El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en Educación Primaria

Genaro de Gamboa, Edelmira Badillo y Miguel Ribeiro

La construcción de un conocimiento matemático con comprensión por parte del alumno requiere del profesor un conocimiento que permita conectar conocimientos previos y futuros de los alumnos. En este artículo nos enfocamos en el horizonte matemático como componente del conocimiento del profesor, aportando una interpretación de este con base en tres niveles que se construyen a partir del análisis de tareas relacionadas con la práctica docente. En ejemplos de situaciones de aula de educación primaria relacionadas con tareas de geometría y medida, se presentan y discuten indicadores con el objetivo de describir y analizar cómo un conocimiento del horizonte matemático permite enriquecer la práctica de aula.

Términos clave: Conexiones; Conocimiento profesional del profesor; Educación primaria; Geometría; Horizonte matemático; Medida; Práctica matemática

Mathematical Horizon in Teachers' Knowledge for Teaching: Geometry and Measurement; Elementary Education

Promoting the elaboration of students' mathematical knowledge and understanding requires teachers' having a knowledge allowing connecting students' prior and future knowledge. In this paper we focus on aspects of the mathematical horizon as one of teachers' knowledge dimensions, presenting an interpretation of such knowledge, with a practice-based approach, grounded in the analysis of three levels of teachers' practices. Using examples from tasks in geometry and measurement in elementary school practices, some indicators are presented and discussed with the aim of describing and analyzing how teachers' horizon knowledge allows enriching teaching practices.

Keywords: Connections; Geometry; Mathematical horizon; Mathematical practice; Measurement; Primary school; Teachers' professional knowledge

De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria.*PNA, 10*(1), 1-24.

En el contexto cotidiano, cuando alguien nos habla del horizonte automáticamente pensamos en la línea hacia donde nos dirigimos cuando vamos navegando en un barco y nos adentramos en el mar. Pero, como en casi todas las situaciones, si al hablar del horizonte cambiamos el contexto, por ejemplo, cuando nos situamos en una estación orbital, este adquiere un significado muy distinto. Así, esta es una de las muchas expresiones que tienen distintos significados dependiendo, por un lado, del punto de vista desde el cual lo consideramos y, por otro, del propio conocimiento sobre los distintos contextos en que pueda ser utilizada. Pero, además de ser una fuente de confusión, la multiplicidad de posibles sentidos y formas de interpretación de una determinada expresión, se puede considerar también como una increíble fuente de significación y oportunidades (Bardelle y Ferrari, 2011). En el contexto de la Educación Matemática, en particular, la existencia de distintas interpretaciones y visiones nos permite abrir una reflexión y discusión que conduzcan, en particular, al desarrollo de este concepto y, en general, a contribuir al avance del propio campo de la Educación Matemática.

Pensando en el horizonte, en el dominio de la Educación Matemática, los últimos años han sido ricos en la emergencia de distintas interpretaciones, abordajes y significados. Así, centrándonos en el concepto de horizonte matemático para la enseñanza (HCK en adelante), este se puede abordar también desde distintos enfoques y cada uno de ellos se sustenta en las diversas interpretaciones y visiones que los autores dan al HCK. La discusión y reflexión sobre algunas de estas perspectivas han sido el foco de uno de los grupos de discusión en el 38º encuentro del grupo PME (Wasserman, Mamolo, Ribeiro y Jakobsen, 2014). Aunque estas distintas perspectivas tienen un mismo punto de partida, la idea de horizon content knowledge presentada por Ball, Thames y Phelps (2008), las diversas visiones e interpretaciones de los autores, han permitido distintas aproximaciones (en algunos casos complementarias) a lo que se puede entender por HCK.

Si por un lado, y de forma sintética, tanto Zazkis y Mamolo (2011), como Wasserman y Stockton (2013) asocian el HCK a un conocimiento matemático avanzado, y lo enfocan en términos puramente matemáticos (con algunas distinciones entre ellos), por otro lado, Jakobsen, Thames, Ribeiro y Delaney (2012) asocian ese conocimiento avanzado con lo que ocurre en la práctica de aula —desde una perspectiva avanzada y elemental—. La perspectiva del HCK que presentamos en este artículo se puede considerar más cercana a la defendida por Jakobsen et al. (2012), pero con algunas especificidades y abordajes distintos. En ese sentido, no compartimos la idea de que el HCK es una adaptación de la matemática avanzada en el contexto de la enseñanza (no en el escolar, que quiere decir que es compartido por el estudiante), pero podemos entender el porqué otros ubican el HCK en la matemática universitaria. La perspectiva que presentamos y exploramos en este artículo considera que no solo la distinción entre conocimiento elemental y avanzado tiene sentido en el ámbito matemático sino también en el conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Fernández y Figueiras, 2014). Desde esta perspectiva, el HCK es una forma de referirse al conocimiento del profesor que da forma a otros tipos de conocimientos en la práctica.

Al referirse al conocimiento matemático avanzado, Zazkis y Leikin (2010), lo consideran, en el caso de profesores de secundaria, como el conocimiento matemático que se imparte en las universidades. Asumiendo que el conocimiento del profesor es específico no solo de su profesión sino también del nivel de enseñanza, y del tópico que imparten en cada momento (Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013), considerar el conocimiento matemático avanzado como el que se imparte en la universidad nos lleva a preguntarnos a qué corresponderá este conocimiento para profesores de Educación Primaria. Así, entendemos el conocimiento matemático avanzado como un conocimiento profundo y riguroso de los contenidos que enseñan, asumiendo de cierta forma también la perspectiva de Ma (1999) para el conocimiento profundo del contenido. Considerando las particularidades de las tareas a enseñar, esta definición es válida para profesores desde infantil a universidad, y formadores de profesores (Mellone, Jakobsen y Ribeiro, 2015).

Situándonos en educación primaria, por ejemplo, en la relación perímetro y área, este conocimiento avanzado se asocia con saber cómo puede variar el área para figuras de un perímetro dado y las posibles propiedades matemáticas que sustentan esa variación (sin saber determinar necesariamente el valor exacto de esa área). En el caso concreto del rectángulo de perímetro dado, este conocimiento se asocia, por ejemplo, con conocer la relación funcional entre uno de los lados (variable independiente) y el área (variable dependiente) e interpretar los cambios que se producen en el área al variar la longitud de los lados —y la relación de estas dimensiones si cambiamos área por perímetro—. Por otro lado, este conocimiento matemático avanzado (profundo y riguroso) se hace explícito, entre otros, en los diferentes ejemplos y materiales que el profesor pueda utilizar en la enseñanza de cada uno de los contenidos, lo cual es reflejo del conocimiento profundo de los temas que contiene el currículo, de la relación de éstos con los contenidos de otras asignaturas, así como del conocimiento de los estándares internacionales.

En los enfoques de Zazkis y Mamolo (2011) y Wasserman y Stockton (2013), la responsabilidad de hacer conexiones entre el conocimiento recae en el alumno que comprende la profundidad de un concepto matemático. Por su lado, Jakobsen et al. (2012) hablan de la capacidad del profesor para oír lo que los alumnos dicen o hacen y buscar aspectos matemáticos más avanzados que les puedan ser útiles para profundizar en las ideas que proponen, dejando "la puerta abierta" a aprendizajes futuros.

En nuestro caso, consideramos que es el profesor el que utiliza su conocimiento, no solo de la matemática sino también de la enseñanza, de los estudiantes y del currículo, para identificar conexiones que se podrán hacer explícitas al preparar tareas, al implementarlas y al gestionar las discusiones que se producen en el aula. Si bien en los primeros enfoques la dificultad recae solo en el dominio del conocimiento matemático implícito, en los últimos la dificultad recae también en el conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje. Consideramos, así, de forma explícita, que nuestra interpretación del HCK complementa la de Jakobsen et al. (2012), conjugando además la idea del conocimiento curricular vertical y del conocimiento curricular horizontal de Shulman (1986) —que se refieren respectivamente al conocimiento de las matemáticas a lo largo del currículo y a conocimientos relacionados con otras materias que estudian los alumnos—.

