Os números inteiros durante matemática moderna nas escolas técnicas em Portugal

Alexandra Sofia Rodrigues

Entre 1950 e 1970, o Movimento da Matemática Moderna disseminou-se um pouco por todo o mundo e integrou mudanças profundas no currículo da disciplina, associadas a alterações das metodologias de ensino e das práticas matemática escolar. Neste texto iremos analisar como foram lecionados os números inteiros relativos e as suas operações, no 1.º ano dos cursos industriais, em Portugal, durante a reforma. Recorremos a fontes documentais como jornais, manuais escolares, legislação e outras referências que contribuem para uma visão das práticas de ensino nas escolas técnicas. Para introduzir os números inteiros e suas operações, recorreu-se à noção de vetor, conferindo uma nova estrutura à disciplina de matemática do 1.º ano dos cursos industriais, mas preservando a importância das aplicações com o mundo real dos alunos.

Palavras-chave: Ensino da Matemática; Ensino técnico; História da educação; Matemática moderna; Números inteiros relativos

Whole Numbers during Modern Mathematics in Technical Schools in Portugal

Between 1950 and 1970, the modern mathematics movement spread worldwide and integrated profound changes in the discipline's curriculum, associated with alterations in teaching methodologies and school mathematics practices. In this text, we will analyse how the whole numbers and their operations are approached in the first year of industrial courses in Portugal during the reform. We review documentary sources such as journals, school manuals, legislation, and other references contributing to a vision of teaching practices in technical schools. To present integers and their operations, the notion of vector was used, giving a new structure to the mathematical discipline of the 1st year of industrial courses but preserving the importance of applications in the real world.

Rodrigues, A. S. (2025). Os números inteiros durante matemática moderna nas escolas técnicas em Portugal. *PNA, 19*(5), 419-437. https://doi.org/10.30827/pna.v19i5.30203

Keywords: Education history; Mathematical teaching; Modern mathematics; Relative whole numbers; Technical teaching

Los números enteros durante la Matemática Moderna en las escuelas técnicas de Portugal

Entre 1950 y 1970, el movimiento matemático moderno se extendió por todo el mundo e integró profundos cambios en el currículo de la materia, asociados a cambios en las metodologías de enseñanza y en las prácticas matemáticas escolares. En este texto analizaremos cómo se enseñaban los números enteros relativos y sus operaciones en el 1er año de las carreras industriales, en Portugal, durante la reforma. Utilizamos fuentes documentales como periódicos, manuales escolares, legislación y otras referencias que son relevantes para una visión general de las prácticas docentes en las escuelas técnicas. Para introducir los números enteros y sus operaciones se utilizó la noción de vector, dando una nueva estructura a la disciplina matemática del 1er año de carreras industriales, pero preservando la importancia de las aplicaciones con el mundo real de los estudiantes.

Términos clave: Educación técnica; Enseñanza de las Matemáticas; Historia de la educación; Matemática moderna; Números enteros relativos

A conferência internacional Royaumont, realizada entre 23 de novembro e 4 de dezembro de 1959, em França, foi o ponto de partida para uma reforma do ensino da matemática, que ficou conhecida como o movimento da matemática moderna (Moon, 1986). O período pós-guerra foi marcado por alterações no trabalho colaborativo a nível internacional, alcançando uma escala nunca antes conseguida, para a qual contribuíram a criação da UNESCO e da OCDE, a existência de fundos cedidos por organizações internacionais para a realização de seminários e conferências e o desenvolvimento de companhias aéreas (Moon, 1986).

Entre as décadas de 50 e 60 do século passado, este movimento influenciou o ensino e a aprendizagem da matemática na Europa, nos Estados Unidos da América e em vários outros países do mundo, envolvendo matemáticos, professores de matemática, instituições de ensino e até a imprensa e sociedade em geral (Almeida et al., 2022; De Bock, 2023b, Rodrigues, 2022).

Tendo como foco inicial a reforma do currículo do ensino secundário, o certo é que durante os vinte anos da sua implementação, esta reforma foi alargada a todos os ciclos de ensino, desde o ensino primário até ao ensino superior, na maioria dos países do mundo (Matos e Almeida, 2023; Moon, 1986).

