SOBRE LAS NOCIONES DE REPRESENTACIÓN Y COMPRENSIÓN EN LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Luis Rico

En este documento me propongo abordar las siguientes cuestiones generales: (a) qué se entiende por representación y comprensión, análisis conceptual, delimitación de significados de estas nociones y de sus conexiones; (b) analizar la complejidad de la noción de representación: funciones epistémicas, objetividad, diversidad, paradojas; y (c) reflexionar en torno al interés general que tienen estas nociones para la investigación en Educación Matemática. De este modo, y mediante una serie de interrogantes, abro y centro el debate sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Didáctica de la Matemática.

Términos clave: Comprensión; Conocimiento matemático; Representación; Tipos de representación

On the Notions of Representation and Understanding Notions in Mathematics Education Research

In this document I tackle the following general matters: (a) What do we understand when talking about representation and understanding, conceptual analysis, meanings of these notions and their connections; (b) analysis of the complexity of the representation notion: epistemic functions, objectivity, diversity and paradoxes; and (c) reflection concerning the general interest of the previous notions for Mathematics Education research. In this way and through various questions, I open and focus the debate about the notions of representation and understanding in Mathematics Education research.

Keywords: Mathematical knowledge; Representation; Types of representations; Understanding

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Conocimiento y Representación

Entender el conocimiento humano es un problema central en la reflexión filosófica: ¿Cómo es que el hombre puede tener presentes los objetos del mundo externo? ¿Dónde y cómo se ubican los conocimientos?

Conocer consiste en tener la idea o noción de alguna cosa; llegar a saber por el ejercicio de las facultades intelectuales la naturaleza, cualidades y relaciones de las cosas; tener en la mente la representación de alguien o algo; percibir el objeto como distinto de todo lo que no es él; distinguir a alguien o algo entre otros semejantes (Cuervo, 1998; Seco, Andrés y Ramos, 1999).

En este mismo orden de reflexión, comprender significa percibir mentalmente algo, captar el significado de algo, entender con claridad lo que quiere decir alguien, conocer en un objeto todo lo que en él es conocible, llegar a conocer la naturaleza o modo de ser de una cosa (Cuervo, 1998; Seco, Andrés y Ramos, 1999). La comprensión resulta así un modo destacado del conocimiento.

Conocer es una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprehenderse, que tiene como resultado lo que se denomina saber disponible intersubjetivo, organizado y estructurado mediante representaciones (Krings, Baumgartner y Wild, 1978). El conocimiento humano es central en los procesos de enseñanza y aprendizaje, procesos que tienen como objetivo final el incremento de la comprensión sobre un campo concreto. De ahí el interés que para la Didáctica de la Matemática tienen las nociones de representación y comprensión.

La epistemología ha encontrado en la noción de representación y nociones conexas, claves para entender e interpretar el modo en que los seres humanos conocen y comprenden; mediante estos y otros conceptos se aborda el estudio del conocimiento humano. La tradición racionalista ha postulado una entidad intermedia entre el sujeto y el objeto, a la que llama *representación*, ya sea intelectual o imaginativa. La noción de representación es un concepto clave en la filosofía del conocimiento, que se ha manejado y sometido a crítica de manera sistemática. Todas las disciplinas cuyo objeto es el estudio del conocimiento humano manejan las nociones de representación y comprensión. De ahí el interés por clarificar estas nociones.

La Tradición Filosófica

Platón (1988), en el *Mito de la Caverna*, postuló que nuestro conocimiento es representación de un mundo de ideas, a las cuales tenemos acceso indirectamente.

Descartes, en el *Discurso del Método*, cuando enuncia los principios que deben guiar su entendimiento, propone admitir exclusivamente "aquello que se presentara tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviera motivo alguno para ponerlo en duda" (Espasa Calpe, 1993, p. 55).