Así, desde nuestra perspectiva, el HCK es un tipo de conocimiento que permite conectar otras categorías del conocimiento profesional del profesor. Asumiendo que el desarrollo profesional del profesor empieza con su formación inicial (Ribeiro, 2013), es esencial que ésta incluya el diseño de tareas formativas que promuevan el desarrollo del HCK para atender la complejidad de la enseñanza. Esta perspectiva de formación les permitirá también, tener el mismo tipo de experiencias (dificultades sentidas en primera persona) que esperamos puedan tener sus alumnos —aunque a un nivel distinto— (Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2011; Pinto y Ribeiro, 2013).

Para aclarar nuestra interpretación del HCK, y con la intención de contribuir a una discusión más amplia sobre el contenido y naturaleza del conocimiento del profesor, en este artículo perseguimos tres objetivos para aproximarnos a una caracterización del HCK: (a) dar una visión de nuestra interpretación del HCK, (b) presentar un conjunto de indicadores para el análisis y discusión del HCK en la práctica y (c) analizar ejemplos de aula con base en los indicadores definidos y proponer algunas opciones que permitirían enriquecer la práctica, dando así una idea de lo que correspondería a un HCK amplio, profundo y cada vez más completo.

El artículo se encuentra estructurado en cuatro apartados. En el primero, reflexionamos sobre lo que entendemos por HCK y mostramos ejemplos de la importancia del HCK en la gestión de la actividad matemática de aula, centrándonos en la relación perímetro-área-volumen. En el segundo, presentamos indicadores de HCK que permiten caracterizar la práctica matemática de aula en términos de lo que consideramos aspectos del contenido del HCK. En el tercero, aplicamos los indicadores de HCK al análisis de un episodio de aula sobre la mediatriz. Finalmente, acabamos con algunos comentarios sobre el papel del HCK en y para la práctica, y la necesidad de repensar la formación de profesores para posibilitar el desarrollo de este conocimiento específico del profesor.

El horizonte matemático en el análisis de la práctica matemática

Asumimos que el HCK es un tipo de conocimiento que tiene en consideración las demás componentes del conocimiento del profesor, las influye y es influenciado por ellas. En esa línea, Fernández y Figueiras (2014) conceptualizan el HCK como un tipo de conocimiento que afecta a los diferentes dominios del conocimiento del profesor en la práctica. Así, a título de ejemplo clarificador, se supone que un profesor con un HCK sólido y profundo, al enseñar proporcionalidad de forma aritmética entiende cómo esto ligará con aspectos posteriores de la función lineal; es decir, sabe que este conocimiento ha de ser recuperado por el estudiante cuando estudie la pendiente de una recta.

Es claro que nuestra interpretación del HCK tiene también una componente muy importante de conocimiento matemático avanzado pero que deberá ser considerado desde tres perspectivas. En primer lugar, consideramos un conocimiento matemático avanzado que permitirá al profesor relacionar la proporcionalidad con la pendiente de una recta. En segundo lugar, siguiendo el modelo de Shulman (1986), incluimos un conocimiento avanzado de la pedagogía asociada al contenido, que permita relacionar, entre otros, la proporcionalidad numérica con la geométrica, el papel de la medida de magnitudes en el estudio de la proporcionalidad, o la relación entre los lados de triángulos rectángulos semejantes y sus ángulos. En tercer lugar, consideramos un conocimiento curricular relacionado con conocer otros contenidos matemáticos así como contenidos de otras asignaturas en los que se aplique la proporcionalidad.

Esta perspectiva asume que tener ese conocimiento avanzado permitirá al profesor mucha más libertad para que el conocimiento matemático escolar sea transferible, lo que implica considerarlo de forma imbricada con todas las componentes del conocimiento del profesor. En esta manera de entender el HCK subyace el propósito central de establecer posibles conexiones, tanto dentro de la propia matemática (dentro de un mismo tópico y con otros tópicos) como con otros ámbitos de conocimiento en los que los estudiantes aplican (o puedan aplicar) sus conocimientos.

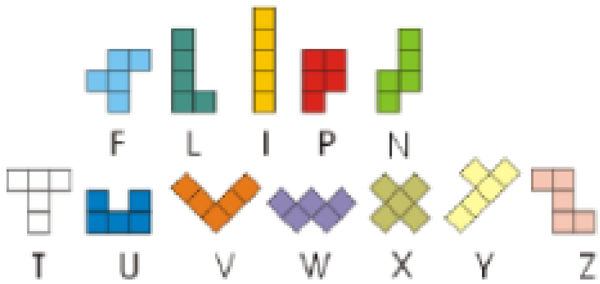
Fernández y Figueiras (2014) consideran que el HCK se puede caracterizar en tres de las principales tareas que realiza el profesor y en las que el HCK puede identificarse de forma explícita: (i) la planificación, (ii) la acción, y (iii) la reflexión. Para identificar y describir el HCK en la práctica proponen una serie de indicadores para analizar ejemplos que ilustran su expresión en la práctica de aula atendiendo a la perspectiva de la continuidad entre etapas educativas. Tomando como referencia los momentos de la práctica docente en los que aparece el HCK propuestos por Fernández y Figueiras (2014), proponemos tres niveles para el HCK relacionados con las capacidades del profesor para la construcción de conocimiento matemático con sus alumnos: (1) Reconocer y relacionar, (2) Interpretar y transferir, y (3) Ampliar y conectar.

A continuación, desarrollaremos los tres niveles del HCK presentados a través del análisis de tres actividades de geometría del aula de primaria. Estas actividades fueron presentadas secuencialmente a maestros en formación, pidiéndoles que analizaran los contenidos matemáticos implícitos y las dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de dichos contenidos. Se han escogido actividades de naturaleza distinta para discutir el rol e importancia del HCK en distintos momentos de la práctica, como es el diseño de actividades, el análisis de situaciones de práctica de aula y la interpretación (y asignación de significado y potencialidades) de las producciones de los alumnos.

Reconocer y relacionar

Consideremos el enunciado de la tarea de la figura 1, que tiene por objetivo explorar la relación área-perímetro en estudiantes de sexto de primaria. Esta tarea fue propuesta a futuros maestros pidiéndoles resolverla, identificar los contenidos matemáticos relevantes implícitos en la tarea, valorar la importancia de estos contenidos matemáticos en su formación profesional y valorar la importancia de estos contenidos en el aprendizaje de las matemáticas de estudiantes de sexto grado de primaria. Los formadores de profesores, conscientes de la amplitud y complejidad de la demanda, dejaron libertad a los futuros maestros para que sus evaluaciones y reflexiones fueran en direcciones distintas.

Los pentominós son los polígonos formados juntando 5 cuadrados por uno o más lados. Hay 12 posibles pentominós. El matemático Solomon W. Golomb los patentó al año 1975 y es uno de los rompecabezas más conocidos en la actualidad. Aquí tienes una reproducción con el nombre en que se conocen (según la letra que recuerdan).



Si bien los 12 pentominós tienen la misma área, no todos tienen el mismo perímetro. Si nombramos c al lado del cuadrado y lo tomamos como unidad de perímetro podemos determinar el perímetro de cada uno de los pentominós. Si quieres puedes completar la tabla y buscar el pentominó o pentominós de más y menos perímetro.

	Perímetro		Perímetro		Perímetro
N	12	**V**		**L**	
T		**I**	12	**U**	
F		**Y**		**W**	
P	10	**X**		**Z**	12

Figura 1. Enunciado de una tarea sobre la relación área-perímetro para estudiantes de primaria

Este tipo de demanda abierta para el análisis de una tarea posibilitó una mayor riqueza en las discusiones entre los estudiantes para maestros y los propios formadores de profesores (Jaworski, 2008; Mellone, Jakobsen y Ribeiro, 2014).

El problema de la relación entre perímetro y área ha sido extensamente estudiado y documentado. Por ejemplo, Dickson, Brown y Gibson (1984) discuten la confusión frecuente entre área y perímetro atribuyéndolo a que los primeros encuentros estructurados con estos conceptos vienen asociados a procesos de medida y al cálculo mediante fórmulas de la medida de objetos. Además, en la mayoría de los casos se proponen ejemplos prototípicos de polígonos que potencian la atribución de propiedades matemáticas falsas. En el caso del ejemplo de la tarea de la figura 1, se proporcionan polígonos no prototípicos (pentominós) y se trata de reconocer la relación entre los atributos medibles (en este caso, área y perímetro), analizando críticamente que un cambio en el atributo de un objeto (e.g., la forma del símbolo) puede afectar a ciertas medidas (e.g., el cambio de posición de los cuadrados del pentominó para formar un símbolo diferente puede cambiar el perímetro pero no el área).