Uma das principais características do movimento foi a introdução, no ensino da matemática, de novos conteúdos, materiais e práticas de ensino como resposta para atender às necessidades da educação matemática percebidas após a Segunda

Guerra Mundial, relacionando a matemática com as necessidades científicas de um mundo em expansão (Moon, 1986; Rodrigues, 2022). O currículo da disciplina evoluiu de técnicas computacionais e geometria euclidiana para uma abordagem mais abstrata baseada na teoria dos conjuntos, estruturas algébricas e topologia (De Bock, 2023a).

No prefácio do relatório produzido pela OCDE, em 1964, pode ler-se que nos quatro anos que decorreram desde a conferência de Royaumont, foram produzidos um número de estudos significativo, escritos novos manuais escolares, adotados novos programas e deu-se início ao processo de formação de professores (Moon, 1986). Em cada país, o movimento é recebido e incorporado de acordo com a sua cultura e as suas especificidades (De Bock, 2023a; Moon, 1986). A partir de meados da década de 1970, outras opções curriculares foram desenvolvidas internacionalmente e as reformas estavam em declínio (Furinghetti et al., 2013).

Em Portugal, o movimento da matemática moderna, tem início oficial com um projeto de reestruturação do ensino da disciplina nos Liceus, elaborado pela Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática, nomeada em 1963, cujo presidente era o professor José Sebastião e Silva, à data professor catedrático na Faculdade de Ciências de Lisboa (Novaes, 2012; Rodrigues, 2022).

No ensino técnico, um dos primeiros passos para a reforma foi a participação do professor metodólogo[1] Santos Heitor, da Escola Industrial Marquês de Pombal, na XI Reunião da Comissão Internacional para o estudo e o aperfeiçoamento do ensino da matemática, que teve lugar em 1957, em Madrid, onde também esteve presente José Sebastião e Silva. Santos Heitor foi um dos precursores para a introdução da matemática moderna no ensino técnico. Anteriormente tinha sido professor de uma das turmas experimentais e autor da construção de modelos pedagógicos para o ensino da matemática, nas escolas técnicas, atendendo aos recursos existentes nas mesmas (Heitor, 1958; Rodrigues, 2022).

Ao ser aplicada nos diversos subsistemas de ensino portugueses, a matemática moderna assumiu múltiplas facetas. No entanto, havia traços comuns subjacentes à reforma: uma atenção à unidade da matemática e um esforço para basear todo o conhecimento matemático escolar na linguagem dos conjuntos e nas estruturas subsequentes; e o trabalho responsivo dos atores locais, reformadores e professores para trazer modernidade ao currículo (Matos e Almeida, 2023).

No final de 1966 realizou-se em Lisboa um Colóquio de professores do ensino técnico de todo o país, organizado pelo Ministério da Educação, cujo tema central foi a introdução da matemática moderna no ensino técnico. Para manter o ambiente colaborativo que surgiu durante o colóquio, surge a *Folha Informativa do 1.º Grupo* (E. T. P[2]), publicada entre 1967 e 1972, planeada como suporte para a

[1] Professor orientador de estágios. Santos Heitor orientava estágios no 1.º grupo. Os professores do 1.º grupo lecionavam matemática e física nos cursos técnicos. Santos Heitor orientava estágios na disciplina de Matemática.
[2] E.T.P. – Ensino Técnico Profissional.

reforma curricular que se avizinhava e destinada a todos os professores que ensinavam matemática nas escolas técnicas. Nesta revista encontramos os programas de matemática moderna em vigor nas turmas experimentais e, simultaneamente, indicações científicas e metodológicas de como ensinar alguns conteúdos de matemática (Rodrigues, 2022; Rodrigues e Matos, 2021).