Kant sitúa la noción de representación en la base de su epistemología en la *Crítica de la Razón Pura*:

> *¿Cómo podría ser despertada a actuar la facultad de conocer sino mediante objetos que afectan a nuestros sentidos y que ora producen por sí mismos representaciones, ora ponen en movimiento la capacidad del entendimiento para comparar esas representaciones, para enlazarlas o separarlas y para elaborar de ese modo la materia bruta de las impresiones sensibles con vistas a un conocimiento de los objetos denominado experiencia?* (Kant, B 1)

> *Los sentidos representan los objetos tal como se manifiestan, mientras que el entendimiento los representa tal y como son. ... El entendimiento y la sensibilidad que nosotros poseemos sólo pueden determinar objetos si actúan conjuntamente. Si los separamos tendremos intuiciones sin conceptos o conceptos sin intuiciones.* (Kant, B 314)

Para Kant no hay otro sujeto más que el que piensa y no hay otro objeto cognoscible que el que obedece a las exigencias de la representación.

Muchos otros filósofos también se han ocupado de profundizar en la noción de representación, tratando de entender algunos de sus enigmas. Entre ellos han destacado Husserl, Heidegger y Wittgenstein (Llano, 1999). No es objetivo de este trabajo hacer un estudio filosófico sobre la noción de representación, sólo indicar su importancia en la historia de la filosofía, señalar algunas de sus dificultades y poner de manifiesto su complejidad. La historia de la filosofía y de la ciencia muestra la riqueza de sentidos e interpretaciones que tiene este concepto (Ferrater, 1981; Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1990).

Representaciones en Educación Matemática

En la década de los 80 se detecta un empleo sistemático de la noción de representación en Educación Matemática. En estos trabajos, el concepto de representación se toma como equivalente a una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas. Entre varias alternativas conceptuales similares pero no equivalentes: *símbolos* (Skemp, 1980), *sistema matemático de signos* (Kieran y Filloy, 1989), *sistemas de notación* (Kaput, 1992), *sistema de registros semióticos* (Duval, 1993), la comunidad se decantó por dar prioridad al uso del término *representaciones*. Las representaciones matemáticas se han entendido desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998).

Desde entonces las representaciones se han considerado parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas. Pero esta elección no ha estado exenta de dificultades ya que el término elegido es complejo y encierra múltiples significados. A la productividad del concepto ha habido que acompañar intentos de clarificación y precisión sistemáticos, debido a las confusiones e imprecisiones que se han derivado de su uso. La continuación de este esfuerzo es aún necesaria.

Un objetivo principal de este trabajo lo constituye la aproximación crítica al concepto de representación, relevante para la investigación que en Didáctica de la Matemática se viene realizando en España, ya que se puede presentar e interpretar desde distintas perspectivas. Esta crítica permitirá generar un debate sustentado en experiencias y reflexiones propias de nuestra comunidad.

Antecedentes

Los estudios de Janvier, que culminan en su tesis en 1978, están entre los trabajos pioneros más conocidos que utilizaron la noción de representación y procedían de los trabajos previos de Bell y otros (Janvier, 1987). Janvier realiza un detallado y conocido estudio de algunas dificultades sobre la comprensión del concepto de función basado en las representaciones gráficas. Los materiales elaborados posteriormente en el Shell Centre de la Universidad de Nottingham (1986), que abordaron una enseñanza por diagnóstico sobre este campo conceptual, contribuyeron a difundir la noción de representación y otras asociadas.

Con el concepto de número racional también se ha trabajado sobre la base de considerar y analizar diferentes sistemas de representación. Los trabajos de Behr, Lesh, Post y Silver (1983) se encuentran entre los pioneros en el estudio de los sistemas de representación para ese conjunto numérico, campo que ha continuado ofreciendo resultados productivos (Carpenter, Fennema y Romberg, 1993).

En 1984 se celebró un simposio en la Universidad de Québec en Montreal, organizado por el Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Dévelppement en Education (CIRADE), para presentar y discutir las últimas etapas de un proyecto de investigación sobre representación. Resultado de este simposio es el documento *Problems of Representation in the Teaching and Learnig of Mathematics* (Janvier, 1987), en el que se plantea el estado de la cuestión en ese momento y la potencialidad para la investigación en Educación Matemática del concepto en estudio.

