

LAS IGUALDADES INCORRECTAS PRODUCIDAS EN EL PROCESO DE TRADUCCIÓN ALGEBRAICO: UN CATÁLOGO DE ERRORES

Fernando Cerdán

Propongo un catálogo para los errores que puedan encontrarse al realizar el proceso de traducción algebraico. El catálogo consta de tres categorías: errores en el uso de letras, errores en la construcción de expresiones algebraicas y errores en la construcción de la igualdad. Constaté la validez del catálogo con las igualdades incorrectas producidas por 258 estudiantes de bachillerato (15-18 años) que trabajaron 13 problemas. Encontré que las producciones persistentes dan cuenta de una parte sustantiva del error total y que estas producciones contienen errores de las categorías antes citadas. Además, determinados errores se podrían asociar con tipos de problemas.

Términos clave: Errores; Igualdades incorrectas; Traducción algebraica

Incorrect Equalities Developed in the Algebraic Translation Process: a Catalog of Errors

I propose a catalogue for errors that can be found in the process of algebraic translation. This catalogue consists of three categories: errors in the use of letters, errors in the construction of algebraic expressions and errors in the construction of the equal sign between two algebraic expressions. I contrasted the utility of the catalogue with the incorrect equalities produced by 258 Secondary students (15-18 years old). Finally, I found that a great part of the total error can be explained by means of persistent productions in which we can find errors belonging to the three categories of the catalogue. Furthermore, it is possible to conclude that some kinds of errors were related to specific types of problems.

Keywords: Algebraic translation; Errors; Incorrect equalities

Es conocido que, en la realización de muchas tareas algebraicas, los escolares producen multitud de errores. Socas y Palarea (1997) apuntan que éstos son la manifestación en la práctica de dificultades y obstáculos que tienen que ver con (a) la complejidad de los objetos del álgebra, (b) los procesos de pensamiento algebraico, (c) el desarrollo cognitivo de los alumnos y alumnas, (d) los métodos de enseñanza y (e) actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Para los errores que cometen los estudiantes cuando la tarea que se les propone consiste en el cálculo o transformación de expresiones aritméticas o algebraicas, la sustitución formal en las mismas o la resolución de ecuaciones, Matz (1980) organizó un catálogo que da cuenta y trata de explicar la mayoría de estos errores.

Cuando la tarea que se propone a los estudiantes es poner un problema en ecuaciones, desde que Clements (1982) dio cuenta del “error de inversión¹” se han detectado muchos otros errores. Nosotros mismos hemos encontrado (Cerdán, 2008) que únicamente un 32,1% de las igualdades producidas por los estudiantes son correctas, esto es, conducen al resultado del problema. Sin embargo, no se dispone de un catálogo que permita un diagnóstico claro de dichos errores que nos permita avanzar en su etiología. Este trabajo se propone y se contrasta un catálogo de tales errores.

PROPÓSITO

El propósito concreto de este trabajo es proponer un catálogo de errores en los que los estudiantes pueden incurrir en el proceso de traducción algebraico y tomar en consideración los segmentos de signos “expresión algebraica = expresión algebraica”, “expresión algebraica = número”. Estas igualdades no conducen al resultado del problema, pero son dadas por los estudiantes como planteamiento del problema. La intención de ello es contrastar la validez del catálogo propuesto.

ERRORES EN EL PROCESO DE TRADUCCIÓN ALGEBRAICO

En cualquier actuación de los estudiantes pueden encontrarse errores. El error más conocido al traducir problemas a ecuaciones es el llamado error de inversión encontrado en el problema estudiantes-profesor (Clements, 1982). Se acepta corrientemente que la causa principal por la que se incurre en el error de inversión es el intento de traducir directamente de palabras a símbolos (Hershkovics, 1989; Laborde, 1990; Mestre, 1988). Aunque el error de inversión es el error más estudiado, se han encontrado otros errores en la traducción de problemas a ecuaciones lineales simples. Stacey y McGregor (1993) indican que es aceptado que los estudiantes incurren en errores a causa de:

¹ Nota del editor: “reversal error” en inglés.

- ◆ El uso de letras como abreviaturas de palabras.
- ◆ El intento de traducir directamente de las palabras clave a los símbolos matemáticos, de izquierda a derecha, sin prestar atención al significado.
- ◆ El uso del signo igual para indicar que lo que está en la izquierda está asociado con lo que está en la derecha.
- ◆ La influencia perniciosa de los dibujos mentales.