Para monitorizar e coordenar os trabalhos da reforma no ensino técnico, em 1968, foi criada a Comissão de Estudos de Reorganização do Ensino de Matemática nos Cursos de Formação Industrial. Integravam esta comissão, Santos Heitor, professor metodólogo na Escola Industrial Marquês de Pombal em Lisboa; Aires Biscaia, Diretor da Escola Comercial e Industrial de Sintra-Cacém; Francelino Gomes, professor na Escola Comercial e Industrial de Vila Franca de Xira; Jorge Monteiro, professor na Escola Industrial Fonseca Benevides em Lisboa e Vítor Pereira, professor na Escola Comercial e Industrial de Sintra-Cacém (Comissão, 1968). Todos os membros desta Comissão foram professores de uma turma experimental no início da reforma.

Nas escolas técnicas foram organizados vários cursos de formação de professores, o primeiro no final de 1966, e em 1967 foram criadas 10 turmas experimentais nos Cursos de Formação Industrial, onde começou a ser implementado o novo programa (Rodrigues, 2022). As opiniões expressas durante os cursos preparatórios para a reforma denotam pressão por mudanças na cultura escolar, conferindo um caráter mais generalista e mais abstrato à formação. Como resultado, as práticas foram alteradas, exigindo uma adaptação dos métodos e da tecnologia escolar (exemplos, representações, exercícios e terminologia), tendo afetado a cultura dessas escolas (Almeida e Rodrigues, 2025; Rodrigues et al., 2016).

Em termos teóricos, este texto enquadra o movimento da matemática moderna na perspetiva de Chervel (1990) que defende que o momento ideal para investigar uma disciplina escolar é quando esta é alvo de mudança pela conjuntura política ou educacional. Pretende-se analisar os aspetos específicos da disciplina da matemática no ensino técnico, presente no programa introduzido nos cursos industriais, nos artigos publicados pelos professores das turmas piloto e nos manuais escolares, com uma visão pedagógica sobre o currículo apresentado aos professores e nas relações entre o antigo e o novo, enquadrada na autonomia das disciplinas escolares em relação aos saberes exteriores à escola (Chervel, 1990).

Metodologicamente, iremos proceder a uma análise documental de duas dimensões curriculares: o currículo prescrito e o currículo apresentado aos professores (Gimeno, 2000). Em países com sistemas educativos centralizados, como foi o caso de Portugal na década de 1970, o currículo prescrito, ou seja, o programa, envolve decisões de entidades governamentais, neste caso a Comissão de Estudos de Reorganização do Ensino de Matemática nos Cursos de Formação Industrial, nomeada pelo governo, responsável pelo programa dos cursos industriais, publicado em diferentes números da *Folha Informativa dos professores do 1.º Grupo* (n.º 41, 55 e 45) (Almeida, 2007; Rodrigues, 2022). Uma vez instituídos, os programas são apresentados aos professores na forma de materiais curriculares, principalmente por meio de livros didáticos, mas neste caso também através de publicações na *Folha Informativa*. Iremos analisar o currículo apresentado aos professores combinando os referenciais metodológicos de Okeeffe (2013) e de (2010), aplicados por Almeida e Rodrigues (2025).

Olharemos, em particular, para um conteúdo lecionado no primeiro ano, nomeadamente o conjunto dos números inteiros relativos e as suas operações. O conceito de vetor é utilizado para introduzir este conteúdo, de acordo com as recomendações do programa de reforma da matemática moderna, que constitui uma nova abordagem à introdução de conteúdos matemáticos no currículo dos cursos industriais.

Metodologia e referencial teórico

A análise de conteúdo surge como um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e pode ser realizada com qualquer material escrito, desde documentos até transcrições de entrevistas, desde produtos de vídeo até entrevistas pessoais (Bardin, 1977; Cohen et al., 2007). Para Bardin (1977), a análise documental é “uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob a forma diferente do original, a fim de facilitar num estado ulterior, a sua consulta e referenciação” (p. 45). Segundo a mesma autora, a análise documental faz-se principalmente por classificação-indexação e por intermédio de procedimentos de transformação, tendo como objetivo, analisar e representar de forma condensada as informações provenientes das fontes documentais. Isto permite-nos elaborar um documento secundário com o máximo de informações pertinentes sobre a temática em foco.