En este sentido, diversos estudios (Dickson, Brown y Gibson, 1984; Kaput, 1999; Mason, Stephens y Watson, 2009) enfocados en esta problemática consideran que sería esperable que la variabilidad entre estas dos magnitudes, en concreto, no constituya para el conocimiento del profesor una situación matemáticamente crítica. Además, los profesores deberían considerar la variabilidad del área-perímetro como una problemática común y, por tanto, consideramos que debería ser natural que el profesor (en ejercicio o en formación) la cuestione al analizar una tarea que la involucre.

Cuando esta tarea fue presentada a futuros maestros solicitando que la evaluaran y reflexionaran sobre ella, en primer lugar manifestaron opiniones sobre lo curioso de la tarea, la riqueza de la manipulación, la anécdota de que con los pentominós se forman las letras del alfabeto, al tiempo que realizaron el cálculo correcto del perímetro e identificaron el pentominó de mayor o menor perímetro. Sin embargo, a un nivel matemático más profundo, no consideraron importante como foco de evaluación o discusión las justificaciones de las propiedades matemáticas implícitas en la relación entre área y perímetro al variar la forma de una figura geométrica.

Además, reconocieron que los contenidos matemáticos involucrados en la tarea eran los de perímetro y área, aunque en sus evaluaciones y reflexiones no se enfocaron en el porqué relacionar el perímetro y el área es una parte importante del conocimiento del profesor; o porqué es importante para los estudiantes construir un conocimiento amplio y sustentado sobre esta relación, o bien cuáles podrán ser las dificultades de los estudiantes en el futuro al no construir dicha relación. Así pues, observamos que los profesores en formación experimentan cierta dificultad para identificar y analizar aspectos matemáticos y pedagógicos relacionados con la relación área-perímetro.

Contextualizando en términos del HCK del profesor, la dificultad de esta tarea radica en dos componentes críticas que se relacionan: en primer lugar, con reconocer los contenidos matemáticos envueltos y, en segundo lugar, con reconocer el conocimiento asociado al rol de la unidad. Por un lado, es necesario reconocer que la pregunta no es sobre la magnitud del perímetro (no se trata sólo de calcular el valor numérico del perímetro sumando la longitud de los lados del pentominó) sino de entender que el valor numérico resultante es relativo (12 en todos los pentominós excepto en el de forma P que es 10) y está relacionado con la forma del pentominó y el área que delimita. Por otro lado, y como componente crítica, tenemos el conocimiento asociado a la necesidad de construir una unidad de referencia común para poder comparar e interpretar la situación en términos de esa unidad —unitizing, en el sentido de Lamon (1996)—.

Lo descrito en párrafos anteriores muestra uno de los aspectos del HCK considerados esenciales a desarrollar en la formación de profesores, tal como es la capacidad para identificar y analizar la relación entre varios conceptos, por ejemplo en esta tarea, la invariabilidad de una magnitud (área o perímetro) bajo ciertas transformaciones. Así, en esta tarea no basta con usar una medida no estándar como un proceso de asignación numérica a partir de un parámetro arbitrario, sino se hace necesario profundizar en la relación de invariabilidad de las magnitudes, longitud y área, cuando se producen transformaciones de la forma. El HCK se relaciona también con reconocer y relacionar los conceptos matemáticos involucrados en la tarea para gestionar posibles comentarios, errores y dificultades de los estudiantes al enfrentarse a su resolución y tomar decisiones sobre la pertinencia o no de hacer explícitas dichas relaciones.

Esta relación particular entre área y perímetro no es sólo importante en la construcción de conocimiento matemático a nivel puntual (sexto de primaria) sino que es una relación que vuelve a aparecer de manera análoga en otras figuras geométricas planas. Por tanto, se pone de relieve la importancia de que el profesor conozca (y sea consciente) de las múltiples posibles conexiones que pueden realizarse entre este tipo "particular" de relación y distintos tópicos tanto matemáticos como extra matemáticos. Además, ese conocimiento puede permitir al profesor tanto implementar y explorar tareas que lleven a abrir puertas para que los alumnos puedan comprender posteriormente la relación área y volumen, como ampliar las nociones anteriormente trabajadas, y gestionar las posibles dificultades de los estudiantes. Esta misma tarea se puede complementar con otra en la que se fije el perímetro y se analice cómo varía el área, de dónde podrían emerger otros aspecto del HCK también relacionados con reconocer y relacionar.

Aplicar y transferir

En otro nivel, al proponer la misma actividad a profesores en formación inicial, observamos que algunos futuros profesores, aun valorando la actividad como positiva y haciendo explícito su conocimiento de las propiedades que se manifiestan y sus relaciones (reconocen y relacionan) revelaron dificultades para interpretar y transferir ese conocimiento a otra situación en la que se aplique el mismo resultado. Para mostrar cómo se presenta en la práctica este segundo nivel del HCK consideramos un episodio (figura 2), tomado de Fernández (2011), que fue presentado al mismo grupo de futuros profesores para su análisis. Este episodio se configura como una situación de contingencia para el profesor (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) en el que aparece también la relación entre área y perímetro, pero ahora en el contexto de rectángulos.

Identificamos que este tipo de situación se relaciona con otro nivel de conocimiento, que incluimos en el HCK, ya que a pesar de que un mismo futuro profesor haya valorado la actividad de los pentominós (figura 1) como relevante y haga explícito su conocimiento de las propiedades y relaciones de perímetro-área que se manifiestan y sus relaciones (lo que ha ocurrido con algunos de los futuros profesores que han resuelto la tarea), se ha verificado, posteriormente, que tener ese conocimiento no implica, necesariamente, tener la capacidad de transponer (aplicar) ese conocimiento a otras situaciones en las que éste emerge (directa o indirectamente).

Como ejemplo, y continuando en el contexto de la relación entre perímetro y área, analizar el siguiente episodio de clase sobre la relación área-perímetro (figura 2) implica aplicar y transferir esos conocimientos a otra situación, además de reconocer y relacionar, tal como ocurría en la tarea anterior. Consideramos que esta segunda dimensión se encuentra en un nivel distinto de la anterior, pero sustentándose en ella.

El profesor corrige ejercicios rutinarios de cálculo de perímetros y áreas. En este caso, de un rectángulo de lados 22 y 28 cm. En la pizarra, dibuja el rectángulo y dicta en voz alta mientras escribe:

$$Perímetro = 2{\cdot}22 + 2{\cdot}28 = 100$$

A continuación, se establece el siguiente diálogo:

Anna: ¿Por qué cien?

Profesor: Haz esta operación de aquí y verás cómo te sale a 100.

Marc: ¡Ah! Es como si el 28 le da 3 al 22 y tienes cuatro lados de 25, o sea 100.

Profesor: Vale. Ahora el área.

Marc: Pues 25 por 25.

Profesor: ¡No! El área es 22 por 28. [Resuelve la operación en la pizarra]. 616

Figura 2. Fragmento de un episodio de clase tomado de Fernández (2011)

Al analizar y reflexionar sobre este fragmento, los futuros maestros en general, no resaltan ni cuestionan el hecho de que Marc esté estableciendo claramente una falsa relación perímetro-área cuando afirma que figuras del mismo perímetro han de tener también igual área (esto, además de relacionarse con su proprio conocimiento se relaciona con la capacidad de atribuir sentido a los comentarios de otros, identificando el error del alumno). Por su parte, el profesor del episodio reconoce este error, aunque no se evidencia que reconozca su origen. En cambio, en esta situación el profesor centra la discusión y la reflexión en el problema del cálculo del valor numérico del perímetro (Anna) y del área, no tomando en consideración los comentarios de Marc que se asocian al problema de comprensión de la relación área y perímetro. Como propuesta para contrarrestar esta dificultad (de Anna y Marc), propone que se debería revisar el cálculo del perímetro y del área de los diferentes rectángulos, lo cual podría permitir a los estudiantes ver y superar el error.

