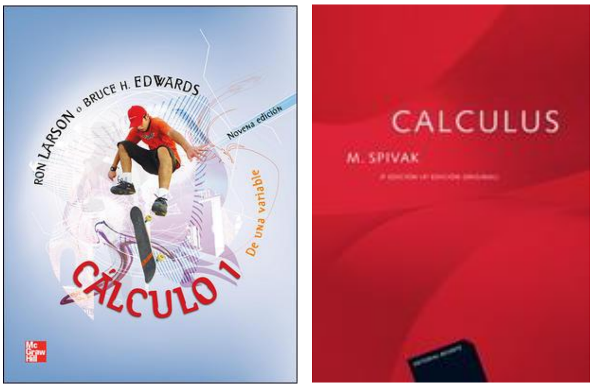


Figura 1. Portadas de las ediciones usadas en los textos analizados

En relación a los textos seleccionados, los objetivos planteados han sido dos: (a) detectar semejanzas y diferencias en el contenido de los textos y en los aspectos de aprendizaje que manifiestan y (b) describir los elementos estructurales de los textos.

Las hipótesis de partida de nuestro estudio fueron las siguientes:

- Los propósitos de los autores de los textos condicionan el contenido y la metodología de los mismos.
- La organización de los contenidos matemáticos y de los resultados más relevantes es similar en todos los textos.

Para poder validar las hipótesis y desarrollar los objetivos, se ha organizado el trabajo de la siguiente forma: se ha partido de una fundamentación teórica que se ha realizado repasando los trabajos previos sobre manuales de matemáticas, destacando los más relacionados con el cálculo infinitesimal (propios de los primeros cursos de enseñanza universitaria). Posteriormente, se eligen las categorías con las que se analizan los textos y se expresan los resultados atendiendo a ellas. Finalmente, se cierra el trabajo con las conclusiones.

Antecedentes sobre el análisis de manuales de matemáticas

Como elemento importante de análisis en la Educación Matemática, la mayoría de los estudios sobre manuales que se han efectuado están centrados en las etapas educativas de primaria y secundaria. Según destacan González y Sierra (2002), un trabajo muy relevante sobre el uso que se hace de los libros de texto en diferentes países es de Howson (1995). También indican que los trabajos sobre los libros de texto, y no sobre el uso que se hace de ellos, son más numerosos y suelen basarse en la noción de transposición didáctica para analizar cómo los libros organizan el saber matemático para que sea enseñado.

Merecen especial mención el trabajo de Van Dormolen (1986), en el que se clasifican los elementos imprescindibles de un libro de texto de Matemáticas; y el de Lowe y Pimm (1996) en el que se establecen las relaciones entre lector-escritor-profesor-libro como elemento básico que determina el uso de un libro de texto. Otras referencias que consideramos imprescindibles desde la metodología del análisis histórico son los de Dhombres (1984) y Schubring (1987). Y sobre los procesos utilizados para que los alumnos comprendan los contenidos matemáticos merecen ser citadas las de Filloy y Rojano (1984) o Puig (1994).

Entre los trabajos que estudian los libros de texto de Matemáticas destacamos el de Bravo y Cantoral (2012), en el que se considera el esfuerzo didáctico que realizan los autores para que el contenido matemático pueda ser aprendido por los lectores. En este trabajo, los autores revisan ocho textos, incluyendo Larson y Edwards (2010), y concluyen que todos salvo uno se ajustan al esquema general que se presenta en la figura 2.

Figura 2. Esquema general de los libros de texto de cálculo (Bravo y Cantoral, 2012, p. 95)

Dolores (2004) realiza un análisis sobre la enseñanza de la derivada contemplada desde los libros de textos más usuales y desde los programas curriculares. Destaca dos tendencias sobre la enseñanza de la derivada en cursos preuniversitarios: por un lado, la prioridad de la estructura del contenido (enfoques algebraico, numérico, formal o infinitesimalista) y, por otro, la tendencia innovadora (enfoque geométrico o enfoque variacional).

González y Sierra (2002), investigando sobre los libros de texto de Matemáticas españoles del siglo XX, en el ámbito de la enseñanza secundaria, centran su atención en los contenidos de Análisis Matemático. Clasifican los libros siguiendo tres perfiles: los libros expositivos, que consideran el conocimiento matemático como acumulación de contenidos y que enfatizan la estructura matemática del contenido; los libros tecnológicos, que consideran las matemáticas como compendio de técnicas y destrezas aplicables; y los libros comprensivos, en los que se considera que el aprendizaje de las matemáticas se realiza estableciendo relaciones entre conceptos matemáticos. La orientación del análisis matemático en los libros de texto de secundaria, en España durante el siglo XX, no depende del plan de estudios. Independientemente del período al que pertenezcan, groso modo hay el mismo número de libros que enfatizan los conceptos y el rigor (expositivos) que libros que se centran en las destrezas y algoritmos (tecnológicos).

El trabajo anterior se complementa con un estudio de los mismos autores (González y Sierra, 2004), donde se analiza la evolución del concepto de punto crítico en los libros de texto españoles del siglo XX. Los hallazgos destacan tres tipos de definiciones de punto crítico: funcionales, regladas y gráficas. Se concluye que el uso de las gráficas es estático, utilizándose en el resultado final y, que en general, predomina el lenguaje algebraico.

Por último, señalamos el trabajo de González-Ruiz, Ruiz-Hidalgo y Molina (2014) donde se estudia la influencia de los conceptos topológicos elementales en las definiciones de límite finito de una función en un punto. Entre cuatro manuales, entre los que se encuentran Larson y Edwards (2010) y Spivak (2012) se realiza un estudio descriptivo de características externas y otro de características internas y un análisis del contenido de las obras. Los resultados se pueden resumir diciendo que hay mayor número de ellos que no aportan información suficiente sobre conceptos topológicos necesarios para presentar con rigor la definición de límite funcional.

ASPECTOS TEÓRICOS

El proceso de análisis del contenido de los textos ha seguido una secuencia disciplinar de los mismos. Este análisis de contenido está “centrado en subrayar y explicar determinados aspectos de las matemáticas escolares que, desde el punto de vista didáctico, son de interés para la investigación” (Picado y Rico, 2011, p. 12).

Durante el proceso de análisis surgieron las siguientes categorías: notación, terminología, conceptos, relaciones y estructuras matemáticas (incluyendo aspectos de rigor), uso de representaciones gráficas, y ejemplos y aplicaciones. Estas categorías, pertenecen al marco propuesto por Rico (1997) de organizadores de currículo, en concordancia con la noción de significado semántico expresada en Rico (2012) y Rico y Moreno (2016).

Según este marco, el significado de un contenido matemático se puede organizar siguiendo la terna estructura conceptual-sistemas de representación-modos de uso, y está basado en la noción de significado propuesta por Frege (1996) a finales del siglo XIX.

Organización del contenido matemático

En esta noción de significado de un contenido matemático, a su vez, realizamos una discriminación en componentes de cada uno de los organizadores anteriores.

En la estructura conceptual se consideran los aspectos específicamente matemáticos de cada concepto, que suelen organizarse bien de forma disciplinar o bien cognitivamente. Nosotros hemos optado por una organización cognitiva del contenido porque se ajusta a las categorías que han aparecido en el transcurso del estudio. Esta organización cognitiva divide el contenido matemático en dos grandes campos: el conceptual y el procedimental —Hiebert y Lefevre (1986), citado por Rico (1997). A su vez, cada uno de estos campos se ordena en tres niveles como se puede observar en la tabla 1.