Procedeu-se à análise de conteúdo, a partir da recolha dos programas e outros artigos publicados na *Folha Informativa*, assim como livros de texto, do movimento da reforma (Cohen et al., 2007). Esta é uma técnica de investigação adequada para analisar os currículos prescrito e apresentado. A partir desta técnica, são feitas inferências replicáveis e válidas sobre o ensino dos números inteiros relativos durante a reforma da matemática moderna no ensino industrial, em Portugal. Este procedimento vem garantir a cientificidade do estudo no que concerne à análise dos documentos curriculares, manuais escolares e outros documentos que apresentam o currículo aos professores.

Após a sua publicação, os programas são apresentados aos professores na forma de materiais curriculares, em particular através de manuais escolares. Atualmente, a responsabilidade pela sua elaboração é dos editores e o produto final é uma interpretação do programa oficial (Almeida e Rodrigues, 2025). Os manuais escolares integram, pelo menos nos países desenvolvidos, o universo do quotidiano das crianças e das famílias (Choppin e Bastos, 2012). Enquanto para Julia (2001) o livro escolar pode ser definido somente pelo seu uso, para os autores

Choppin e Bastos (2012) o manual escolar não é apenas um livro utilizado na escola. Segundo estes últimos autores, este material foi conscientemente concebido e organizado para servir os objetivos de instrução quer na perspetiva do aluno, quer na perspetiva do professor, assumindo um papel de livro didático em contexto formativo (Choppin e Bastos, 2012). É esta definição de manual escolar que usaremos neste artigo.

Uma das contribuições da análise histórica do currículo, através dos manuais escolares, prende-se com o facto de possibilitar lançar um olhar distanciado sobre o currículo apresentado, sem perder de vista as relações importantes que apresentam não perdendo de vista a sua relação com o currículo prescrito. O historiador consegue distinguir e relacionar as diferentes facetas deste objeto extremamente complexo que é o livro didático (Choppin, 2004). Com uma função didática, o manual escolar tem a função de transmitir às gerações mais jovens os conhecimentos, as competências e as perceções culturais e sociais, num determinado momento. Enquanto fonte de investigação histórica, os livros escolares não são uma fonte isolada: regulamentos, programas e instruções escolares, debates publicados na imprensa de opinião ou em revistas profissionais, e outros instrumentos (cadernos, quadros, murais, ...), permitem uma visão mais clara dos currículos (Almeidaet al., 2022; Sousa, 2012).

Pela importância que os manuais escolares assumem no contexto de ensino e aprendizagem, o seu conteúdo e estrutura são muito importantes para a promoção de uma visão específica de currículo (Okeeffe, 2013). Silva (2004) desenvolveu um estudo centrado na análise documental de quatro manuais dirigidos ao 9.º ano de escolaridade em uso nas escolas portuguesas até ao ano de 2003/2004. As categorias de análise que utilizou foram: conteúdo (relação conteúdo/programa, rigor científico e contextualização), estrutura (metodologia, tarefas propostas e avaliação) e comunicação (relação ilustração/texto, terminologia e sintaxe e materiais).

Semelhante ao referencial usado por Silva (2004), Okeeffe (2013) define várias características dos livros didáticos, baseando-se nas competências do TIMSS, que podem ter impactos positivos ou negativos na aprendizagem, como a linguagem, a ciência, a economia do livro, as técnicas de impressão ou o significado das imagens (Choppin, 2004; Okeeffe, 2013). A análise de livros didáticos é um meio pelo qual essas características podem ser identificadas (Okeeffe, 2013) e neste texto iremos usar o referencial proposto pela autora e usado por Almeida e Rodrigues (2025).

Okeeffe (2013), utilizando sua pesquisa sobre livros didáticos de matemática, estabeleceu uma estrutura para análise que compreende quatro elementos principais: *conteúdo*, *estrutura*, *expectativa* e *linguagem*, que foram utilizadas neste artigo para a análise da abordagem dos números relativos usadas nos manuais escolares de matemática do 1.º ano dos cursos industriais, no período da matemática moderna. O conteúdo inclui aspetos como formação de valor, elementos motivacionais, acessibilidade, ilustrações, guias de estudo, entre outros.