En este episodio se identifican dos momentos matemáticamente críticos que nos llevan a una reflexión sobre la actuación de profesor y el conocimiento subyacente. El primero ocurre cuando Anna pide la razón del porqué se obtiene 100, ya que al no haber un cuestionamiento sobre el significado de ese valor, los números pierden significado. Al centrar la operación en el cálculo numérico se pierde la relación con la magnitud lineal que se está midiendo, que es precisamente lo que permite que la idea de Marc se corresponda con una transformación en los lados de la figura que deja invariante el perímetro. El segundo momento surge del concepto erróneo que usa Marc cuando, al aplicar su transformación numérica al cálculo del área, considera que dos figuras con el mismo perímetro también deben tener la misma área. Al no profundizar en las intervenciones de Marc (tanto en términos de las unidades de medida de referencia como en términos de la relación perímetro-área), el profesor permite una exploración errónea del contenido y, de forma asociada, del rol de las unidades de referencia (Lamon, 1996) que le permitirían hacer comparaciones de áreas y perímetros. La reflexión sobre estas dos situaciones, y sobre el conocimiento que pone en juego el profesor en su exploración, nos permite indagar las características del HCK que puedan contribuir para promover una mejor comprensión de cada uno de los tópicos que se abordan (la relación entre perímetro y área de diferentes figuras geométricas) y de algunas de las conexiones que se pueden elaborar.

En el caso del comentario de Anna ("¿por qué cien?"), un HCK que contribuya a ayudar a la alumna a elaborar su conocimiento matemático de forma estructurada, se correspondería con un conocimiento sobre la dificultad evidenciada. Este se puede sustentar en dos aspectos distintos: el conocimiento de las propiedades matemáticas que subyacen en el cálculo y el conocimiento de la pedagogía asociada a estos contenidos para este nivel de escolaridad. Estos dos tipos de conocimiento le ayudarían al profesor a oír lo que dice Anna y a explorar la justificación matemática que sustenta esa afirmación para intentar que la alumna supere la dificultad. Ese conocimiento del profesor que se pone en juego se relaciona tanto con la problematización de la naturaleza del comentario, cómo con la dificultad matemática asociada.

En el caso específico del rectángulo presentado en la situación de clase, el profesor tendría que indagar si el problema es de comprensión de la equivalencia al calcular numéricamente el perímetro como $P = 22cm + 22cm + 28cm + 28cm$ con $P = 2 \cdot 22cm + 2 \cdot 28cm$; o bien si es un problema de generalización algebraica del cálculo de perímetro como $P = acm + acm + bcm + bcm = 2acm + 2bcm$. Esta indagación, se asocia a la interpretación y comprensión de los motivos matemáticos que pueden sustentar las dificultades de los alumnos, así como con las posibles formas de preparar y explorar tareas, teniendo como punto de partida los comentarios de los alumnos (Anna), y encuadrar esas exploraciones en un conjunto de conexiones que consideren también diferentes aspectos del currículo.

A un nivel distinto, y algo más abstracto, un HCK que posibilite promover en los alumnos una efectiva comprensión de lo que hacen y porqué lo hacen se relaciona también con interpretar si la dificultad identificada se asocia a la comprensión del significado del perímetro de una figura plana como magnitud medible. Al analizar el significado y el cálculo de perímetro desde el conocimiento avanzado, el profesor podría establecer conexiones entre la representación geométrica, el valor numérico y la representación lineal de la magnitud medible, haciendo una transferencia de los comentarios y dudas que han emergido en el aula —de modo que los alumnos puedan asignarles significado (tal y como se ilustra en la figura 3)—.

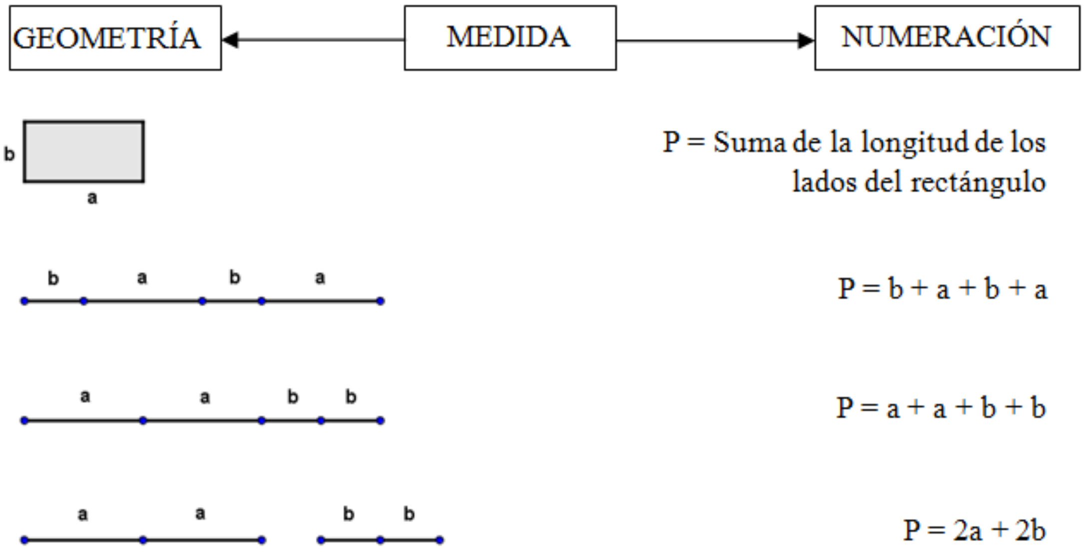


Figura 3. Conexiones entre representaciones asociadas al cálculo de perímetro

En el segundo momento crítico, la ingeniosa propuesta de Marc de transformar el rectángulo en un cuadrado para calcular el perímetro de una forma más sencilla le ofrecería al profesor una excelente oportunidad para indagar la comprensión de los estudiantes de la relación perímetro y área. En la segunda intervención, Marc "Pues 25 por 25" evidencia una idea errónea, ya documentada por la investigación (Dickson, Brown y Gibson, 1984), que es considerar que si la transformación lineal funciona para el cálculo del perímetro también funcionará para el cálculo del área (cuadrática). Esta dificultad requeriría una exploración sobre las propiedades de la linealidad y el establecimiento de una relación justificada con el caso cuadrático.

Las dificultades evidenciadas por los alumnos en la situación presentada (figura 2), que han pasado desapercibidas tanto por el profesor que gestiona la clase como por los futuros maestros al analizar y reflexionar sobre este episodio, desvelan aspectos clave del HCK. En primer lugar, las dificultades para establecer conexiones entre distintos tópicos (significados geométricos y numéricos del perímetro, ver figura 3) nos lleva a reflexionar sobre la importancia y la necesidad de un conocimiento específico sobre cómo utilizar la conexión intrínseca entre la figura geométrica y el cálculo numérico del perímetro. Dicha conexión ayudaría a los estudiantes a no perder de vista la relación entre la expresión numérica del cálculo del perímetro($22cm + 28cm + 22cm + 28cm$) y la correspondencia con los lados del rectángulo.

En este sentido, las propiedades conmutativa y distributiva, cuya utilización subyace al cálculo $22cm + 28cm + 22cm + 28cm = 22cm + 22cm + 28cm + 28cm = 2 \cdot 22cm + 2 \cdot 28cm$, se corresponde con una reordenación de los lados del rectángulo, así como con la conservación de la longitud al intercambiar el orden de los segmentos que forman la línea poligonal (figura 3). Una profundización en esta conexión permitiría abrir la puerta a una posterior generalización algebraica de estas operaciones $a + a + b + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b$, así como a la relación entre propiedades algebraicas y su interpretación geométrica. Esto permitiría que los alumnos pudieran atribuir, efectivamente, sentido y significado a algunas operaciones algebraicas y, en consecuencia, dejar de considerarlos solo como una manipulación de símbolos.

Detrás de esta conexión (geometría y numeración) para construir el significado de perímetro está el problema fundamental de comprender la relación entre las propiedades medibles de una figura geométrica (relación perímetro y área). La asignación de un valor numérico a una magnitud medible requiere el establecimiento de una unidad de medida explícita para cada magnitud. Por tanto, si no se da importancia a la unidad de medida al asignar el valor numérico del perímetro (100), tal y como ocurre en el primer momento crítico del episodio, se pierde la conexión con el contexto específico (geometría) y se trabaja sólo en el plano aritmético, lo que puede sustentar la emergencia de dificultades para entender la relación entre perímetro y área (lineal/cuadrática).