INCURRIR EN ERRORES

En Cerdán (2008) se ha elaborado un marco teórico para el estudio de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas de la familia de problemas aritmético-algebraicos. Entre los elementos de ese marco se encuentran: (a) un espacio del problema específico donde se da la búsqueda de solución al problema y (b) las nociones de un grafo teórico y un diccionario teórico de cantidades que contienen todas las cantidades y relaciones que cualquier resolutor puede usar en cualquier solución del problema. El espacio del problema está construido basándose en las indicaciones de Newell y Simon (1972), siendo una de las componentes de tal espacio un conjunto de operadores que se encarga de señalar relaciones entre las cantidades y de producir expresiones aritméticas, algebraicas o verbales que asignan a cantidades del diccionario. Esto es, los operadores son la componente del espacio del problema que produce mientras el grafo y el diccionario teórico de cantidades son el juez que decide si la producción es adecuada.

En definitiva, en dicho marco teórico se considera error a todo aquello, producido por los operadores, que no conste en el grafo teórico o diccionario teórico de cantidades del problema. Se decide que la causa de un error proviene del uso inadecuado de un operador. Esta concepción permite, tras la delimitación del conjunto de operadores que produce, examinar teóricamente los posibles usos inadecuados de los operadores (Cerdán, 2008, pp. 174-181) y, de acuerdo con ese examen, establecer los posibles errores que pueden encontrarse en el proceso de traducción algebraico. Errores que, según la función del operador que se usa inadecuadamente, pueden presentarse en un catálogo dividido en tres categorías.

CATÁLOGO DE ERRORES PARA LA TRADUCCIÓN DE PROBLEMAS A ECUACIONES

Clasifico los errores para la traducción de problemas a ecuaciones en tres categorías: (a) errores en el uso de letras, (b) errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas y (c) error de igualdad. Describo a continuación cada una de estas categorías.

Errores en el Uso de Letras

Se identifican los siguientes errores en el uso de letras.

Designación múltiple. Se dice que hay designación múltiple cuando un número o cantidad es designado por más de una literal.

Significado múltiple (polisemia). Se dice que la literal posee polisemia cuando la literal se utiliza para designar a más de un número o cantidad.

Significado cambiado. Se dice que la literal tiene el significado cambiado cuando una literal se usa para designar a otra cantidad diferente de la que le fue expresamente atribuida a tal literal.

Errores en la Construcción de Expresiones Aritméticas o Algebraicas

Los errores en expresiones aritméticas o algebraicas se enuncian en función de la diferencia que existe entre la expresión algebraica EA' , utilizada para referir una cantidad y la expresión que debería referirla: EA .

Error de Operación. Se dice que la expresión $(A \bullet B)'$ contiene un error de operación cuando se encuentra escrita la expresión $(A \bullet B)'$ en lugar de $A * B$, donde \bullet y $*$ designan operaciones diferentes. Entre ellos se encuentra el error de inversión.

Error de Inversión. Se dice que una expresión $(A \bullet B)'$ contiene un error de inversión cuando se encuentra escrita la expresión $(A \bullet B)'$ en lugar de $A * B$ donde \bullet y $*$ se refieren a operaciones inversas.

Error de arbitrariedad. Se dice que la expresión EA contiene un error de arbitrariedad o es arbitraria cuando no tiene ningún referente en el diccionario teórico de cantidades y es leída de forma que los errores mencionados anteriormente no juegan un papel relevante.

Error de Igualdad

Se dice que una igualdad es errónea si las cantidades referidas por las expresiones de un lado y otro de la igualdad son diferentes.

MATERIAL Y MÉTODO

En el estudio participaron 258 estudiantes de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP), 91 de 1º, 72 de 2º y 75 de 3º, que cursaban sus estudios en tres institutos de la red pública de enseñanza. Se consideraron 13 problemas de lectura analítica algebraica de 6 subfamilias. Los siguientes son ejemplos de estos problemas:

Mitad y tercera parte. Estoy pensando en un número tal que la suma de su mitad y su tercera parte es 7 unidades mayor que su cuarta parte. ¿Cuál es dicho número?

Descomponer en 4 partes. Descomponer un número en cuatro partes de modo que si se resta 4 de la primera, se suma 4 a la segunda, la tercera se multiplica por 4, y la cuarta se divide por 4, se obtiene el mismo número en todos los casos.