A estrutura compreende como o livro didático está organizado, a distribuição do conteúdo, as conexões entre diferentes assuntos, conhecimentos e informações e o processo de constituição. A expectativa está incorporada em todos os livros didáticos e pode impactar a forma como os alunos lidam com os temas apresentados. Okeefe (2013) indica que "por exemplo, se o foco de um livro de matemática é a repetição e a prática, então um aluno irá inconscientemente tentar replicar um método anterior assim que encontrar uma questão, sem tentar usar quaisquer competências de resolução de problemas" (p. 7). De acordo com a mesma autora, a linguagem inclui características como tipo de discurso (narração, descrição, etc.), conectores entre frases e estruturas semânticas; para análises mais refinadas, a autora fornece três subtítulos: significantes de palavras, sinais notacionais e sinais gráficos.

Por sua vez, Krüger (2010) analisa lições do início do século XVII e utiliza três categorias: *coerência*, *visualização* e uso de *contextos*. Coerência significa aplicação consistente do que foi ensinado anteriormente, com o objetivo de reforçar competências através da prática que podem ser utilizadas em situações mais complexas ou em diferentes contextos. A visualização está relacionada com a aparência do manual, as ilustrações e os contextos das ilustrações. Inclui também a qualidade artística das imagens e sua utilização para facilitar o conteúdo ou problema matemático. Por fim, os contextos são normalmente retirados de situações práticas ou profissionais, relacionando a matemática com as suas aplicações no contexto dos alunos. Neste artigo, o referencial de Krüger (2010) será usado para fazer uma meta análise do currículo apresentado em estudo.

Programa e orientações metodológicas

As dificuldades epistemológicas geradas pelo número negativo estão presentes na prática quotidiana do ensino de matemática. Adquirir a noção de sentido numérico é um passo significativo na aprendizagem e compreensão da matemática (Mohamed e Johnny, 2010). Segundo os autores, o sentido numérico refere-se à compreensão geral que um indivíduo tem dos números e das suas operações, e às competências para desenvolver estratégias flexíveis e eficientes para lidar com problemas numéricos (Mohamed e Johnny, 2010). O programa da reforma da matemática moderna para os cursos industriais, propõe uma abordagem para a aprendizagem dos números inteiros relativos, usando vetores, como iremos ver a seguir (Rodrigues, 2022).

A pedido da Comissão de Estudos de Reorganização do Ensino de Matemática nos cursos de formação industrial, entre 1970 e 1971, foram publicados na *Folha Informativa*, os programas de matemática da experiência, quer para os cursos industriais, quer para os cursos comerciais (números 41, 45 e 55). Neste artigo, iremos centrar-nos no ensino dos números inteiros relativos, que integrava o elenco modular do programa dos cursos industriais no 1.º ano. No primeiro ano, o novo programa tinha dois focos. O primeiro era o estudo das relações e aplicações e o segundo o estudo de $\mathbb{Z}$, o conjunto dos inteiros e das suas operações associadas a operações sobre conjuntos. Este programa, publicado em fevereiro de 1970 (*Folha Informativa* n.º 41), incorporava os seguintes temas: 1) Rudimentos da teoria dos conjuntos; 2) Operações com conjuntos; 3) Relações; 4) Aplicações; 5) Translações no plano; 6) Uma graduação na reta: O conjunto $\mathbb{Z}$; e 7) Operações em $\mathbb{Z}$. De forma detalhada, o tema '6) Uma graduação na reta: O conjunto $\mathbb{Z}$', tinha as seguintes orientações detalhadas (Comissão, 1970):