El conocimiento sobre la medida se revela así como un elemento clave que permite conectar significados (numérico y geométrico), así como aprovechar las dificultades que emergen en el aula y hacer conexiones con otros conceptos matemáticos posteriores como es la ampliación de la relación área-perímetro a otras relaciones entre magnitudes medibles directamente (e.g., relación área-volumen) que se tornan fundamentales para la comprensión de relaciones entre otras magnitudes que no son directamente medibles en las ciencias experimentales (e.g., presión y densidad).

Así, el profesor, pretendiendo promover que sus alumnos entiendan en cada momento lo que hacen y para qué lo hacen, necesita interpretar las relaciones entre distintas magnitudes desde una perspectiva avanzada, en la cual se incluyen tres tipos de conocimientos. Por un lado, conocimientos matemáticos avanzados, como puede ser un conocimiento de cómo justificar cual es la figura de área máxima para un perímetro dado, y porqué. Por otro lado, aspectos relacionados con la enseñanza del perímetro y del área —cuáles pueden ser los mejores ejemplos o materiales—así como aspectos del aprendizaje del perímetro y del área —como ser consciente de errores comunes entre los estudiantes—. Finalmente, un conocimiento avanzado del currículo, como puede ser conocer la relación área volumen, o el papel de estas relaciones en los problemas de optimización usando derivadas y del uso de la medida en otras asignaturas.

Ampliar y conectar

El tercer nivel del HCK se refiere a un conocimiento asociado a una mirada en perspectiva (vertical y/u horizontal) que permitirá al profesor reconocer situaciones matemáticas análogas posibilitando su transferencia a otros contextos y potenciando la emergencia de conexiones con otras materias. Por ejemplo, al comprender las dificultades de los alumnos asociadas a la relación entre el perímetro y el área, el profesor podría realizar la extrapolación a que figuras de la misma área puedan tener volúmenes diferentes así como justificar matemáticamente dicha conexión. Para explorar estas relaciones que se pueden considerar de ampliación y conexión partimos de una producción de un niño de segundo de primaria sobre la relación área-volumen (figura

4). Esta producción fue presentada a los mismos futuros maestros para que analizaran y valoraran los argumentos matemáticos implícitos en la respuesta del niño y para que se posicionaran en cómo la gestionarían hipotéticamente en el aula de matemáticas.

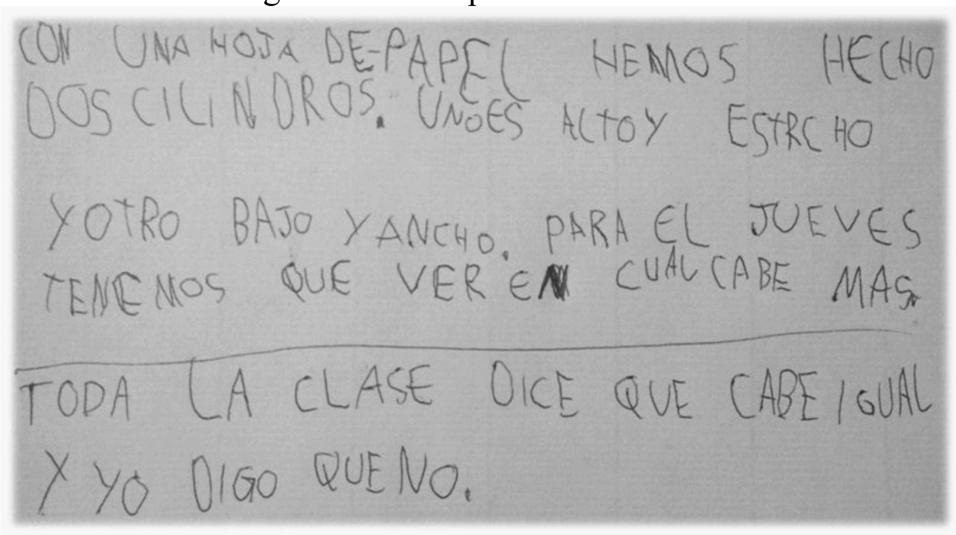


*Figura 4.*Fragmento de una producción de un alumno sobre la relación área-volumen

En las reflexiones de los futuros profesores sobre el pensamiento matemático exhibido por el alumno, la mayoría ha identificado la relación entre área y volumen, pero en sus argumentaciones no han establecido una conexión con las relaciones entre área y perímetro discutidas en las tareas anteriores. En algunos casos, verbalizaron la necesidad de la experimentación para comprender mejor la situación presentada, pero en ningún momento no aplicaron la relación vista anteriormente para el perímetro y el área, lo que podría evidenciar dificultades para ampliar y conectar algo que conocen en un determinado contexto matemático con otro contexto distinto. Se hace evidente también la dificultad en efectuar una conexión con el problema isoperimétrico a una dimensión mayor. En particular, el caso de la ampliación y conexión de la relación área-volumen es problemática ya que tiene muchas implicaciones en la vida real y necesita una elaboración profunda. La importancia de un conocimiento que permita a los profesores hacer ampliaciones y conexiones se torna esencial para que el profesor pueda elaborar e implementar tareas que posibiliten desarrollar, entre otras cosas, una buena construcción de la relación perímetro-área-perímetro en edades tempranas.

Esta tercera dimensión, que complementa a las anteriores, es esencial, por ejemplo, en un conocimiento que permita entender y argumentar porqué no es posible aumentar el tamaño de los objetos hasta dimensiones inmensas (independientemente de las dimensiones a las que nos referimos). En particular, argumentar por qué no puede existir un gigante humano de tamaño desmesurado o porqué moles como las ballenas sólo pueden vivir en el agua. Este tipo de conocimiento permitirá al profesor hacer conexiones no solo dentro de la matemática (en el mismo contenido, con otros contenidos y en diferentes niveles educativos) sino también con tópicos de otras áreas curriculares. Así, una buena comprensión y argumentación de las situaciones presentadas es consecuencia inmediata de un HCK asociado, entre otras cosas, a una comprensión de la relación área-perímetro en dos sentidos: (a) *mirando hacia adelante*, ya que el mismo tipo de confusión se asocia con la construcción de la relación entre áreas y volúmenes, fundamental para comprender posteriormente problemas de optimización —transferir y hacer conexiones previendo las dificultades de los alumnos y estando en condiciones de ayudarlos a superarlas—; y (b) *mirando hacia atrás*, permite reconocer que en la raíz de este problema está el reconocimiento de la forma y en la relación de la forma asociar propiedades matemáticas incorrectas, como es la idea errónea de que todos los rectángulos son semejantes.

Cualquiera de estas facetas del problema de la relación entre el perímetro y el área o entre el área y el volumen podría ser abordado desde diferentes enfoques matemáticos y didácticos. Nuestra intención es ofrecer una conceptualización que enfatiza la conexión entre todos estos aspectos y la relación entre los contenidos didácticos y matemáticos. A esta conceptualización es a la que nos referimos como HCK y lo caracterizamos a partir de tres niveles definidos por identificadores, tal y como presentamos a continuación.

Una caracterización para el conocimiento en el horizonte matemático

Con el objetivo de caracterizar el HCK como un conocimiento profesional del profesor que se puede construir también a partir del análisis de elementos de la práctica, hemos elegido ejemplos que son prototipos de situaciones que envuelven aspectos de la actividad del profesor en distintos niveles educativos: análisis de tareas, gestión de situaciones de interacción con los alumnos e interpretación y asignación de significado a las producciones de los alumnos. En las tres situaciones presentadas el contenido matemático que identificamos es el mismo —relación perímetro-área-volumen—; y sin embargo cada una de ellas moviliza un conocimiento del profesor de naturaleza diferente. Esto configura aspectos diferentes del HCK que requieren el desarrollo de capacidades diferentes.