Tabla 1
Sistema de categorías para el contenido matemático

Ámbito	Conceptual	Procedimental
Primer nivel	Hechos	Destrezas
Segundo nivel	Conceptos	Razonamientos
Tercer nivel	Estructuras conceptuales	Estrategias

Nota. Fuente: (Fernández-Plaza, 2016, p. 105).

Destacamos, entre todas, las categorías surgidas en nuestro análisis: notaciones y términos, conceptos y las relaciones entre ellos —la estructura conceptual—, y destrezas.

La notación y la terminología son categorías que identifican unidades de información de los conceptos. Las notaciones son los símbolos que hacen presentes los conceptos y mediante las que se expresan propiedades, relaciones y operaciones. La terminología abarca los vocablos, palabras y expresiones con las que se denotan los objetos, nociones, relaciones y operaciones. La estructura matemática y las relaciones corresponden a un nivel de organización del contenido matemático más complejo. Mientras que las relaciones se establecen entre los conceptos matemáticos en forma de teoremas o proposiciones, las estructuras incluyen a los conceptos, sus transformaciones y sus propiedades (Fernández-Plaza, 2016).

Los sistemas de reglas y notaciones, y de imágenes, que hacen presentes los contenidos son los sistemas de representación. Este organizador comprende los sistemas de reglas y notaciones, símbolos, imágenes y gráficos que permiten expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto matemático (Castro y Castro, 1997; Lupiáñez, 2016). En el caso de este trabajo, se han considerado las representaciones gráficas.

Por último, los ejemplos y las aplicaciones propuestas pertenecen al tercer organizador denominado *modos de uso*. Los fenómenos, los contextos, las situaciones y las aplicaciones proporcionan utilidad al contenido matemático (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015; Ruiz-Hidalgo, 2016).

Metodología

El análisis comparativo, o la evaluación cualitativa de libros de texto, es una tarea que se realiza en muchas disciplinas y es, en historia de la ciencia, un instrumento para rastrear la difusión de las nuevas ideas y para analizar aspectos de la práctica docente. Además de las tareas previas de delimitación de objetivos, contextualización histórica de la disciplina y de los libros, selección de textos y selección de contenidos a comparar, un estudio de este tipo suele contener tres aspectos clave: comparativa de aspectos generales, comparación de contenidos concretos y adecuación de los textos a la docencia (Ibáñez y Llombart, 2002).

El estudio comparativo contempla aspectos generales (prefación, objetivos, perfil del lector, metodología, …) y la comparación de los contenidos seleccionados comparando los resultados y conceptos más relevantes, tales como definiciones, teoremas, demostraciones y propiedades.

Sobre el estudio comparativo

Para la comparación de contenidos existen diversas propuestas, muchas de ellas basadas en dos líneas principales: el análisis textual y el análisis epistemológico. El tipo de análisis en el que estamos más interesados es el primero, cuyo objetivo es la descripción, evaluación o caracterización del contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica (Gómez, 2011).

El análisis textual no tiene un marco teórico comúnmente aceptado, aunque cuando se analiza un texto desde un punto de vista del contenido matemático se suelen establecer tablas de categorías que relacionan diferentes elementos propios de los libros de matemáticas: definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos, problemas, ejercicios, algoritmos y reglas, etc. Además, también se pueden considerar aspectos metodológicos como objetivos, orientaciones, secuenciaciones, etc. (Gómez, 2011).

El análisis de los datos lo hemos realizado siguiendo el método de análisis de contenido para descubrir la estructura interna de los textos mediante el estudio de su contenido semántico (Rico y Fernández-Cano, 2013). Es, desde un punto de vista metodológico, un procedimiento riguroso gobernado por reglas sistemáticas para el examen y verificación de contenidos de datos escritos (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563).

El análisis de contenido se ha utilizado en Educación Matemática “como método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto” (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 11).

Adaptación de la metodología general

En este trabajo se han realizado todas las fases de análisis que proponen Ibáñez y Llombart (2002) salvo la de contextualización, puesto que consideramos que los textos son muy conocidos, están vigentes y son de uso frecuente. A continuación, se describe cómo se han realizado el resto de fases.

En primer lugar, se recopilaron los textos de los cuales se seleccionarían los que iban a ser analizados. Para esta recopilación, se realizó una búsqueda que permitió determinar las universidades públicas españolas en las que se imparten las titulaciones de Grado en Matemáticas e Ingeniería Matemática y dobles grados con Matemáticas, tales como: Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Telemática, Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática, Doble Grado en Matemáticas y Física, Doble Grado en Matemáticas y Educación Primaria, Doble Grado en Ingeniería del Software y Matemáticas, Doble Grado en Matemáticas y Administración y Dirección de Empresas, Doble Grado en Matemáticas y Estadística, y Doble Grado en Economía y Matemáticas y Estadística. Una vez recopilados estos datos, nos centramos en las asignaturas de primer curso en las que se estudia el cálculo diferencial, obteniendo las guías docentes de dichas asignaturas con el fin de adquirir una visión global de las bibliografías allí propuestas o recomendadas, tanto básicas como complementarias.

Realizado este análisis, clasificamos los textos de las bibliografías según los siguientes parámetros: edición, editorial, año, ciudad, tipo de bibliografía (básica o complementaria), asignatura y universidad que propone dicha bibliografía y, por supuesto, título y autor. Esta clasificación pone de manifiesto la repetición de textos en las distintas guías docentes en numerosos casos, salvo edición e idioma.

En particular, destaca la repetida aparición de textos como "Cálculo infinitesimal de una variable" de J. Burgos Román, "Introducción al análisis matemático" de J. M. Ortega, "Cálculo infinitesimal" de M. Spivak, "Cálculo" de R. Larson y B. Edwards y "Análisis matemático" de T. M. Apostol entre otros. En la tabla 2 se observa la frecuencia con la que aparece cada uno de los textos.

Tabla 2
Tabla de frecuencia de aparición de los textos en las guías docentes. Casos más frecuentes

Autor	Texto	Frecuencia
B. P. Demidóvich	500 problemas de análisis matemático	6
J. Burgos Román	Cálculo infinitesimal de una variable	10
J. M. Ortega	Introducción al análisis matemático	10
M. Spivak	Calculus	18
R. G. Bartle, D. R. Sherbert	Introducción al análisis matemático de una variable	7
R. Larson, B. Edwards	Cálculo	7
T. M. Apostol	Análisis matemático	6
W. Rudin	Principios de análisis matemático	7

Una vez realizada esta clasificación, optamos por elegir para nuestro análisis comparativo los textos "Calculus" de M. Spivak (2012) y "Cálculo 1 de una variable" de R. Larson y B. Edwards (2010). Se eligieron estos textos por dos motivos fundamentales: la elección del texto de Spivak es obligada puesto que se trata del texto más recomendado con diferencia; esto nos invitó a considerar preferiblemente textos de difusión internacional. Bajo esta premisa, el texto de R. Larson nos pareció el más adecuado por ser muy conocido y recomendado, disponer de una cantidad considerable de ediciones, tener al igual que el texto de Spivak una edición en español y hasta compartir el mismo título: Cálculo.