> *6.1 Escolha duma reta e de um vetor* $\vec{u}$*, que a tem como suporte.*
>
> *6.2 Os vetores* $1\vec{u}$*,* $2\vec{u}$*, ...,* $k\vec{u}$ *(*$k \in \mathbb{N}$*) como a soma de vetores iguais a* $\vec{u}$*. Representação desses vetores ligados a um ponto fixo (origem).*
>
> *6.3 Estabelecimento da bijeção: Origem →Extremidade dos vectores → resultantes números naturais.*
>
> *6.4 Repetição das operações anteriores com o vetor* $-\vec{u}$*.*
>
> *6.5 Números positivos, números negativos e zero. O conjunto* $\mathbb{Z}$*: números inteiros (relativos).*
>
> *6.6 As relações de ordem em* $\mathbb{Z}$ $(>, \geq, <, \leq)$.
>
> *6.7 Valor absoluto (módulo) dum número inteiro; números iguais; números simétricos.* (p. 15)

E em relação ao tema '7) Operações em $\mathbb{Z}$', encontramos em detalhe as seguintes orientações (Comissão, 1970):

> *7.1 Adição. O estudo desta operação com base na adição de vetores.*
>
> *7.2 As propriedades da adição que caracterizam a estrutura de grupo aditivo do conjunto* $\mathbb{Z}$*.*
>
> *7.3 A propriedade comutativa em* $(\mathbb{Z}, +)$.
>
> *7.4 Subtração. A subtração convertida na adição do simétrico.*
>
> *7.5 Exercícios numéricos. Resolução de equações simples.*
>
> *7.6 As aplicações* $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$*;* $\mathbb{Z} \rightarrow -\mathbb{Z}$*, com vista ao estudo da multiplicação dos números relativos, respetivamente* $+1$ *e* -1.
>
> *7.7 As multiplicações dum número natural por um número relativos, considerada como adição de parcelas iguais.*
>
> *7.8 A multiplicação de números relativos quaisquer com base em 7.6 e 7.7.*

7.9 As propriedades da multiplicação. A propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma e à diferença. Verificar que $\mathbb{Z}$ *não é um grupo a respeito da multiplicação.*

7.10 Divisão de números relativos, como operação inversa da multiplicação. A impossibilidade da divisão, no caso geral.

7.11 As propriedades da divisão.

7.12 Resolução de equações numéricas em $\mathbb{Z}$*, dos tipos:* $ax + b = c$*, e* $\frac{x}{a} + b = c$*, começando pelos casos em que* $b = 0$.

7.13 Cálculo de valores numéricos de expressões muito simples. (p. 16)

O MANUAL ESCOLAR

O livro *Matemática. 1.º ano*, publicado em 1971, surge na sequência de uma edição experimental do programa de matemática moderna para o ensino técnico profissional. Os autores Aires Biscaia, Francelino Gomes, Jorge Monteiro, Maria Helena Paz Pinto, Santos Heitor e Vítor Pereira, foram todos professores das turmas experimentais da reforma matemática moderna do ensino técnico em Portugal.

Quanto à estrutura (Okeeffe, 2013), o livro *Matemática. 1.º ano*, tem capa mole e está impresso em preto, com algumas anotações destacadas em vermelho. Está organizado em sete capítulos: rudimentos da teoria dos conjuntos, operações com conjuntos, relações binárias, aplicações, translações no plano, conjunto dos números relativos ($\mathbb{Z}$) e operações em $\mathbb{Z}$, que seguem a estrutura do programa dos cursos industriais, publicado em 1970 na *Folha Informativa n.º 41* (Comissão, 1970; Rodrigues, 2022; Rodrigues e Matos, 2021). Iremos focar a análise nos capítulos 6 e 7, intitulados 'O conjunto de números relativos ($\mathbb{Z}$)' e 'Operações em $\mathbb{Z}$', respetivamente. O capítulo 6 tem 8 páginas e o capítulo 7 tem 32 páginas. O índice do manual escolar encontra-se no final do mesmo.