El análisis del HCK, tal y como lo conceptualizamos considera tres niveles que se van sustentando. Se inicia con un conocimiento que lleva a reconocer y relacionar los distintos conocimientos matemáticos que se potencian en una tarea determinada. De forma complementaria, en otro nivel, se encuentra un conocimiento de determinadas relaciones (conjunto de relaciones) desde una perspectiva avanzada que permita al profesor hacer una transferencia de esas relaciones a la actividad de aula, así como a la interpretación de las dificultades y/o potencialidades de los estudiantes. Finalmente, el tercer nivel conlleva un conocimiento asociado a ampliar y conectar el conocimiento descrito en los dos niveles anteriores con otros ámbitos del conocimiento matemático y de fuera de la matemática, así como prever la gestión de las dificultades y potencialidades de los alumnos en la construcción de conocimiento matemático.

Con el objetivo de aplicar estos niveles de HCK al análisis de la práctica y sustentado también por el análisis de los ejemplos discutidos anteriormente, en la tabla 1, presentamos un conjunto de indicadores del HCK asociados a los distintos niveles del HCK que permiten dar cuenta aspectos del conocimiento del profesor para la construcción de conocimiento matemático de los alumnos en el análisis de la práctica.

Tabla 1
Indicadores de HCK para caracterizar la práctica matemática de aula

Niveles de HCK	Indicadores de HCK
Reconocer y relacionar	a) Identificar relaciones entre ideas o conceptos matemáticos. b) Identificar errores y dificultades de los alumnos. c) Valorar la importancia de relacionar diferentes conceptos y procedimientos.
Interpretar y transferir	a) Interpretar las relaciones entre conceptos matemáticos desde una perspectiva matemática avanzada. b) Interpretar los errores de los alumnos desde una perspectiva matemática, didáctica y curricular más avanzada. c) Transferir a la actividad de aula las interpretaciones generadas por la misma.
Ampliar y conectar	a) Identificar e interpretar conceptos matemáticos posteriores. b) Prever dificultades de los alumnos en temas posteriores. c) Conectar con conceptos matemáticos de otros cursos así como con conceptos de otras asignaturas que cursen los alumnos.

Transformación del conocimiento matemático para la enseñanza a través del horizonte matemático

A continuación, aplicamos los indicadores del HCK al análisis de dos extractos de un episodio de aula, vídeo grabado y transcrito, de una sesión de clase sobre la mediatriz con estudiantes de sexto de primaria, tomado de Badillo, Figueiras, Font y Martínez (2013). Utilizamos los indicadores de la tabla 1 para describir la práctica y enriquecerla con opciones que cubran todos estos indicadores y den una ida de lo que sería un HCK profundo para esta práctica. Creemos conveniente resaltar que al analizar los episodios, no buscamos valorar el papel del profesor, sino describir aspectos del HCK que podrían enriquecer la práctica docente, de modo que podamos contribuir a la mejora de la formación y de la práctica.

A continuación se recoge un extracto de clase en el que se presenta un procedimiento de construcción de la mediatriz a partir de su definición como recta perpendicular a un segmento que pasa por el punto medio. En este extracto un alumno propone utilizar un procedimiento de construcción del punto medio de un segmento utilizando sólo una regla graduada. Sin embargo, la profesora cuestiona si, realmente, este procedimiento permitiría encontrar el punto medio de forma exacta.

Profesora: Por lo tanto la mediatriz del segmento no es nada más que la línea recta perpendicular a este segmento que lo divide en dos partes exactamente iguales, ¿de acuerdo? ¿Cómo se hace para conseguir ese centro de ese segmento y partirlo en dos mitades iguales? Dime.

Alumno: Podría subir eso y medir con esto (levanta una escuadra)

Profesora: Lo podría medir con la regla, pero ¿me saldría exactamente, exactamente igual?

Alumna: Con el compás

Profesora: Con el compás. El compás es el instrumento adecuado con el cual el centro del segmento me va a salir a la perfección (Agarra el compás de pizarra) Entonces, lo que yo tengo que hacer, es coger un compás y abrir el compás en la amplitud del segmento. Si yo cojo la amplitud del segmento no me voy a equivocar. Cojo como centro el punto A del segmento de origen y lo que hago es trazar una semicircunferencia. Y ves cómo me pasa perfectamente por encima del otro extremo. Me voy a la otra punta y lo que hago es exactamente lo mismo y me sale exactamente perfecto, ¿lo veis?

Alumnos: Sí.

Profesora: (Agarra el metro graduado de madera) Fijaros bien ahora ya tengo que se ha cruzado en un punto (señala el punto superior de intersección de las dos semicircunferencias trazada) y que por el extremo opuesto se ha cruzado en el otro punto (señala el punto inferior de intersección de las dos semicircunferencias trazadas), ¿lo veis?

Alumnos: Sí.

Profesora: Lo que hago ahora es unir los dos extremos… y ya tengo el segmento dividido en dos partes iguales.

En este extracto aparecen aspectos del HCK relacionados con el papel de la medida en la construcción de conocimiento geométrico, en particular, en la mediatriz. Tal como hemos visto al discutir las dimensiones del HCK, estos aspectos se relacionan con el conocimiento e interpretación asumida para el rol de la medida. Se observa que la profesora intenta justificar que la construcción de la mediatriz es coherente con la definición presentada y cuestiona la validez de la medida directa en un procedimiento de construcción geométrico. Revela así conocer que existe una diferencia entre comprobar midiendo directamente y demostrar a partir de una construcción geométrica ("lo podría medir con la regla, pero ¿me saldría exactamente, exactamente igual?"; "lo que yo tengo que hacer, es coger un compás (…) no me voy a equivocar (…) me sale exactamente perfecto, ¿lo veis?").

Este tipo de intervenciones ilustran el hecho de que la profesora posee un conocimiento que le permite reconocer relaciones entre ideas matemáticas (diferencia entre comprobación y demostración, definición y propiedad, medida y procedimiento) pero no se transfiere a los estudiantes. Revela también interpretar, al menos parcialmente, la importancia de los contenidos involucrados desde una perspectiva avanzada en tanto que cuestiona la exactitud de los procedimientos de medida resaltando la exactitud de los procedimientos de construcción geométrica.

El hecho de que no se haga explícita la gestión de dificultades futuras relacionadas con la justificación y la demostración ni con el lugar geométrico nos hace considerar que aparecen solo algunos aspectos de los niveles de reconocer y relacionar, y de interpretar y transferir. En ese sentido se puede considerar que una débil emergencia de las capacidades que definen los dos primeros niveles del HCK condiciona la transferencia al aula de las interpretaciones del profesor sobre la construcción de conocimiento de los alumnos. Este tipo de situaciones, en las que el profesor pueda evidenciar un conocimiento que le permita reconocer la importancia de contenidos pero que no lo traslada a los estudiantes, nos muestra las implicaciones de un HCK truncado en la construcción de conocimiento matemático en el aula.

Un HCK profundo incluiría un conocimiento que permitiría utilizar los fundamentos matemáticos (definición y procedimiento de construcción) para interpretar y gestionar la aportación del estudiante justificando la relación que existe entre la definición que propone, el procedimiento de construcción del carpintero (propuesto por el alumno) y el procedimiento de construcción como “lugar geométrico” (propuesto por la profesora). Establecer esta relación (conexión) permitiría abrir puertas hacia una comprensión más amplia no solo de la mediatriz sino también de otros tópicos matemáticos, ampliando ese conocimiento a la construcción de la idea de lugar geométrico así como a la idea de demostración basada en la geometría del triángulo.

Parte de ese HCK profundo se refiere a un conocimiento asociado a que la justificación de la relación entre los procedimientos de construcción geométrica puede facilitar la emergencia natural de la idea de lugar geométrico, ya que esa justificación (de que la recta construida pasa por el punto medio) se puede aplicar de manera análoga a justificar la equidistancia de los puntos de la mediatriz a los extremos del segmento dado. Además, aprovechar la oportunidad para profundizar en razonamientos basados en propiedades geométricas, al comparar los procedimientos de construcción de la mediatriz, representa una oportunidad para introducir razonamientos deductivos que posteriormente podrían configurarse como la base de la demostración.