Se analizan los epígrafes de los libros contemplando dos grandes focos:

- El concepto de derivada: introducción, interpretación, definición, notaciones, derivadas de orden superior, derivadas laterales, relación continuidad-derivabilidad, reglas de derivación, derivadas de funciones (trigonométricas, logarítmicas, hiperbólicas), regla de la cadena y función inversa.
- Las aplicaciones y el significado de la derivada, principalmente nos centramos en lo siguiente: extremos absolutos y relativos, Teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio, regla de L'Hôpital, derivada primera y sus aplicaciones, derivada segunda y sus aplicaciones, y problemas de optimización.

Aspectos generales de los textos

En lo que se refiere a los aspectos generales, correspondiendo con la fase de comparación de aspectos generales (Ibáñez y Llombart, 2002), el estudio realizado se sintetiza en la tabla 3.

Cada uno de los textos persigue un objetivo diferente: mientras Spivak (2012) pretende presentar el cálculo como el primer encuentro real con las matemáticas, la intención de Larson y Edwards (2010) es escribir con precisión de manera legible y inteligible los conceptos fundamentales de esta rama de las matemáticas. La idea de amenizar y apoyar con múltiples herramientas la comprensión de los contenidos influye decisivamente en la estructura del texto de Larson y Edwards (2010), que se sirve a lo largo de todo el texto de gráficas e ilustraciones que relacionan los contenidos que se tratan con hechos de la vida real. Esta disparidad de enfoques se pone de manifiesto en la forma de introducir la derivada y los temas que en torno a ella se desarrollan. Por otro lado, para introducir y presentar los temas en Larson y Edwards (2010) se hace uso de notas históricas que en Spivak (2012) se eluden.

No obstante, si hablamos de estructura del contenido propiamente dicha, en ambos textos tan sólo aparecen básicamente cuatro tipos de apartados, los que hacen referencia a definiciones, teoremas, corolarios y problemas.

Tabla 3
Resumen de aspectos generales comparados

Spivak	Larson y Edwards
Objetivo	
Presentar el cálculo como el primer encuentro real con las matemáticas.	Escribir con precisión de manera legible los conceptos fundamentales del cálculo.

Spivak	Larson y Edwards
Público	
Sin indicación.	Todos los tipos de estudiantes.
Metodología	
“Tendría poco valor enumerar simplemente los temas tratados, o mencionar los aspectos pedagógicos u otras innovaciones”	Proporciona herramientas pedagógicas.
Estructura	
“Debe mantenerse inflexible”. Cuatro tipos de apartados: definiciones, teoremas, corolarios y problemas.	Muy rica, incluyendo apartados metodológicos, conceptuales y de ampliación, estando cada uno de ellos muy organizado.
Otros	
Por lo general, no aparecen conectores del contenido con la realidad.	Los apartados de aplicación conectan el Cálculo con la realidad, dándole un carácter funcional.

En definitiva, una primera impresión es que uno de los textos es mucho más austero que el otro. De hecho, el texto Larson y Edwards (2010) incorpora herramientas metodológicas (ver figura 3), que además suele presentar de manera muy vistosa utilizando de manera habitual recursos gráficos. En el texto de Spivak (2012) no se suele hacer uso de tales recursos y lo gráficos no son por lo general tan ricos. En éste último texto el esfuerzo recae en la presentación ordenada y rigurosa del contenido, sin interesarse por otros aspectos.

TECNOLOGÍA El paso más difícil al aplicar el criterio de la primera derivada es determinar los valores para los cuales la derivada es igual a 0. Por ejemplo, los valores de x para los cuales la derivada de

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$$

es igual a cero son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Si se tiene acceso a tecnología que puede efectuar derivación simbólica y resolver ecuaciones, utilizarla para aplicar el criterio de la primera derivada a esta función.

Figura 3. Ejemplos de herramientas complementarias al discurso en Larson y Edwards (2010, p. 184)

Conforme a estas dos concepciones distintas de la obra, hemos percibido igualmente que la forma de motivar la lectura de los contenidos en cada texto que es distinta, en términos generales. Mientras que en Spivak (2012) se da por sentado que el contenido matemático que se expone es relevante en sí mismo (por el uso que de ellos se hace en otros textos de corte más aplicado propios de otras disciplinas) y, en consecuencia, no se requiere hacer un esfuerzo notorio en mostrar las aplicaciones de la teoría a situaciones de la vida real (figura 4).

7. (a) Un objeto circular va aumentando de tamaño de manera no especificada, pero se sabe que cuando el radio es 6, la tasa de variación del mismo es 4. Halle la tasa de variación del área cuando el radio es 6. (Si $r(t)$ y $A(t)$ representan el radio y el área en el tiempo t, entonces las funciones r y A satisfacen $A = \pi r^2$; tan sólo es necesario aplicar directamente la Regla de la Cadena.)

(b) Suponga que el objeto circular que hemos estado observando es la sección transversal de un objeto esférico. Halle la tasa de variación del *volumen* cuando el radio es 6. (Es necesario conocer la fórmula del volumen de una esfera; en caso de que el lector la haya olvidado, el volumen es $\frac{4}{3}\pi$ veces el cubo del radio.)

(c) Suponga ahora que la tasa de variación del área de la sección transversal circular es 5 cuando el radio es 3. Halle la tasa de variación del volumen cuando el radio es 3. Este problema se puede resolver de dos maneras: primero, utilizando las fórmulas del área y el volumen en función del radio; y después expresando el volumen en función del área (para utilizar este método se necesita el Problema 9-3).

Figura 4. Ejemplo tomado de Spivak (2012, p. 183)

En tanto, en Larson y Edwards (2010) se cuidan más estos aspectos presentando una gran variedad de ejercicios de esta índole, que además se hacen más visibles por venir acompañados de imágenes que atraen poderosamente la atención del lector.

Seth Resnick/Getty Images

LA LUNA

La masa de la Luna es de 7.349×10^{22} kg y la de la Tierra 5.976×10^{24} kg. El radio de la Luna es 1 737 km y el de la Tierra 6 378 km. Puesto que la fuerza de gravedad de un planeta es directamente proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de su radio, la razón entre las fuerzas de gravedad en la Luna y en la Tierra es

$$\frac{(5.976 \times 10^{24})/6\,378^2}{(7.349 \times 10^{22})/1\,737^2} \approx 6.0.$$

EJEMPLO 10 Aceleración de la gravedad

Puesto que la Luna carece de atmósfera, un objeto que cae en ella no encuentra resistencia del aire. En 1971, el astronauta David Scott verificó que una pluma de ave y un martillo caen con la misma velocidad. La función posición para cada uno de esos objetos es

$$s(t) = -0.81t^2 + 2$$

donde $s(t)$ es la altura en metros y t el tiempo en segundos. ¿Cuál es la relación entre la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna?

Solución Para calcular la aceleración, derivar dos veces la función posición.

$$\begin{aligned} s(t) &= -0.81t^2 + 2 && \text{Función posición.} \\ s'(t) &= -1.62t && \text{Función velocidad.} \\ s''(t) &= -1.62 && \text{Función aceleración.} \end{aligned}$$

De esta forma resulta que la aceleración de la gravedad en la Luna es de -1.62 m/s². Puesto que la aceleración de la gravedad en la Tierra es de -9.8 m/s², la fuerza de gravedad de la Tierra respecto a la de la Luna es

$$\frac{\text{Fuerza de gravedad en la Tierra}}{\text{Fuerza de gravedad en la Luna}} = \frac{-9.8}{-1.62} \approx 6.0.$$

Figura 5. Ejemplo tomado de Larson y Edwards (2010, p. 125)

Sin embargo, cuestiones de presentación aparte, a pesar de las diferencias que estamos constatando, en muchos resultados concretos la motivación es muy similar, hecho que en ocasiones resulta sorprendente. Por ejemplo, para introducir el teorema de la derivada de la función inversa. La figura 6 muestra esta particularidad en el texto de Spivak (2012).