Edad doble. La edad de una persona es doble que la de otra. Hace siete años la suma de las edades de las dos personas era igual a la edad actual de la primera. ¿Cuál es la edad de cada una?

Pedro y Juan. Pedro dice a Juan: “Tengo dos veces la edad que tenía cuando tenía la edad que tienes tú. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, entre los dos tendremos 63 años. ¿Cuáles son nuestras edades actuales?”

Mecanógrafa. Una mecanógrafa piensa que si escribe al día 2 páginas más de lo establecido normalmente, acabará el trabajo 3 días antes de lo previsto, mientras que si escribe 4 páginas más al día, acabará 5 días antes de lo previsto. ¿Cuántas paginas tiene que escribir y en cuánto tiempo?

Heno. Unos granjeros almacenaron heno para 40 días. Sin embargo, el heno era de mejor calidad de la que pensaban y ahorraron 100 Kg. por día. Así tuvieron heno para 60 días. ¿Cuánto heno almacenaron?

Las igualdades analizadas fueron las que los estudiantes proporcionaron como planteamiento de los problemas. Como quiera que las igualdades producidas por los estudiantes eran —en muchas ocasiones— idénticas, se acordó llamar producción a este conjunto de igualdades idénticas y se determinó su frecuencia para cada problema y curso. Las producciones se dividieron en dos grupos —correctas e incorrectas— según condujesen o no al resultado del problema. Se obtuvo un listado secuencial de cada grupo, dando preferencia en primer lugar al número de cursos en los que se había encontrado la producción. La Tabla 1 muestra las primeras seis producciones incorrectas para el problema de la mecanógrafa.

Tabla 1

Producciones incorrectas para el problema de la mecanógrafa

Producciones incorrectas	Curso			
	1°	2°	3°	
$p + 2 = d - 3$	$p + 4 = d - 5$	12	42	21
$x + 2 = -3y$	$x + 4 = -5y$	2	3	1
$x + 2 = 3 - y$	$x + 4 = 5 - y$	1	3	3
$x + 2 = 3y$	$x + 4 = 5y$	1	1	3
$(x + 2)(x + 4) = (y - 3)(y - 5)$		1	2	3
$x + 2 = 3$	$x + 4 = 5$	3	5	1

Para el estudio de las producciones incorrectas se elaboró un protocolo que debía cumplimentarse para cada problema. El protocolo incluye la construcción del grafo de la resolución para el diagnóstico del error de acuerdo con el catálogo. En la Tabla 2 se muestra un ejemplo de los resultados de aplicar el protocolo para el

problema del heno. La primera columna muestra una producción incorrecta; la segunda columna, la reconstrucción de dicha producción en el grafo del problema —los arcos gruesos o elipses indican errores—; la tercera columna presenta el diagnóstico del error en concordancia con el catálogo.

Tabla 2
Producciones, grafos y diagnóstico para el problema del heno

Producción incorrecta	Grafo del problema	Diagnóstico
$\frac{40}{x} + 100 = \frac{60}{x}$	<p>PI-3</p>	<p>Errores de inversión multiplicativo y error de inversión aditivo</p>
$\frac{x}{40} - 100 = 60$	<p>PI-10</p>	<p>Error de igualdad</p>
$x - 4000 = 60$	<p>PI-21</p>	<p>Error de igualdad</p>
$\frac{x}{40} 100 = \frac{x}{60}$	<p>PI-23</p>	<p>Error de operación</p>

Los resultados que se muestran a continuación constituyen un resumen de los protocolos cumplimentados.

RESULTADOS

A continuación se presenta el análisis de las producciones incorrectas y se identifican algunos de los errores encontrados.

Producciones Incorrectas

Para cada problema se encontró un elevado número de producciones incorrectas diferentes. El número de producciones incorrectas en los distintos problemas está entre las dos y las tres decenas. La Tabla 3 presenta estos resultados para cada uno de los problemas.

Tabla 3

Igualdades incorrectas y producciones diferentes (n=258)

Problema	Igualdades incorrectas	Producciones diferentes
Mitad y tercera parte	89	20
Descomponer en 4 partes	136	21
Edad doble	127	33
Pedro y Juan	142	20
Terreno	103	30
Alcanzar	23	11
Encontrar	14	10
Liebre y galgo	56	30
Cavar	20	15
Heno	44	23
Rublos	75	31
Mecanógrafa	149	32
Dinero	159	28

Para un problema dado, las producciones incorrectas no eran las mismas en todos los cursos (ver Tabla 4). El número de producciones encontradas en dos cursos (compartidas) por cualesquiera dos cursos fue menor que el número de producciones encontradas en los tres cursos (persistentes, “2+” en la Tabla 4).