Un conocimiento que permita la construcción explícita de conexiones entre procedimientos y definiciones permitirá la ampliación y conexión del conocimiento construido a otras situaciones matemáticas o de otras ciencias (tercer nivel del HCK). Por ejemplo, en el caso de la matemática, se podría ampliar a explorar diferentes definiciones de mediatriz, enriqueciendo la red de conceptos y las posibles conexiones que se puedan hacer. Por ejemplo, una definición de mediatriz como línea frontera, que dados dos puntos, divide el plano en dos regiones de manera que en una región todos los puntos están más cerca de uno de los puntos dados que del otro, permitiría abordar problemáticas en las que la mediatriz modeliza situaciones de la vida real como por ejemplo el problema del desierto (Goddijn, Kindt y Reuter, 2004, parte I, 5) o el problema de las cabinas de teléfono (Fernández y Figueiras, 2014).

A continuación se muestra otro extracto de la misma sesión de clase donde la misma profesora utiliza el transportador para comprobar que la mediatriz (definida como la perpendicular a un segmento por el punto medio) que ha sido construida con regla y compás, cumple efectivamente la propiedad de perpendicularidad expresada en la definición. En este caso, substituye la demostración por la comprobación basada en la medida directa de ángulos.

Profesora: Por lo tanto, una condición es que la recta que divide al segmento en dos partes iguales -la mediatriz del segmento- ha de ser perpendicular. ¿Cómo puedo yo saber si estas dos rectas son perpendiculares? ¿De qué manera lo tengo que hacer? perpendicular (con las manos señala los cuatro cuadrantes que se forman en la intersección del segmento y la recta perpendicular a él).

Alumno: Midiéndolo con el transportador de ángulos.

Profesora: Midiéndolo con el transportador de ángulos. (Agarra el transportador de ángulo de pizarra)

Alumno: Un ángulo recto.

Profesora: Y me tiene que dar…

Alumnos: Un ángulo recto, noventa.

Profesora: …y me tiene que dar cuatro ángulos rectos. Uno, dos, tres, y cuatro. Si yo pongo el transportador de ángulos aquí (coloca el transportador sobre el segmento y mide el ángulo del primer cuadrante) y lo hago coincidir, a ver, fijaros que me sale perfectamente un ángulo de 90°. ¿Lo veis? Si lo pongo al revés aquí me sale también exactamente 90°. Por lo tanto yo puedo decir que la mediatriz del segmento es la recta perpendicular a ese segmento que divide a ese segmento en dos partes perfectamente iguales. Exactamente.

En este segundo extracto aparece la estrecha relación entre la enseñanza de construcciones geométricas y el problema fundamental de la utilización de la medida directa para la formulación y/o demostración de conjeturas. Al comparar el uso de la medida en los dos episodios vemos que, en el primer caso la medida directa para la construcción de la mediatriz y para la demostración de que la recta construida pasa por el punto medio del segmento es desestimada pero, sin embargo, en el segundo caso, esa medida directa es utilizada para comprobar (con la intención de demostrar) que la recta construida es perpendicular al segmento.

En este caso particular (figuras 5 y 6) se utiliza la medida de formas distintas y no se justifica cuándo es pertinente cada una. Por un lado la medida aparece como la asignación de un número a una propiedad medible —medir la longitud para encontrar el punto medio y medir la amplitud del ángulo para verificar la perpendicularidad—. Por otro lado, la medida aparece ligada a procesos de comprobación y demostración de las propiedades matemáticas de la mediatriz. Haciendo una analogía con el múltiple sentido de algunas palabras (Bardelle y Ferrari, 2011), un conocimiento que explore estas distintas formas de encarar la medida y sus implicaciones, sería parte de un HCK profundo que promueva el desarrollo de un conocimiento matemático con significación.

Desde el punto de vista del HCK, en un primer nivel, el profesor utiliza la medida de dos formas diferentes, por lo que podemos interpretar que existe una aproximación a la relación entre los diferentes papeles que juega la medida en la actividad matemática escolar. Sin embargo, en un segundo nivel, no se produce una transferencia coherente de esta relación a la actividad de aula, ni se hace explícito que el profesor interprete dicha relación o las dificultades de los alumnos desde una perspectiva avanzada. Finalmente, en un tercer nivel, no se hace explícito que la construcción sólida de esta conexión entre funciones de la medida en matemáticas se asocie con otro contenido matemático o extra matemático.

Cuando no se exploran distintos significados e interpretaciones de la medida, se pueden crear serias confusiones con relación al papel que le otorga el alumno a la medida (¿cuándo es pertinente y válido medir y cuándo no?) y a la demostración. De igual manera, puede generar la idea equivocada de que la atribución de un número a una magnitud medible substituye la necesidad de una comprensión y justificación de las propiedades matemáticas (medir directamente con un instrumento u obtener la medida por un proceso matemático). Este tipo de conocimiento está también asociado, obviamente, a la enseñanza de otros tópicos, como por ejemplo, la ley numérica que constituye el teorema de Pitágoras y su substitución por el cálculo de una medida directa.

Desde la perspectiva del conocimiento del profesor, un HCK profundo le debe permitir, en primer lugar, identificar aspectos clave de la medida como: (a) el papel que juega en la exploración de propiedades geométricas de forma experimental, (b) la utilización de conceptos relacionados con la medida en la definición de lugares geométricos, (c) la utilización de la medida en las ciencias experimentales, y (d) el carácter aproximado de la medida directa. En segundo lugar, el HCK puede ayudar al profesor a gestionar las actividades de aula estableciendo las conexiones matemáticas que favorezcan una construcción sólida y sustentada de conocimiento matemático por parte de los alumnos, como es el caso de la relación perímetro-área-volumen, o entender que la verificación numérica de un resultado no constituye una demostración. Por último, un HCK profundo permitirá que el profesor pueda ampliar dicho conocimiento a la utilización posterior del concepto de distancia para la definición de lugares geométricos, la construcción de razonamientos deductivos basados en propiedades geométricas, la introducción de los números irracionales al calcular distancias de forma directa, entre otros.

CONSIDERACIONES FINALES

El análisis del episodio de aula sobre la mediatriz nos ha permito detectar un problema clave en el ámbito del conocimiento matemático para la enseñanza, ya que identificamos aspectos relacionados con el conocimiento que pueden generar una construcción de conocimiento matemático confusa y poco profunda por parte de los estudiantes. Al aplicar los indicadores de la tabla 1 al análisis del episodio hemos podido reconstruir el problema a partir de las capacidades que pone en juego el profesor para dar respuesta a la complejidad del aprendizaje y, en consecuencia, presentar el problema en términos de HCK (ver figura 5).

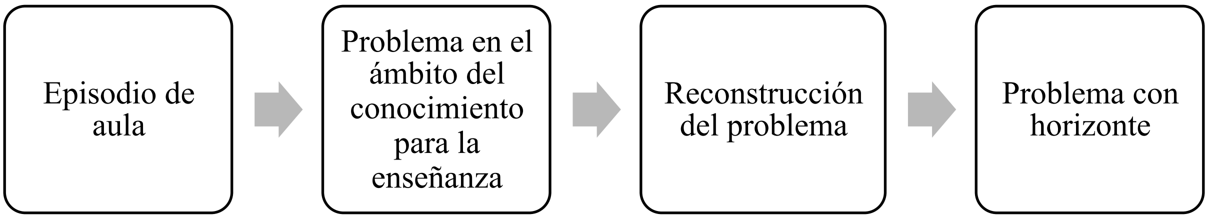


Figura 5. Identificación de un problema de HCK en un episodio de aula

Las razones por las cuales no se profundizó en la relación entre los dos procedimientos de construcción de la mediatriz, y no se justificó el papel de la medida directa para justificar propiedades geométricas pueden ser muchas y diversas. En términos del conocimiento del profesor creemos que un conocimiento poco profundo de los procesos y mecanismos de justificación en matemáticas puede generar confusiones relacionadas con la comprobación y la demostración. Además, un conocimiento poco profundo de la pedagogía asociada al aprendizaje de la justificación hace que la profesora no detecte los puntos críticos en los que su acción puede facilitar (o no) un conocimiento suficientemente profundo para favorecer el aprendizaje matemático posterior. Finalmente, un conocimiento curricular poco profundo genera más dificultades a los profesores para poder conectar con otros contextos que admitan comprobaciones y demostraciones (Badillo et al., 2013).