El interés del tópico se puso especialmente de manifiesto por la existencia del grupo de trabajo en representaciones, en el seno del International Group for the Psychology of Mathematics Education, desde 1990 hasta 1995. Goldin (1993) puso de manifiesto el interés que tiene la noción de representación en las líneas recientes de investigación en Educación Matemática.

Desde una aproximación semiótica, el profesor Duval de la Universidad de Estrasburgo, ha venido trabajando sobre la noción de representación y la comprensión de los objetos matemáticos desde comienzos de la década de los 80; sus trabajos *Semiosis y Noesis* (1993) y *Semiosis y Pensamiento Humano* (1999), son aportaciones valiosas en este campo. La revista *Les Sciences de l'Education*, editada por el Centre d'Etudes et de Recherche en Sciences de l'Education de la Universidad de Caen, editó el monográfico *Les Représentations Graphiques dans l'Enseignement et la Formation* (Baillé y Maury, 1993), que incluye una serie de contribuciones notables sobre las representaciones gráficas.

Sierpinska (1994), Glasersfeld (1995) y muchos otros autores, han reflexionado también sobre estas nociones. En la obra colectiva *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Biehler, Scholtz, Strasser y Winkelmann, 1994), el concepto de representación se trabaja y emplea extensamente: "La representación de hechos y relaciones es un aspecto muy importante del aprendizaje y el pensamiento matemático, por ello los educadores matemáticos han estado fuertemente interesados en la investigación psicológica que contribuye a la comprensión de las representaciones." (p. 19)

Sin ánimo de ser exhaustivo, la noción de sistema de representación se encuentra explícitamente, en el seno del grupo de investigación *Pensamiento Numérico,* en las tesis de Encarnación Castro (1995), José L. González Marí (1995), Isabel Romero (1995), Eduardo Lacasta (1995), Francisco Fernández (1997), José M. Gairín (1998) y Francisco Ruiz (2000); también en Coriat y Scaglia (2000) hay un uso extenso de estas nociones. Castro y Castro (1997) hacen un análisis conceptual detallado de esta noción, que se ha utilizado en muchos otros trabajos e investigaciones.

Complejidad de la Noción de Representación

La noción general de representación es compleja y se ha utilizado en la investigación en Didáctica de la Matemática de manera productiva. Sin embargo, resulta un concepto conflictivo.

Consideremos algunos de los significados asociados con el concepto de representación, analicemos su complejidad y explicitemos las dificultades que plantea para la investigación en Educación Matemática. En este documento centro mi consideración en la representación de conceptos matemáticos y en su función durante los procesos de enseñanza y aprendizaje. No pretendo extender estas reflexiones a otras cuestiones de interés para la Didáctica de la Matemática, como pueden ser las diversas representaciones que hace el profesor sobre esos mismos procesos o sobre otras componentes del sistema educativo. Mi ámbito de reflexión se centra en el conocimiento matemático (Rico y Sierra, 2000).

Objetividad y Representación

Representar es sustituir, dar presencia a un ausente y, por tanto, confirmar su ausencia. La representación supone en este caso una dualidad representante-representado. Se representa para hacer presente algo, pero ese algo es distinto y existente, a lo cual la representación sustituye. En la noción de representación subyace el supuesto de un algo objetual que se representa.

De este supuesto surge el esfuerzo por ir a la cosa misma, sin intermediarios de palabras o imágenes. Toda crítica a la representación se esfuerza por alcanzar un conocimiento no mediado. Sin embargo, el acceso principal al modelo sigue siendo la copia; un peligro es que la representación pretenda pasar por la presencia, el signo por la cosa misma.

Símbolo y concepto asociado son dos cosas diferentes (Skemp, 1980). Kaput (1987) señala esta dualidad y muestra las dificultades que de ella se derivan para las matemáticas:

> *El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados.* (p. 23)

De esta manera,

> *cualquier especificación particular de la noción de representación debiera describir, al menos, cinco entidades:*
>
> *1. los objetos representados,*
>
> *2. los objetos representantes,*
>
> *3. qué aspectos del mundo representado se representan,*
>
> *4. qué aspectos del mundo representante realizan la representación,*
>
> *5. la correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.*
>
> *En buena parte de los casos importantes uno o ambos de los mundos pueden ser entidades hipotéticas e, incluso, abstracciones.* (p. 23)

Algunos interrogantes abiertos que se derivan de este planteamiento son: ¿dónde surgen los conceptos matemáticos? ¿Dónde se ubican? ¿Qué objetividad tienen? ¿Qué relación guardan con sus representaciones? ¿Cómo se aprenden los conceptos matemáticos?