Tabla 4

Número de producciones encontradas en uno, dos o tres cursos

Problemas	Cursos								
	1°, 2°, 3°	1°, 2°	1°, 3°	2°, 3°	2+	1°	2°	3°	
Mitad y tercera parte	2	3	2	0	7	17	3	0	
Descomponer en 4 partes	4	2	1	2	11	3	6	1	
Edad doble	4	2	1	2	9	10	9	5	
Pedro y Juan	6	2	2	3	13	0	6	1	
Terreno	3	3	0	1	7	15	7	1	
Alcanzar	0	0	0	0	0	2	5	3	
Encontrar	0	0	0	1	1	4	6	0	
Liebre y galgo	1	1	1	1	4	7	10	9	
Cavar	0	1	0	1	2	5	8	0	
Heno	0	2	1	2	5	6	6	4	
Rublos	1	0	2	1	4	12	10	4	
Mecanógrafa	6	0	0	2	8	9	10	5	
Dinero	8	3	0	3	14	10	3	1	
Total	35	19	11	19	86	102	90	34	

En la mayoría de los problemas, la frecuencia de cada una de las producciones incorrectas fue muy desigual. La Figura 1 muestra la distribución del error en las producciones para los problemas mitad y tercera parte, descomponer en 4 partes, edad doble y Pedro y Juan.

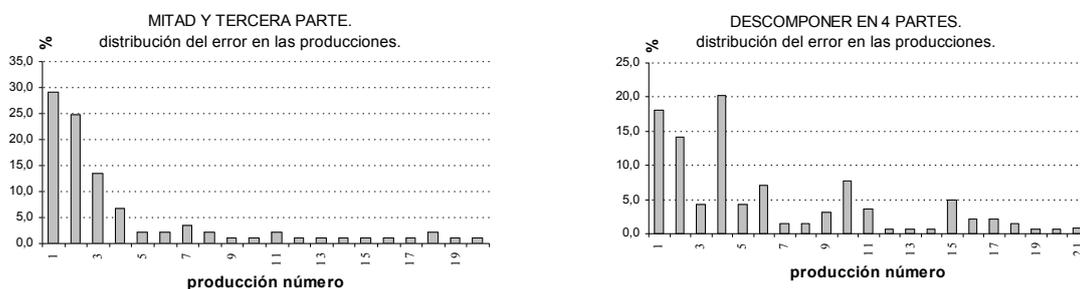


Figura 1. Ejemplos de la distribución del error

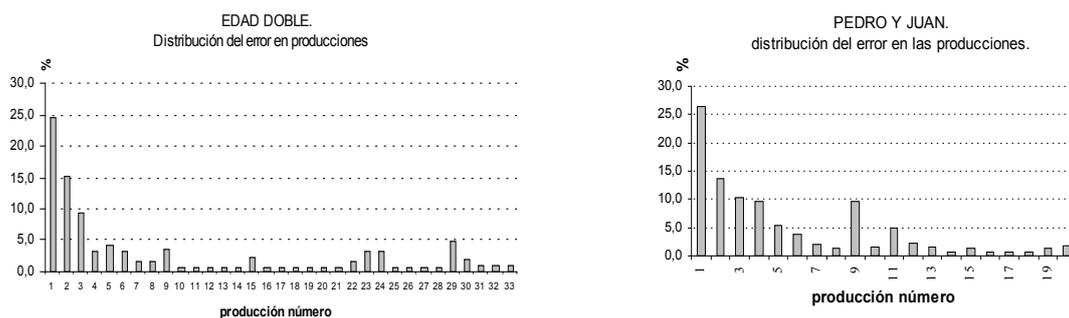


Figura 1 (continuación). Ejemplos de la distribución del error

En 8 de los 13 problemas, el error tiende a acumularse en unas cuantas producciones. A pesar de este hecho, el resto de las producciones suponen un porcentaje considerable del error.

En cada problema, el conjunto de producciones persistentes representa la parte más sustancial del error. Dicho porcentaje es superior al 50%. Cuando para las producciones persistentes, se examina el error que suponen del error total de cada problema en cada curso, este muestra ser también sustancial en cada uno de los cursos, con escasas desviaciones respecto al error total correspondiente a los tres cursos.

Cabe conjeturar que, para un problema dado, las producciones persistentes son las que señalan los errores que son propios de ese problema.