En cualquier caso, identificamos que la construcción por parte del profesor de un HCK profundo, que incluya las capacidades que caracterizan los tres niveles presentados en el apartado 2, constituye una sustentación fuerte para la práctica del profesor. El desarrollo de capacidades relacionadas con reconocer relaciones, interpretarlas y aplicarlas a otros contextos tanto matemáticos como extra matemáticos da al profesor herramientas para preparar tareas, para secuenciar contenidos, para prever y gestionar las dificultades de los estudiantes, para aprovechar la oportunidades que se generan en situaciones de contingencia (Rowland et al., 2005) y para abrir puertas a nuevos conocimientos estableciendo conexiones entre definiciones, propiedades, procesos y sus aplicaciones.

Nos hemos centrado en la medida, porque la idea de medición, por una parte, es general y propia del sentido común, y por otra es profundamente compleja. Aunque la inmensa mayoría de las personas utilizan de forma cotidiana magnitudes medibles y realizan medidas concretas, desde la perspectiva de la construcción de conocimiento matemático la medida requiere de la construcción de conceptos no triviales y de su adecuada conexión con otros campos de las matemáticas como es el caso de la numeración y la geometría.

En el sentido de Campbell (1928), para poder medir necesitamos identificar las propiedades de los objetos que son medibles y diferenciarlas de las que no lo son. Además, al asignar números a las propiedades medibles establecemos una relación directa entre la propiedad que se mide y las propiedades de los números que se utilizan para medir. Esta asignación nos permite explorar propiedades geométricas a partir de propiedades numéricas, como por ejemplo al analizar cómo varía el área al variar la longitud de los lados en figuras semejantes. Así pues, la medida es fundamental para reconocer propiedades espaciales y sus relaciones, además de permitirnos distinguir fácil y detalladamente entre propiedades diferentes pero muy parecidas, como en el caso de los pentominós de la figura 1, donde el valor numérico diferente que toman el área y el perímetro en las diferentes figuras informa sobre la relación entre el perímetro y el área de las figuras planas.

Esta conexión que establece la medida entre geometría y numeración hace que sean muchas las situaciones didácticas que recaen en los procesos de medida, lo que genera que se produzcan dificultades asociadas a la utilización de la medida. Por ejemplo, la medida para verificar la relación entre propiedades geométricas, como que dos segmentos midan lo mismo o que un ángulo sea recto. Sin embargo, una sobre utilización de la verificación puede dar a los estudiantes la idea de que comprobar equivale a justificar, lo que dificultaría la introducción en el aula de procesos de justificación basados en propiedades geométricas.

Desde el punto de vista del HCK nos interesa reflexionar sobre el papel que se otorga a la demostración y a la medida en la construcción de conocimiento matemático. Consideramos que se trata de contenidos relacionados con los fundamentos de la matemática, más que con la mediatriz de manera concreta. Es importante que los estudiantes reflexionen sobre el procedimiento de construcción y la demostración de los conceptos involucrados en él, ya que este es el mismo problema al que se enfrentan los estudiantes cuando se habla de problemas clásicos en matemáticas como la duplicación del cubo o la trisección del ángulo. También se relaciona con la imposibilidad de dar una medida exacta de la longitud de la circunferencia. Comprender la importancia de los números irracionales o transcendentes en el desarrollo del pensamiento numérico y matemático tiene sus bases en experiencias escolares de este tipo.

Este conocimiento de los fundamentos de las matemáticas no se relaciona únicamente con un conocimiento matemático avanzado, en el sentido de Zazkis y Mamolo (2011), ni tampoco es un conocimiento abordable solo desde el conocimiento didáctico o curricular. Se trata de un conocimiento que requiere un conocimiento sobre las matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) que en el aula se expresa mediante el establecimiento explícito de conexiones relacionadas con procesos transversales a las matemáticas (De Gamboa y Figueiras, 2014), que hagan énfasis en procesos de razonamiento y justificación.

Lejos de afirmar que el HCK tiene que ver únicamente con la matemática avanzada, hacemos énfasis en la relación que el conocimiento del profesor de matemáticas tiene con las diferentes componentes que lo conforman. La manera como entendemos el HCK requiere de la coordinación de diferentes componentes del conocimiento del profesor que le permitan desarrollar las capacidades descritas en los indicadores de la tabla 1. Estas capacidades deben permitir al profesor comprender problemas de orden superior en la construcción de conocimiento matemático, en este caso particular, un HCK profundo implica considerar a la medida como el puente que permite conectar la relación entre las propiedades de la figura geométrica con las propiedades de los números que atribuimos a las magnitudes medibles, y por tanto entender el papel que juega la medida al justificar en matemáticas.

La caracterización anterior del HCK y de su papel en la práctica de aula revela la necesidad de realizar estudios dirigidos a profundizar en la comprensión de este conocimiento así como a desarrollarlo desde una perspectiva práctica. Se hace necesario identificar problemas de orden superior en matemáticas o *big ideas* que nos permitan entender mejor el conocimiento matemático que se construye en el aula para diseñar tareas que cubran los indicadores propuestos y, en consecuencia, mejoren las capacidades del profesor para construir, aplicar, ampliar y transferir el conocimiento matemático que se genera en la actividad de aula.

Agradecimientos
Este trabajo se enmarca en la agenda científica del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática (GIPEAM); en particular, dentro del Proyecto EDU2012-31464 "Análisis de entornos colaborativos de aula desde la perspectiva de su mediación en la construcción discursiva de conocimiento matemático", financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad.

REFERENCIAS

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias,31*(3),207-225.

Ball, D.L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardelle, C. y Ferrari, P. L. (2011). Definitions and examples in elementary calculus: the case of monotonicity of functions.*ZDM: The international journal on mathematics education, 43*(2), 233-246.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII CERME* (2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Campbell, N.R. (1928). *An account of the principles of measurement and calculation*. Londres: Longmans Green.

De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D.

Arnau y T. Ortega (Eds.),*Investigación en Educación Matemática XVIII* (337-344). Salamanca, España: SEIEM.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*. Londres: Cassell.

Fernández, S. (2011). *Continuity in mathematics education. Mathematics teachers in the transition to secondary school.*Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Fernández, S. y Figueiras, L. (2014). Horizon content knowledge: Shaping MKT for a continuous mathematical education. *Redimat, 3*(1), 7-29.

Goddijn, A., Kindt, M. y Reuter, W. (2004). *Geometry with applications and proofs*. Utrecht,Países Bajos: Freudenthal Institute.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M. y Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. En ICME (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (4635-4644). Seúl, Corea: ICME.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 1-13). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promotes understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (1996). Partitioning and unitizing. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *20*(3), 233-240.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Magiera, M., van den Kieboom, L. y Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME Conference* (Vol. 3, 169-176). Ankara, Turquía: PME.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Mellone, M., Jakobsen, A. y Ribeiro, C., M. (2015, febrero). *Mathematics educator transformation(s) by reflecting on students' non-standard reasoning.*Presentado en el 9th Congress of European Research in Mathematics Education CERME, Praga, República Checa.

Pinto, H. y Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos ─o sentido de número racional [Conocimiento y la formación de los futuros docentes en los primeros años─el sentido de número racional]. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105.

Ribeiro, C. M. (2013). Del cero hasta más allá del infinito —algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro "también" a largo plazo. En

A. B. Alcaraz, G. G. Pereda, A. E. Castro y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (71-85). Bilbao, España: SEIEM.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers'mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Wasserman, N., Mamolo, A., Ribeiro, C. M. y Jakobsen, A. (2014). Exploring horizons of knowledge for teaching. En P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th IGPME y 36th PME-NA* (Vol. 1, 247). Vancouver, Canadá: PME.

Wasserman, N. y Stockton, J. (2013). Horizon content knowledge in the work of teaching: A focus on planning. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 20-22.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12(4)*, 263-281.

Zazkis, R. y Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics, 31*(2), 8-13.

Genaro de Gamboa
Universitat Autònoma de Barcelona
genaro.degamboa@uab.es

Edelmira Badillo
Universitat Autònoma de Barcelona
edelmira.badillo@uab.cat

Miguel Ribeiro
Universidade do Algarve
cmribeiro@ualg.pt

Recibido: Septiembre 2014. Aceptado: Enero 2015.