El espejo es la superficie que muestra esta *paradoja de ausencia-presencia*. Esta paradoja se resume y expresa en la dualidad *representante-representado*. La anterior lectura de Kaput pone de manifiesto una posible consideración peligrosa de la noción de representación. Esas ideas permiten postular un planteamiento realista para los conceptos matemáticos, como objetos con existencia propia en algún mundo conceptual trascendente, a los cuales tenemos acceso mediante sus representaciones.

REPRESENTACIONES MENTALES

Representar es reproducir en la mente. Este supuesto se derivó de los cambios que se produjeron en el siglo XVII en la interpretación de los mecanismos de la percepción: el rayo visual que, supuestamente, salía del ojo y "palpaba" los objetos, se transformó en rayo luminoso que penetraba en el ojo e "introducía" las imágenes de los objetos en la retina y, de ahí, en la mente del hombre. Esta teoría de la percepción llevó nuevas dificultades para la noción de representación. ¿Cómo se reproduce en la mente la realidad exterior?

La dificultad de la pregunta ha llevado a buscar distintas soluciones. Por un lado, al tratar de entender los mecanismos de la representación, se multiplicaron las etapas y los intermediarios (teorías del homúnculo interior). Por otra parte, la imagen o idea del objeto se distanció de él en cuanto fue necesario concentrarla en los signos y en las palabras. Finalmente, se llegó a postular que toda la actividad mental se reducía a la representación, corriendo el riesgo de transformar las representaciones en objetos puramente mentales en los que el representante, al final, se representa sólo a sí mismo y no a una realidad exterior, que resulta inaccesible. Berkeley mostró las consecuencias más radicales de este supuesto.

El interés de las representaciones mentales es reconocido por gran parte de la comunidad de los investigadores en Didáctica de la Matemática, aquellos que de manera más o menos amplia suscriben el paradigma cognitivo.

> *Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. ... Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas.* (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66)

Con diferentes matices, diversos autores aceptan esta distinción. Así, Kaput (1992) considera un mundo de operaciones mentales y un mundo de operaciones físicas, mientras que Duval (1993) postula la existencia del mundo de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas, y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas.

En estos casos las representaciones desempeñan un papel destacado para los procesos de construcción de conceptos y, por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático. De ahí el interés que tienen para la investigación en Educación Matemática (Hitt, 1997).

Sin embargo, una de las mayores dificultades para un uso productivo de esta dualidad radica en el carácter conjetural e hipotético de las representaciones internas o, dicho de otro modo, su naturaleza de inobservables. Si el riesgo para el filósofo es el solipsismo, para el científico es un escepticismo radical sobre la necesidad de postular las representaciones mentales.

Esta paradoja se resume en la dualidad representación mental-representación externa, y plantea nuevos interrogantes: las representaciones internas ¿son necesarias o prescindibles? ¿Qué relaciones mantienen con las representaciones externas? ¿Qué papel desempeñan estas representaciones en Educación Matemática? ¿Y en la investigación? ¿Qué papel desempeña el paradigma cognitivo en la postulación de las representaciones mentales?

Diversos Tipos de Representaciones

Una vez reconocida la imposibilidad de construir un mundo real a partir de nuestras representaciones, la filosofía aceptó que lo percibido precede a la imagen que lo replica y que, en el origen, está la palabra. La representación como copia, imagen, huella o concepto se basa siempre en una teoría del signo. La historia de la filosofía considera en la idea la representación de la cosa, y en la palabra la representación de la idea. La palabra es un complejo representativo e incluye cuatro tipos: la palabra oída, la palabra emitida, la palabra escrita y la palabra leída. De ahí que las representaciones verdaderas se puedan reducir a una imagen visual, que remite directamente a una cosa, y a una forma verbal que propone el sentido de la cosa mediante un concepto.