De los Errores Concretos Encontrados

En las producciones incorrectas se encontró un amplio número de errores cuya descripción de detalle o diagnóstico sólo puede entenderse poniéndolo en relación con el problema concreto en que el error es encontrado o con un uso peculiar del sistema matemático de signos del algebra.

La catalogación de los errores en tres categorías —en el uso de letras, en expresiones algebraicas y en igualdades— permitió detectar errores de cada una de éstas y diagnosticarlos de modo más preciso. La presencia de errores de estas categorías en las producciones persistentes de distintos problemas permitiría hablar de estos errores como errores del proceso de traducción algebraico.

En las producciones persistentes de los problemas estudiados se diagnosticaron errores de polisemia, de inversión, de operación, de concepto, de arbitrariedad y de igualdad. La Tabla 5 presenta estos resultados.

Tabla 5
Porcentaje del tipo de error del error persistente

Problemas	Uso de letras		Expresión algebraica			Igualdad
	Polisemia	Inv	Op	Con	Arb	
Mitad y tercera parte			66,5		33,5	
Descomponer en 4 partes	49,4			50,5		88,1
Edad doble					53,2	46,8
Pedro y Juan	61,9	28,9			7,6	
Terreno				19,1		100
Rublos	100				100	
Mecanógrafa					29,3	95,1
Dinero					51,1	87

Inv: inversión; Op: operación; Con: concepto; Arb: arbitrariedad

El uso polisémico de una letra se detectó en problemas en los que, en el enunciado, un mismo término se usaba en la designación, o como parte de la designación verbal de dos cantidades (por ejemplo, número, edad, billetes).

El error de inversión apareció ligado a las expresiones algebraicas que tenían la intención de expresar una cantidad que interviene en una relación de comparación.

Las expresiones algebraicas arbitrarias fueron abundantes en todos los problemas y se pueden interpretar como la manifestación de la dificultad del análisis de la cantidad que pretenden expresar, o de que el análisis de alguna cantidad no se ha realizado del modo adecuado.

El error de igualdad se manifestó de diversas maneras. Una de ellas consiste en declarar como iguales, cantidades que, sin ser la misma o tener el mismo valor, se pueden considerar fuertemente relacionadas. Este es el caso de una relación hipotética o de causa efecto.

CONCLUSIONES

Los estudiantes producen para cada problema una gran cantidad de igualdades incorrectas diferentes. La distribución del error en producciones muestra que un gran porcentaje del error corresponde a producciones persistentes. Esto lleva a afirmar que, para cada problema, hay un conjunto de producciones incorrectas que se pueden encontrar en estudiantes de cualquier curso. Estas producciones indicarían los errores que se cometen inducidos por el problema concreto que se está poniendo en ecuaciones. Los errores que contienen las producciones persis-

tentes pueden diagnosticarse como uno de los que constan en el catálogo, aunque no todos los tipos mencionados en el catálogo se encontraron en las producciones persistentes. Además, la asociación que se indica entre determinados errores y tipo de problema puede ser un buen punto de arranque para entender tales errores.

Agradecimientos

Este estudio ha sido financiado en parte por el MECDCG de ISG de Proyectos de Investigación. Proyecto de investigación SEJ2005-06697/EDUC. Modelos de Enseñanza para el desarrollo de Competencias de Modelización y Resolución de Problemas Aritmético-Algebraicos.

REFERENCIAS

- Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos*. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.
- Clements, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), 16-30.
- Hershkovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-86). Reston, VA: NCTM.
- Laborde, C. (1990). Language and mathematics. En P. Nesher P. y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 53-69). New York: Cambridge University Press.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of an algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
- Mestre, J. P. (1988). The role of language comprehension in mathematics and problem solving. En R. R. Cocking y J. P. Mestre (Eds.), *Linguistic and cultural influences on learning mathematics* (pp. 201-220). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Englewood Hills, NJ: Prentice Hall, Inc.
- Socas, M. y Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el algebra escolar. *Uno*, 14, 7-24.
- Stacey, K. y McGregor, M. (1993). Origins of students' errors in writing equations. En A. Baturo y T. Cooper (Eds.), *New directions in algebra education* (pp. 205-212). Brisbane, Australia: Queensland University of Technology.

Este documento fue publicado originalmente como Cerdán, F. (2008). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper” y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Fernando Cerdán
Universidad de Valencia
Fernando.Cerdan@uv.es