Si recordamos que una función es una colección de pares de números, podríamos tener la brillante idea de, simplemente, invertir todos los pares. Así, a partir de la función

$$f = \{ (1,2), (3,4), (5,9), (13,8) \},$$

obtenemos

$$g = \{ (2,1), (4,3), (9,5), (8,13) \}.$$

Vemos que $f(1) = 2$ y $f(3) = 4$, mientras que $g(2) = 1$ y $g(4) = 3$.

Figura 6. Ejemplo para introducir la derivada de la función inversa en Spivak (2012, p. 230)

La figura 7 destaca la presencia de estos aspectos en el texto de Larson y Edwards (2010).

Funciones inversas

Recordar de la sección P.3 que una función se puede representar por un conjunto de pares ordenados. Por ejemplo, la función $f(x) = x + 3$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ en $B = \{4, 5, 6, 7\}$, se puede escribir como

$$f : \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}.$$

Por el intercambio de la primera y segunda coordenadas de cada par ordenado se puede formar la **función inversa** de f. Esta función se denota por f^{-1}. Ésta es una función de B en A, y se escribe como

$$f^{-1} : \{(4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4)\}.$$

Notar que el dominio de f es el recorrido o rango de f^{-1}, y viceversa, como se ilustra en la figura 5.10. Las funciones f y f^{-1} tienen el efecto de “deshacer” cada una a la otra. Esto es, al componer f con f^{-1} o la composición de f^{-1} con f, se obtiene la función identidad.

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

Figura 7. Ejemplo para introducir la derivada de la función inversa en Larson y Edwards (2010, p.343)

Resultados del análisis de contenido

Estos resultados se oganizan atendiendo al sistema de categorías que muestra la tabla 1. El estudio está centrado en el primer nivel, donde aparecen los hechos (ámbito conceptual) y destrezas o procedimientos (ámbito procedimental). Además, detectamos y analizamos semejanzas y diferencias en los conceptos y relaciones, que pertenecen al segundo nivel del dominio conceptual. Aunque tratamos de ordenar los resultados, resulta inevitable reproducir conceptos al tener que hablar de notación o de convenios, así como estudiar las definiciones o las demostraciones, como se verá más adelante.

Notación y términos

Destacamos el uso de una notación distinta en ambas monografías. En el texto Spivak (2012) se presenta la notación de Leibniz, pero no se utiliza salvo en ejercicios específicos. Para Larson y Edwards (2010) esta será la notación predilecta a lo largo de todo el texto (tabla 4).

Tabla 4

Notación en Spivak (2012, p. 155) y Larson y Edwards (2010, p. 99)

Spivak	Larson y Edwards
Notación	
f' $\dfrac{df(x)}{dx}$ Las distintas partes de esta expresión carecen de todo significado cuando se consideran separadamente; las d no son números, no pueden simplificarse, y la expresión completa no es el cociente de otros dos números. Esta notación se debe a Leibniz. $f'(a)$ se representa generalmente por $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right\|_{x=a}$. A veces la notación $\dfrac{df(x)}{dx}$ se sustituye por $\dfrac{df}{dx}$.	Además de $f'(x)$ que se lee "*f* prima de x" se usan otras notaciones para la derivaba de $y = f(x)$: $\dfrac{dy}{dx}$ y' $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ $D_x[y]$ La notación dy/dx se lee "derivada de *y* con respecto a *x*" o simplemente "dy, dx". Usando notaciones de límites: $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Igualmente, mientras que el texto de Spivak (2012) se muestra fiel a su elección en cuanto al uso de la notación se refiere, bien es cierto que en el texto de Larson y Edwards (2010) a menudo se utilizan notaciones diferentes, que incluso se emplean a cada lado de una misma igualdad, algo que resulta realmente llamativo. Así en este texto se indica que "el producto de dos funciones derivables *f* y *g* también es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$" (p. 119).

En la propia definición de derivada también se aprecian diferencias (tabla 6). En Larson y Edwards (2010) se usa la notación Δx (tomándose límite cuando

$\Delta x \to 0$) mientras que en Spivak (2012) se usa h (tomándose límite cuando $h \to 0$). Aunque ambas notaciones son válidas para introducir el concepto de derivada, el uso indistinto de uno y otra no es un aspecto obvio de entender para un alumno que se enfrenta al texto por sus propios medios.

De otra parte, yendo más allá de la notación, señalamos que cuestiones relacionadas con el formalismo de este límite que define la derivada (y concretamente con el hecho de que el punto en el que se estudia la derivada pertenezca al dominio de la función y además sea un punto de acumulación) se pasan por alto en uno y otro texto, añadiendo una dificultad conceptual más. Con ello, se deja al arbitrio de la intuición del lector aquello que no se formaliza, si bien el hablar de límite de una forma más rigurosa también conlleva su dificultad de comprensión:

Tabla 5
Definiciones de función derivable en Spivak (2012, p. 151) y Larson y Edwards (2010, p. 99)

Spivak	Larson y Edwards
Definición	
La función *f* es diferenciable en *a* si existe el $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ En este caso el límite se designa por $f'(a)$ y recibe el nombre derivada de *f* en *a*. (Diremos también que f es diferenciable si f es diferenciable en *a* para todo *a* del dominio de f).	La derivada de *f* en x está dada por $f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, siempre que exista este límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

Por ejemplo, en el caso de la derivada de la función constante (tabla 6), se puede apreciar que en Spivak (2012) se define la función y se evita hablar del dominio de f explícitamente (se dice que para todo número a). En Larson y Edwards (2010) se obliga al lector a identificar la constante c con la función constante $f(x) = c$, para después expresar que $\frac{d}{dx}[c] = 0$. Apreciamos un cúmulo de pequeñas dificultades que sin duda obstaculizan el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Tabla 6

Derivada de la función constante en Spivak (2012, p. 168) y Larson y Edwards (2010, p. 107)

Spivak	Larson y Edwards
Derivada de la función constante	
Si f es una función constante $f(x)=c$, entonces $f'(a)=0$ para todo número *a*.	La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces $\frac{d}{dx}[c]=0$.

Otro caso que puede generar confusión, por la notación $x^k(0)$, es la aplicación que se hace en Larson y Edwards (2010) de la regla del cociente para demostrar la regla de la potencia de exponentes enteros negativos (figura 8).

EJEMPLO 7 Demostración de la regla de la potencia (exponentes enteros negativos)

Si n es un entero negativo, existe un entero positivo k tal que $n=-k$. Por tanto, usando la regla del cociente se puede escribir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^n] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^k}\right]\\ &= \frac{x^k(0)-(1)(kx^{k-1})}{(x^k)^2} && \text{Regla del cociente y regla de la potencia.}\\ &= \frac{0-kx^{k-1}}{x^{2k}}\\ &= -kx^{-k-1}\\ &= nx^{n-1}. && n=-k.\end{aligned}$$

De tal modo, la regla de la potencia

$$\frac{d}{dx}[x^n]=nx^{n-1} \qquad \text{Regla de la potencia.}$$

es válida para todo entero. En el ejercicio 76 de la sección 2.5 se pide demostrar el caso en el que n es cualquier número racional.