Dentro de los modos convencionales de representación es usual distinguir dos grandes familias de sistemas: representaciones simbólicas y representaciones gráficas. Entre las primeras se encuentran las representaciones de carácter alfanumérico, que se pueden simular mediante programas informáticos y cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento. Los sistemas de representación gráficos recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación (Castro y Castro, 1997).

Esta paradoja se relaciona con la dicotomía representación visual-representación simbólica.

La dualidad de las representaciones es un intento de capturar con pocas variables toda la complejidad de situaciones y mecanismos de representación. Algunos de los interrogantes que produce son: ¿cuántos tipos de representaciones se pueden establecer? ¿Cuáles son sus principales variedades? ¿Cuándo se puede afirmar que algo representa a un concepto matemático? ¿Cuáles representaciones son más adecuadas? ¿Hay diferencias entre un modelo y una representación del mismo concepto? ¿Las hay en matemáticas?

Nitidez del Significado y Arbitrariedad de la Representación

Representar es atribuir significado, ubicarse en un sistema. El concepto no es algo externo, objetual, sino un significado que ocupa el centro de un espacio semántico. El principio de realidad no es la representación de una exterioridad física o de una idea trascendente, sino la representación de un espacio semántico en el que las palabras y los signos, disputando su sentido, se hacen cargo del mundo, dibujan en él fuerzas, fijan sus núcleos a través de un juego de análisis y síntesis. La representación no es una mera imagen especular, sino que toma sentido dentro de un sistema de significados y relaciones.

En la filosofía contemporánea, el término representación se emplea para referirse a cualquier cosa que puede evaluarse semánticamente (Dancing y Sosa, 1993). De las representaciones puede decirse: (a) que son verdaderas, (b) que se refieren a algo, (c) que son verdaderas de algo, (d) que son acerca de algo, (e) que son precisas, etc. Contenido es el término técnico utilizado para denominar aquello que en una representación la hace semánticamente evaluable. Así, de un enunciado se dice que tiene como contenido una proposición o condición de verdad; de un término se dice que tiene un concepto como contenido; de una gráfica que expresa una relación adecuada entre sus componentes. Desde este planteamiento, son representaciones las expresiones simbólicas, enunciados, diagramas, gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas ya que cada una tiene un contenido cuyo significado se puede establecer y evaluar; estos contenidos son objeto de estudio en matemáticas.

En cualquier dominio conceptual, y tal es el caso de las matemáticas, las representaciones convencionales contextualizadas (signos dotados arbitrariamente de sentido) hacen presentes a los conceptos (Puig, 1999). La representación es, justamente, la condición para establecer cualquier tipo de objetividad (Ibarra y Mornann, 1997). Pero las matemáticas no se pueden reducir a los simples sistemas estructurados de codificación mediante signos o gráficas. El modo específico de representar en matemáticas permite manipular y procesar esas representaciones de manera que los distintos modos de manipulación expresen, a su vez, diversas propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos e ideas representados. Las representaciones matemáticas conllevan un modo dinámico de procesamiento, que las dota de una potencia incuestionable.

Si bien la representación de un concepto matemático consiste en hacerlo presente mediante unos signos específicos, convencionales y contextualizados, con unas reglas sintácticas de procesamiento, dicha representación con sus reglas no agota el concepto sino que sólo pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes. La moderna conceptualización de las matemáticas está basada en las nociones de estructura y de sistema. No se refiere a conceptos matemáticos simplemente, sino a sistemas o estructuras. Una estructura matemática es un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de composición y de unas relaciones mediante las que se comparan y organizan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza una estructura (Feferman, 1989).

La representación de una estructura matemática ha de tener también carácter sistémico (Kaput, 1987), por ello se habla de sistema o sistemas de representación cuando se refiere a una estructura matemática en su totalidad (Rico, Castro y Romero, 1996).