Figura 8. Demostración de regla de la potencia (Larson y Edwards, 2010, p.123)

Con respecto a la terminología empleada, la primera diferencia que destacamos se extrae de la misma definición de derivada. Se trata de la propia denominación del concepto: diferenciable versus derivable. Aunque pueda parecer una cuestión nimia, en nuestra opinión se trata de un hecho controvertido sobre el que ninguno de los textos aporta información alguna. Curiosamente, en las primeras ediciones de Spivak (2012) no se usaba el término diferenciable. El pasar de derivable a diferenciable ha sido un cambio realizado en una de las últimas ediciones del libro. Nos preguntamos: ¿se trata de una de las "mejoras" de las últimas ediciones? ¿Podría ser un problema relacionado con traducción? En la segunda edición (tercera reimpresión), Spivak usa el término derivable sin revelar bien las razones de tal cambio. Nos limitamos a mencionar aquí que el término diferenciable aparece en muchos los textos, pero también lo hace derivable.

También se encuentran algunas diferencias significativas, por ejemplo, en los conceptos que designan la curvatura de una función. Unido a la habitual controversia asociada a los conceptos de función cóncava y función convexa, en este caso, aparece otro problema añadido. Larson y Edwards, en su texto, no utilizan esta terminología, utilizando los conceptos de función cóncava hacia arriba y función cóncava hacia abajo.

Otras diferencias terminológicas se aprecian cuando se habla de monotonía o de extremos relativos. En este último caso, por ejemplo, en Spivak (2012) no se habla de valor extremo ni de máximo absoluto.

Conceptos y relaciones: rigor

Fijándonos en los resultados más relevantes, desde esta óptica, encontramos en nuestro análisis, algunas de las diferencias que comentamos a continuación (pasando por alto el problema que se ha detectado con los conceptos diferenciable y derivable por considerarse ya tratado).

En cuanto al rigor con que los textos considerados presentan sus resultados, no se puede decir que las diferencias (aun habiéndolas) sean notables. Insistimos en que llama la atención el hecho de que los dos textos analizados, cuando introducen el concepto de función derivable (o diferenciable) en un punto, evitan detallar la naturaleza del punto considerado, esto es, evitan establecer que se trata de un punto de acumulación que pertenece al dominio de la función (Tabla VI).

Por otro lado, en el texto de Spivak (2012) se hacen desarrollos algo más genéricos que en el de Larson y Edwards (2010) (mediante el uso de parámetros), pues por ejemplo en el primer texto se deriva la recta $f(x)=cx+d$, mientras que en el segundo se deriva la recta $f(x)=2x-3$. Además, en Spivak (2012) se calcula $f'(a)$, introduciendo el parámetro a para poner de manifiesto que a es un punto concreto del dominio en que deseamos calcular la derivada, mientras que en Larson y Edwards (2010) se calcula $f'(x)$. La consideración ambigua de la derivada de la función en un punto (esto es $f'(a)$) y de la función derivada $f'(x)$, lo que se traduce en el uso de una notación distinta, es una pequeña dificultad más.

En los convenios utilizados en los textos también se encuentran diferencias. En algunas ocasiones (como cuando se define la recta tangente en un punto) el texto de Larson y Edwards (2010) (a diferencia de Spivak (2012)) considera que la función dada está definida en un intervalo abierto que contiene al punto. No obstante, el hecho de no despejar cualquier duda sobre los requerimientos que ha de cumplir el punto considerado, deja al alumno en una situación de indefensión que puede acarrearle problemas en otros contextos, por ejemplo, a la hora de abordar la noción de extremo relativo. En este sentido no se precisa con claridad si, para que la función f tenga un extremo relativo en un punto *c*, se requiere o no que el dominio de la función contenga un intervalo abierto centrado en *c*. En Spivak (2012) se sobreentiende que tal condición no se pide, mientras que en Larson y Edwards (2010) se afirma que hay un intervalo abierto que contiene a c (nos preguntamos ¿dentro del dominio?) en el cual $f(c)$ es un máximo o un mínimo. Esto es importante pues, en función de que se suponga o no tal condición, una función puede o no tener extremos relativos en puntos aislados del dominio, por ejemplo.

En la noción de punto crítico, también se observan diferencias significativas como se muestra en la tabla 7, que afectan además a la propia nomenclatura.

Tabla 7
Punto crítico en Spivak (2012, p. 190) y Larson y Edwards (2010, p. 166)

Spivak	**Larson y Edwards**
Un punto crítico de una función *f* es un punto *x* tal que $f'(x)=0$. Al número $f'(x)$ se le llama valor crítico de f.	Sea *f* definida en *c*. Si $f'(c)=0$ o si *f* no es derivable en *c*, entonces *c* es un punto crítico de f.

Como acabamos de argumentar, estamos ante conceptos formalmente distintos, formalmente un punto crítico en el sentido de Spivak (2012) lo es en el sentido de Larson y Edwards (2010), pero el recíproco no es cierto (esto es los puntos en los que la función no es derivable son críticos en el sentido de Larson y Edwards (2010) y no en el de Spivak (2012)). Obviamente esto puede generar confusión en el alumno que maneje ambos textos por su cuenta.

En cuanto a los conceptos de máximo y mínimo, observamos que mientras que en Spivak (2012) se toma *A* como un conjunto de números contenido en el dominio de f, en Larson y Edwards (2010) se considera f definida sobre "un intervalo *I* que contiene a *c*". La diferencia es destacable debido a que para Larson y Edwards (2010) el dominio de la función es un intervalo que contiene al punto c y para Spivak (2012) no tiene porqué serlo.

Observamos también cierta diferencia en la denominación de una propiedad tan sencilla. De hecho, en Spivak (2012) se define cuándo un punto x de A resulta ser un punto máximo de f en A (en cuyo caso se dice que f alcanza su valor máximo en el punto x de A). En consecuencia, el énfasis de la propiedad recae sobre el punto x. Sin embargo, en Larson y Edwards (2010) se establece cuándo $f(c)$ es el máximo de f en I, por lo que el énfasis de la propiedad recae en la imagen de c y no en el propio punto c. Nótese que, además, la terminología es diferente. De hecho, en Spivak (2012) no se habla de valor extremo ni de máximo absoluto, por ejemplo. Por otra parte, en Spivak (2012), a diferencia de Larson y Edwards (2010), se deja abierta al lector la definición de mínimo de una función, dando la sugerencia que se reproduce a continuación:

"La definición de mínimo de f en A se deja para el lector. Una posible definición es la siguiente: f tiene un mínimo en el punto x de A si $-f$ tiene un máximo en el punto x de A" (p. 188).

También hacemos notar que, en relación a ambos resultados, cuando se establece la propiedad de que f es creciente en realidad lo que se debería de decir es que f es estrictamente creciente. Parece una carencia de rigor no distinguir entre función monótona y estrictamente monótona.

Concluimos pues que, incluso definiciones tan sencillas como la que estamos analizando, podrían llevar a confusión al alumno poco instruido que maneje ambas monografías.

Tras introducir las definiciones anteriores, en ambos textos se recuerda la propiedad de compacidad o Teorema del valor extremo, que establece que toda función continua en un intervalo $[a,b]$ ha de alcanzar un máximo y un mínimo absoluto en dicho intervalo. En Spivak (2012) se trata de un resultado demostrado previamente, mientras que en Larson y Edwards (2010) se anuncia que la prueba de este hecho no se encuentra dentro del objetivo de este libro. Esto pone de manifiesto que puede no haber concordancia sobre la selección los resultados relevantes que son demostrados en un texto y otro.

Por otra parte, en cuanto a los resultados sobre los que descansa el aparato matemático del Cálculo Diferencial hemos echado en falta cierto énfasis sobre el hecho de que el Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio (o Teorema de Lagrange) y el Teorema del Valor Medio Generalizado (o Teorema de Cauchy) son tres formulaciones equivalentes de un mismo principio del que deriva la teoría básica del Cálculo Diferencial (como las caracterizaciones de los extremos relativos, la Regla de L'Hôpital, la caracterización de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el criterio de la derivada segunda, etc.). A este respecto, el texto que más ilustra este hecho es Spivak (2012).

> *El lector podría preguntarse por qué se asigna un nombre especial a un teorema tan fácil de demostrar como el Teorema de Rolle. La razón es que, aunque el Teorema de Rolle es un caso particular del Teorema del Valor Medio, también permite obtener una demostración sencilla del este último (Spivak, 2012, p. 194).*

El enfoque por el que se opta en Larson y Edwards (2010) es solo de corte geométrico. En un resultado tan conocido y utilizado como el Teorema de Rolle, ambos textos también establecen sutiles diferencias en su enunciado.

Nótese que en Larson y Edwards (2010) se especifica que, si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle, entonces "existe al menos un número" en el intervalo (a,b) de manera que la derivada en ese punto se anula, mientras que en Spivak (2012) podemos leer simplemente que "existe un número".

Por todo lo anterior, nos reiteramos una vez más en el hecho de que la necesaria consideración y entendimiento de todos estos detalles y matices puede complicar enormemente la comprensión plena del resultado por parte del alumno. De hecho, resultados tan básicos y aparentemente sencillos como los que acabamos de analizar, por las cuestiones comentadas, pueden esconder en su interior cierta complejidad conceptual para el alumno que se enfrenta a ellos por primera vez.

Aspectos procedimentales. Destrezas y razonamientos

Los procedimientos que se usan en ambos textos para establecer los resultados a veces también difieren ostensiblemente. Por ejemplo, a la hora de calcular la derivada del seno y el coseno las diferencias son más que notables: Mientras que en Larson y Edwards (2010) se hace uso de los límites $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen \Delta x}{\Delta x} = 1$, y $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} = 0$, que ya se trabajaron en un capítulo anterior de dicha monografía y fueron demostrados mediante argumentos de corte geométrico (Sección 1.3), en Spivak (2012) se recurre a la integración, recurriendo a una función auxiliar, dada por la expresión $A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ y se define la función coseno a partir de ella como sigue:

Si $0 \le x \le \pi$ entonces $\cos x$ es el único número de $[-1,1]$ al que $A(\cos x) = \frac{x}{2}$, definiéndose entonces $sen(x) = \sqrt{1 - (\cos x)^2}$.

A partir de tales definiciones de las funciones seno y coseno se enuncia un teorema (Spivak, 2012, p. 307) en el que se prueba que $sen'(x) = \cos x$ y $\cos'(x) = senx$.

Otra peculiaridad procedimental que queremos señalar es que, ocasionalmente, en Larson y Edwards (2010), hay cierta tendencia suponer situaciones que resulten cómodas a la hora de demostrar un resultado, aunque esto suponga añadir hipótesis adicionales. Por ejemplo, en la prueba de la Regla de la Cadena, se introduce una hipótesis adicional (hasta cierto punto artificial) que simplifica la prueba ostensiblemente (figura 9). Posteriormente, en un anexo de dicho texto se estudia lo que sucede en el caso general. Llama la atención el hecho de que la notación varía de una prueba a la otra (dentro del mismo texto) en cuestiones básicas como la expresión de los límites característicos de la derivada.

DEMOSTRACIÓN Sea $h(x) = f(g(x))$. Usando la forma alternativa de la derivada, es necesario demostrar que, para $x = c$,

$$h'(c) = f'(g(c))g'(c).$$

Un aspecto importante en esta demostración es el comportamiento de g cuando x tiende a c. Se presentan dificultades cuando existen valores de x, distintos de c, tales que $g(x) = g(c)$. En el apéndice A se explica cómo utilizar la derivabilidad de f y g para superar este problema. Por ahora, supóngase que $g(x) \neq g(c)$ para valores de x distintos de c. En las demostraciones de las reglas del producto y del cociente se sumó y restó una misma cantidad. Ahora se recurrirá a un truco similar, multiplicar y dividir por una misma cantidad (distinta de cero). Observar que, como g es derivable, también es continua, por lo que $g(x) \to g(c)$ cuando $x \to c$.

$$\begin{aligned} h'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right], \quad g(x) \neq g(c) \\ &= \left[\lim_{x\to c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)}\right]\left[\lim_{x\to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right] \\ &= f'(g(c))g'(c) \end{aligned}$$

Figura 9. Demostración de la regla de la cadena (Larson y Edwards, 2010, p.131)

Otra diferencia digna de ser comentada, es que en la prueba del Teorema de la Derivada de la Inversa hecho en Larson y Edwards (2010, A-14), que es la estándar, se supone que la función f es derivable en un intervalo que contiene al punto c, condición que no parece figurar entre las hipótesis del teorema (donde sólo se presupone la derivabilidad en c).

Destacamos también que, como ya se ha insinuado, a veces, en un texto se demuestran resultados que no se prueban en el otro. De hecho, en Larson y Edwards (2010) se hace uso de los apéndices para demostrar teoremas tan importantes como el Teorema de la Derivada de la Función Inversa, el Teorema General del Valor Medio o la Regla de L'Hôpital, cuya demostración no encuentra un encaje natural en el capítulo correspondiente. Esto no ocurre en Spivak (2012).

Estrategias

En ambos textos se trabajan destrezas y utilizan estrategias que permiten resolver las tareas. Sin embargo, solo en el texto de Larson y Edwards (2010) se hacen más explícitas. Entre éstas, destacamos la denominada estrategia para encontrar la función inversa de una función (figura 10), la estrategia para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función (p. 180) y la estrategia para resolver problemas de máximos y mínimos (p. 219).

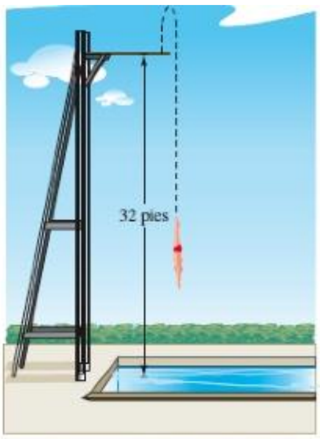
Estrategia para hallar la inversa de una función

1. Utilizar el teorema 5.7 para determinar si la función dada $y = f(x)$ tiene inversa.
2. Despejar x como función de y: $x = g(y) = f^{-1}(y)$.
3. Intercambiar x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.
4. Definir como dominio de f^{-1} el recorrido de f.
5. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ y $f^{-1}(f(x)) = x$.