Pero ¿hasta qué punto las convenciones predominan en un sistema de representación? ¿Qué objetividad transmiten los sistemas de representación? ¿Qué muestran y qué ocultan? ¿Qué ponen de manifiesto? ¿La convencionalidad del sistema justifica la arbitrariedad? ¿Cómo, el dominio de unas convenciones, permite determinar la profundidad de una comprensión?

Esta paradoja se resume y expresa en la dualidad objetivo-convencional y apunta hacia la construcción social del conocimiento. El tejido de signos con el que envolvemos la realidad dibuja la extensión de nuestras formas y los límites de nuestra realidad. De modo que no hay hechos, sino sólo interpretaciones. La interpretación es la sustancia de la vida intelectual. Nada asegura que lo sentido y lo concebido sean isomorfos, que las representaciones sensibles y conceptuales estén en correspondencia.

Diversidad de Representaciones

Representar es una práctica y abarca una multiplicidad de opciones. La representación es un acto creador, consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo. No se trata de un cuadro mental, interior e incomunicable, sino el esfuerzo por recoger la polisemia de lo percibido, el desplazamiento que permite modificar su aspecto. No es un estado sino una práctica, una técnica, una manera de tratar lo percibido y lo pensado. Cada tipo de representación se crea su propio objeto, sin medida común que permita reunirlos a todos. La disyunción entre lo que veo allá, pero no puedo decir, y lo que digo aquí sin hacerlo ver, no es más que la réplica en el seno mismo de la representación. Lo real no está dado, lo confeccionamos en figuras cambiantes. Ninguna será verdadera, la representación no tiene modelo, no reproduce nada, hace por sí sola todo el original, ella es la creación (Eaudeau, 1999).

Siguiendo a Wittgenstein (1988) cuando reflexiona sobre los diversos juegos de lenguaje matemáticos, es posible sostener que cada concepto matemático viene establecido por sus diferentes significados y usos y, por tanto, por diversas representaciones. Son los usos de cada concepto los que establecen por extensión su campo semántico, y cada modo significativamente distinto de entender un concepto necesita de un sistema de simbolización propio, de algún modo de representación para ser distinguible.

Desde una perspectiva cognitiva esta reflexión implica que cada concepto o estructura matemática necesita para su total comprensión del empleo y juego combinado de más de un sistema de representación. No es usual considerar cuáles son los aspectos y propiedades de un concepto que se destacan mediante cada tipo de simbolización. Cada uno de los modos de representación, junto con las reglas que los acompañan, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto. Identificar los conceptos con cualquiera de sus representaciones es una simplificación escolar, inadecuada para la investigación en Educación Matemática. Por ello se deben diferenciar varias representaciones en cada concepto.

Característica distintiva de los conceptos y estructuras matemáticas es la necesidad de emplear diversas representaciones distintas para captarlos en toda su complejidad, como han puesto de manifiesto distintos investigadores (Castro, 1995; Goldin, 1993; Janvier, 1987; Kaput, 1987; Romero 1995; Ruiz, 2000). Duval (1993) sostiene la necesidad de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como lo son los objetos comúnmente llamados físicos. Esto lleva a la necesidad de considerar las relaciones entre los diversos sistemas de representación para un mismo concepto. Janvier habla de traducciones (*translations*) entre distintos sistemas, mientras que Duval se refiere a estas relaciones con el término *conversión*.

Esta paradoja se resume y expresa en la dualidad *univocidad-pluralidad.*

Entre los interrogantes que se pueden plantear tenemos los siguientes: ¿cómo seleccionar los sistemas de representación adecuados para cada concepto y en cada edad? ¿Cómo abordar determinadas dificultades de comprensión mediante el juego de las representaciones? ¿Cómo profundizar sobre los conceptos? ¿Qué oculta y qué muestra cada sistema de representación?

Conclusión

El análisis conceptual iniciado y las cinco paradojas señaladas son un avance que resume parte de la complejidad de las nociones de representación y comprensión. De algún modo, las dicotomías contempladas afectan al uso del término representación. Si bien es cierto que cada disciplina puede marcar un significado más preciso para esta noción y establecer los usos aceptados que van a tener legitimidad en su práctica, es igualmente cierto que hay toda una tradición de pensamiento que atribuye una gran diversidad de significados a esta y otras nociones conexas, que afectan al uso coloquial y cotidiano del concepto y que contaminan su empleo en la práctica.