Figura 10. Estrategia para hallar la inversa de una función (Larson y Edwards, 2010, p. 346)

Representaciones

El texto de Larson y Edwards (2010) se sirve continuamente de gráficas e ilustraciones. De igual forma, fomentando el uso de herramientas tecnológicas, pretende que el lector se familiarice con diferentes programas informáticos para facilitar los cálculos y visualizar algunas funciones, pudiendo así favorecer la comprensión de lo que se pretende enseñar. Este aspecto hace que este texto parezca mucho más actual e innovador. Ejemplos que ilustran estos planteamientos son las figuras 4, 11, 12 y 14.

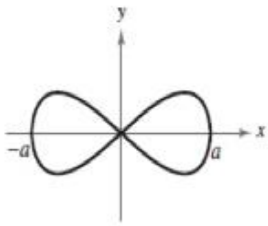


La velocidad es positiva cuando un objeto se eleva, y negativa cuando desciende. Se observa que el clavadista se mueve hacia arriba durante la primera mitad de segundo, porque la velocidad es positiva para $0 < t < \frac{1}{2}$. Cuando la velocidad es de 0, el clavadista ha alcanzado la altura máxima del salto

7. La gráfica de la **curva ocho**, en forma de pera,

$$x^4 = a^2(x^2 - y^2),\ a \neq 0,$$

es la siguiente

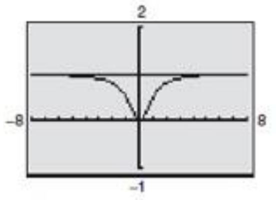


a) Explicar cómo podría utilizarse una herramienta de graficación para representar esta curva.

b) Utilizar una herramienta de graficación para representar la curva para diversos valores de la constante a. Describir cómo influye en la forma de la curva.

c) Determinar los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal.

Figura 11. Representaciones en Larson y Edwards (2010), p.161, izqda. y p. 114, dcha.



La asíntota horizontal parece ser la recta $y = 1$ pero en realidad es la recta $y = 2$
Figura 3.39

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA Si se utiliza una herramienta de graficación para auxiliarse en la estimación de un límite, cerciorarse de confirmar también la estimación en forma analítica (las imágenes que muestra una herramienta de graficación pueden ser erróneas). Por ejemplo, la figura 3.39 muestra una vista de la gráfica de

$$y = \frac{2x^3 + 1\,000x^2 + x}{x^3 + 1\,000x^2 + x + 1\,000}.$$

De acuerdo con esta imagen, sería convincente pensar que la gráfica tiene a $y = 1$ como una asíntota horizontal. Un enfoque analítico indica que la asíntota horizontal es en realidad $y = 2$. Confirmar lo anterior agrandando la ventana de la observación de la herramienta de graficación.

Figura 12. Representaciones (Larson y Edwards, 2010, p.202)

Sin embargo, Spivak (2012) es un texto más parco y visualmente menos generoso ya que apenas encontramos representaciones gráficas. En cuanto al uso de las herramientas tecnológicas no se menciona nada a lo largo de todo el texto y el tipo de ejemplos y ejercicios que plantea en raras ocasiones están relacionados con situaciones de la vida real.

Sentidos

Destacamos el énfasis de Larson y Edwards (2010) por justificar la utilidad, fundamentalmente en el ámbito de optimización, del cálculo diferencial: “una de las aplicaciones más comunes del cálculo implica la determinación de los valores mínimo y máximo. Recordar cuántas veces hemos oído hablar de utilidad (beneficio) máxima(o), mínimo costo, tiempo mínimo, voltaje máximo, forma óptima, tamaño mínimo, máxima resistencia y máxima distancia” (p. 218).

Con respecto a las interpretaciones, en el texto de Spivak (2012) se entiende el Cálculo en el sentido bourbakiano de ser una herramienta de cálculo, esto es como “el instrumento de calcular por excelencia, incomparable, que tras casi tres siglos de uso constante no se ha agotado” (p. 148), y de ahí que el autor se sienta dispensado de ahondar en las aplicaciones dedicando casi todos los esfuerzos a mostrar con claridad el aparato matemático. Quizás por ello, en Spivak (2012) no se dedica un capítulo (o una sección) propiamente a la optimización, si bien es cierto que podemos encontrar problemas de optimización como ejercicios propuestos al final de la parte dedicada a las propiedades de concavidad y convexidad.

En concordancia con su filosofía, en el texto de Larson y Edwards (2010) se comienza el tema de la derivada con una declaración de intenciones y se plantea el siguiente problema: “¿Cómo puede utilizarse el Cálculo para determinar la velocidad de un clavadista cuando impacta sobre el agua?” (p. 95). Se manifiesta así un sentido funcional, en el que la derivada es una herramienta para resolver problemas de la vida real.

Sin embargo, ambos textos comienzan del desarrollo del Cálculo Diferencial a través del cálculo de la recta tangente, poniendo de manifiesto la relevancia que tuvo el problema geométrico de determinar la tangente a una curva en un punto, en el nacimiento de Cálculo Diferencial. De hecho, Larson y Edwards (2010) realizan esta discusión explícitamente.

Posteriormente, en ambos textos se presenta un nuevo significado de la derivada, como función que describe la variación de otra función y, en particular, como velocidad de una partícula. Como elemento adicional, Larson y Edwards (2010) incluyen un ejemplo contextualizado en una situación de caída libre de un cuerpo (figuras 13 y 14).

Destacamos el elevado número de ejemplos que encontramos en el texto de Larson y Edwards (2010) a lo largo de todo el temario. En el de Spivak (2012), por el contrario, apenas se incluyen ejemplos. En el texto de Larson y Edwards (2010), encontramos una gran mayoría de ejemplos de procedimientos analíticos (véase, por ejemplo, la figura 9), así como de aplicaciones matemáticas a situaciones reales (vése la figura 4).

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función

Encontrar la derivada de la función $y = 2/t$ respecto a t.

Solución Considerando $y = f(t)$, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad \text{Definición de derivada.}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2}{t + \Delta t} - \dfrac{2}{t}}{\Delta t} \qquad f(t + \Delta t) = 2/(t + \Delta t) \text{ y } f(t) = 2/t.$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2t - 2(t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)}}{\Delta t} \qquad \text{Combinar las fracciones del numerador.}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}(t)(t + \Delta t)} \qquad \text{Cancelar el factor común } \Delta t.$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2}{t(t + \Delta t)} \qquad \text{Simplificar.}$$

$$= -\frac{2}{t^2}. \qquad \text{Evaluar el límite cuando } \Delta t \to 0.$$

Figura 13. Ejemplo de procedimiento analítico en Larson y Edwards, p. 101.

EJEMPLO 9 Velocidad media de un objeto en su caída

Si se deja caer una bola de billar desde una altura de 100 pies, su altura s en el instante t se representa mediante la función posición

$$s = -16t^2 + 100$$ Función posición.

donde s se mide en pies y t en segundos. Encontrar su velocidad media para cada uno de estos intervalos.

a) [1, 2] *b*) [1, 1.5] *c*) [1, 1.1]

Richard Megna/Fundamental Photographs

Exposición fotográfica de larga duración de una bola de billar en caída libre.

Figura 14. Ejemplo que acompaña a la interpretación física de derivada en Larson y Edwards, p.113.

CONCLUSIONES

La comparación de ambos textos nos permite realizar algunas consideraciones con respecto a los objetivos parciales inicialmente planteados. En primer lugar, se pretendían detectar semejanzas y diferencias en el contenido y en la orientación de los textos. Consideramos que se ha alcanzado este objetivo, puesto que en los epígrafes previos se resumen los resultados de los análisis pormenorizados de ambos textos, donde se ponen de manifiesto diferencias en los significados que los autores atribuyen a los contenidos matemáticos.