Cuando se trata de conceptos como los que nos ocupan, que tienen un peso importante en el desarrollo de la investigación reciente en Didáctica de la Matemática, la reflexión detallada y la discusión a fondo se hacen necesarias. Por ello es de interés continuar con la reflexión iniciada, de modo que se pueda avanzar en el debate centrado en los siguientes puntos:

- Interés general que tienen estas nociones para la investigación en Didáctica de la Matemática.
- Interés particular que tienen estas nociones para la investigación en Didáctica de la Matemática. Punto de vista que se asume.
- Ejemplificación del uso de las nociones de representación y comprensión en investigaciones concretas realizadas.
- Cuestiones abiertas.
- Evaluación crítica de otras opciones.

Referencias

Baillé, J. y Maury, S. (Eds.)(1993). Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation. *Les Sciences de l'Education, 1-3*.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92-126). New York: Academic Press.

Biehler, R., Scholtz, R., Strasser, R. y Winkelmann, B. (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Carpenter, T., Fennema, E. y Romberg, T. (1993). *Rational numbers. An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Granada, España: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Coriat, M. y Scaglia, S. (2000). Representación de los números en la recta. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(1), 25-34.

Cuervo, R. J. (1998). *Diccionario de construcción y régimen de la lengua castellana* (Tomo II). Barcelona, España: Herder.

Dancing, J. y Sosa, E. (1993). *A companion to epistemology*. Oxford: Blackwell.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Eaudeau, C. (1999). *La paradoja de la representación*. Buenos Aires: Paidós.
Espasa Calpe (Ed.) (1993). *Enciclopedia Espasa Calpe.* Madrid, España: Editor.
Feferman, S. (1989). *The number systems. Foundations of algebra and analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.
Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, España.
Ferrater, J. (1981). *Diccionario de Filosofía*. Madrid, España: Alianza.
Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos.* Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.
Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism.* London: Falmer Press.
Goldin, G. A. (1993). The IGPME working group on representations. En I. Hirabayahi, N. Noluhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 96). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.
González Marí, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, España.
Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.
Hitt, F. (1997, julio). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum.* Presentado en el XI Relme, Morelia, México.
Ibarra, A. y Mormann, T. (1997). *Representaciones en la ciencia*. Barcelona, España: Ediciones del Bronce.
Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: Studies and teaching experiments*. Tesis doctoral, University of Nottingham, Nottingham, Reino Unido.
Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
Kant, E. (1978). *Crítica de la razón pura.* Madrid, España: Alfaguara.
Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan Publishing Company.
Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240.
Krings, H., Baumgartner, H. y Wild, C. (1979). *Conceptos fundamentales de filosofía*. Barcelona, España: Herder.
Lacasta, E. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Illusions et contrôles.* Tesis doctoral, Université Bordeaux I, Burdeos, Francia.
Llano, A. (1999). *El enigma de la representación*. Madrid, España: Síntesis.

Platón (1988). *República*. Madrid, España: Gredos.

Puig, L. (1999). Semiótica y matemáticas. En E. Filloy (Ed.), *Aspectos teóricos del álgebra educativa* (pp. 57-72). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis, 35*(1), 277-302.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990). *Vocabulario científico y técnico*. Madrid, España: Espasa Calpe.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 87-102). Valencia, España: PME.

Rico L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la matemática e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-131). Huelva, España: Editorial Hergué.

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Ruiz, F. (2000). *La tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada, España.

Seco, M., Andrés, O. y Ramos, G. (1999). *Diccionario del español actual.* Madrid, España: Aguilar.

Shell Centre (1986). *The language of functions and graphs: An examination module for secondary school*. Manchester: Joint Matriculation Board.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid, España: Morata.

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas*. Madrid, España: Alianza.

Este documento se publicó originalmente como Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Luis Rico
Universidad de Granada
lrico@ugr.es