Para una descripción general de los textos se han aportado los elementos estructurales y organizativos. Por ello, consideramos que también hemos alcanzado el segundo objetivo propuesto. Los textos muestran diferencias en los objetivos de los autores, el público al que van dirigidos, la metodología empleada, la estructura general y en otros aspectos como el tipo de elementos organizativos. La tabla 3 muestra un resumen de todo ello.

Con respecto al primer objetivo, referente a las semejanzas y diferencias entre ambos textos, podemos señalar que la derivada es considerada como un concepto complejo que ha de desarrollarse con cuidado, con rigor y formalidad, y al que se le dedican muchas páginas en los textos. Sin embargo, en Larson y Edwards (2010) el concepto se enriquece con representaciones gráficas y ejemplos de aplicación, lo que proporciona un significado mucho más rico y con un mayor valor metodológico, si bien el tratamiento del aparato matemático que se hace en Spivak (2012) pueda ser algo más robusto.

Por todo lo anterior, pensamos que estamos en condición de aceptar nuestra primera hipótesis de partida: los propósitos de los autores de los textos condicionan el contenido y la metodología de los mismos. De hecho, creemos que Spivak (2012) es un texto de enfoque formal (de acuerdo con Dolores, 2004) y expositivo (de acuerdo con González y Sierra, 2002) en el que el contenido matemático, por sí mismo, constituye el eje del proceso de aprendizaje y enseñanza. Sin embargo, pensamos que en Larson y Edwards (2010) se entiende implícitamente que el contenido matemático es importante, por lo que el texto se puede considerar de enfoque formal, pero que para que éste contenido se transmita es conveniente incluir diversas herramientas complementarias, de diversa índole, que ayuden a este cometido, aunque ello suponga (en esta filosofía) que determinados aspectos formales de la teoría pasen a un segundo plano. En este sentido consideramos que el texto Larson y Edwards (2010) es más tecnológico (González y Sierra, 2002).

En cuanto a nuestra segunda hipótesis, “la organización de los contenidos matemáticos y los resultados más relevantes no son similares en todos los textos”, pensamos que lo razonable es refutarla. Hemos dado muchísimas razones que lo justifican, que pueden verse en la síntesis de los resultados obtenidos anteriormente expuesta (por citar alguna, piénsese por ejemplo en cómo se obtiene la derivada de la función seno y coseno en un texto u otro).

Los dos textos considerados presentan diferencias en notación y terminología, aunque no lo hacen en niveles superiores de organización del contenido como los conceptos y los procedimientos, lo que nos permite concluir que en lo que respecta a estructura conceptual, ambos textos son similares. Pero no lo son en cuanto al uso de las representaciones, donde Larson y Edwards (2010) es mucho más rico y colorido, siendo Spivak (2012) más frugal. Tampoco son similares en el sentido, puesto que de forma manifiesta los autores se postulan en posiciones diferentes: Spivak (2012) presenta un texto determinado por una estructura conceptual rígida alrededor de la cual se destacan aspectos procedimentales sobre el resto, mientras que Larson y Edwards (2010) se caracteriza por relacionar los contenidos con el uso de las representaciones y, sobre todo, por el marcado uso de ejemplos contextualizados, lo que lo convierten en un libro más aplicado.

Por tanto, hemos apreciado dos significados diferentes del mismo concepto, la derivada, en dos textos de reconocido prestigio a nivel internacional. Mientras que Spivak (2012) se puede denominar (y, de hecho, se describe a sí mismo) procedimental, Larson y Edwards (2010) es un texto funcional. Esto nos hace reflexionar acerca de la existencia de los significados institucionalizados. Aunque se intente transmitir el mismo concepto, la forma de notarlo, la forma de representarlo, o los enfoques con los que se presenta, determinan significados diferentes del mismo.

Por todo ello concluimos que incluir un texto u otro en la guía docente de una asignatura de Cálculo y, más concretamente, recomendar a los alumnos un determinado manual es una tarea que implica asumir una gran responsabilidad, por parte del profesor, pues con ella se definen retos para los alumnos que pueden resultan de gran dificultad, e inferir en un sentido u otro en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Es por ello que hacer una reflexión profunda sobre la bibliografía que se recomienda debe ser obligado en la buena práctica docente.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado parcialmente con ayuda del Proyecto “Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares” (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Referencias

Bravo, A. S. y Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de cálculo y el fenómeno de la trasposición didáctica. *Educación Matemática*, *24*(2), 91-122.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Choppin, A. (1980). L’histoire des manuels scolaires. Un aproche globale [La historia de los manuales escolares. Un enfoque global]. *Histoire de l’education, 9*, 1-25.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. London, Reino Unido: Routledge.

Dhombres, J. (1984). French mathematical textbooks from Bézout to Cauchy. *Historia scientarum*, *28*, 91-137.

Dolores, C. (2004). *La derivada y el cálculo. Una mirada sobre su enseñanza a través de los textos y programas*. México D.F., México: Centro de Investigación en Matemática Educativa. Descargado el 10 de agosto de 2016 desde http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/MEIII/archivos/cdolores.pdf

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis de contenido. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-118). Madrid, España: Pirámide.

Filloy, E. y Rojano, T. (1984). From an aritmetica to an algebraic thought: A clinical study with 12-13 years old. En J. Moser (Ed.), *Proceedings on the Sixth Annual Meeting for the Pshycology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 51-56). Madison, Wisconsin, EE.UU.

Frege, G. (1996). Sobre sentido y referencia. Estudios sobre semántica. En G. Frege, *Escritos filosóficos*. Madrid, España: Tecnos.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

González, M. T. y Sierra, M. (2002). La enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria, 21,* 177-198.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 385-394). Salamanca, España: SEIEM.

Howson, A. G. (1995). *Mathematics textbooks: A comparative study of grade 8 texts.* Vancouver, Canadá: Pacific Educational Press.

Ibáñez, I. y Llombart, J. (2001). La comparación de textos en historia de la ciencia: una propuesta metodológica. *Llull, 24*, 131-148.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 69-75). Londres, Reino Unido: Springer.

Larson, R. y Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (9ª ed). México D.F., México: McGrawHill.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). "This is so": A text on texts. En A. Bishop, K. Clments, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 119-137). Madrid, España: Pirámide.

Picado, M. y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA 6*(1), 11-27.

Puig, L. (1994) De Numéris Datis de Jordanus Nemoratius como sistema matemático de signos. *Mathesis, 10,* 47-92

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona, España: Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO. Didáctica de las matemáticas, 70*. pp. 48-54.

Rico, L. y Moreno, A. (Coords.) (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid, España: Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Madrid, España: Pirámide.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 41–51.

Spivak, M. (2012). *Calculus*. Barcelona, España: Reverté.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Van Dormolen, J. (1986). Textual análisis. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

M. Elena Herrera
Universidad de Granada, España
eleh@correo.ugr.es

M. Victoria Velasco
Universidad de Granada, España
vvelasco@ugr.es

Juan F. Ruiz-Hidalgo
Universidad de Granada, España
jfruiz@ugr.es

Recibido: Abril de 2017. Aceptado: Mayo de 2017.
Handle: http://hdl.handle.net/10481/47546