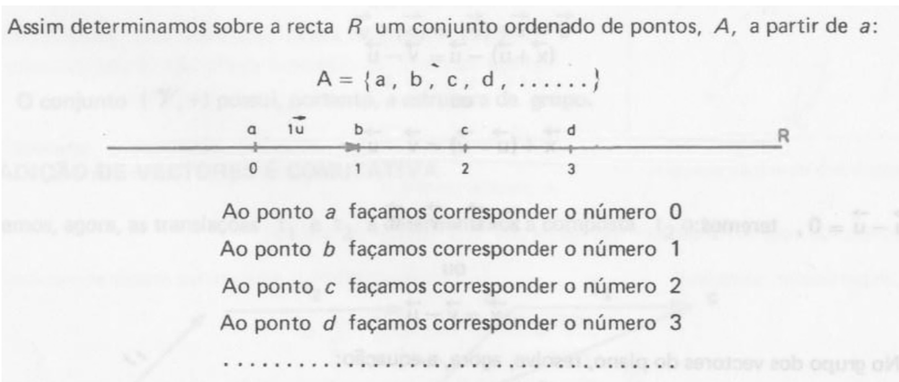
No que concerne ao conteúdo, a introdução dos números inteiros relativos é muito diferente da usada na reforma anterior. Consultando manual escolar *Matemática Industrial 1.º volume*, publicado em 1960 (Silva e Almeida, 1960), constatamos que os números inteiros são denominados por números algébricos, introduzidos a partir de exemplos referentes a temperaturas, latitudes e distâncias e que as suas operações são introduzidas de forma tradicional (por exemplo, na adição recorre-se à noção de ganhar e perder, referente a dinheiro). No manual escolar *Matemática. 1.º Volume* para uso dos cursos industriais e artísticos, publicado em 1964 (Heitor e Gomes, 1964) os números inteiros são designados por números qualificados. Neste manual já se perceciona a relação com vetores quando se representam os números na reta numérica, mas a introdução da operação de adição é semelhante à do manual anterior, introduzindo a mesma com a noção de ganhos e perdas, associadas a valores monetários, mas acompanhando as operações com representações na reta numérica.

Por sua vez, no manual escolar *Matemática. 1.º ano*, usado na experiência (Biscaia et al., 1971), são introduzidos os números inteiros relativos no capítulo 6. Neste capítulo, os autores apresentam apenas os conceitos teóricos, não intercalados com exercícios de aplicação que aparecem apenas no final do capítulo. Neste capítulo o ponto 6.7 do programa é incluído no ponto 6.5, com dois subtítulos ‘valor absoluto de um número relativo’ e ‘números simétricos ou opostos’.

No capítulo 7, dedicado às operações, são intercalados exercícios de aplicação com os conteúdos a lecionar. Neste, são introduzidas equações do tipo $a + x = b$ (subtração) e $a \times x = b$ (divisão). O capítulo termina com duas secções intituladas ‘Resolução de equações numéricas em $\mathbb{Z}$’ e ‘Cálculo de valores numéricos de expressões’, tal como era preconizado no programa prescrito.

Para os exercícios não são apresentadas soluções ou propostas de resolução. Também não há referências ou indicações de outras fontes relacionadas a este tema matemático no livro didático.

No que diz respeito ao conteúdo (Okeeffe, 2013), o capítulo 6 começa com a introdução de uma reta (orientada) como suporte para um vetor e com o estabelecimento da bijeção entre o vetor e um inteiro ($0\vec{u} \rightarrow 0$; $n\vec{u} \rightarrow n$), fazendo correspondência entre os pontos da reta e as extremidades dos vetores, tanto para números positivos quanto para negativos, como podemos ver na figura 1.


Assim determinamos sobre a recta *R* um conjunto ordenado de pontos, *A*, a partir de *a*:

A = {a, b, c, d, ...}

Ao ponto *a* façamos corresponder o número 0
Ao ponto *b* façamos corresponder o número 1
Ao ponto *c* façamos corresponder o número 2
Ao ponto *d* façamos corresponder o número 3
....

Figura 1. Estabelecimento da bijeção $n\vec{u} \rightarrow n$ (Biscaia et al., 1971, p. 167)

Em relação ao número zero, importa referir que os autores afirmam que este “pode ser considerado, simultaneamente, como um número positivo e negativo” (Biscaia et al., 1971, p. 167), o que tem implicações na definição do conjunto dos números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$). Assim, os conjuntos $\mathbb{Z}_0^+$ e $\mathbb{Z}_0^-$, são designados, respetivamente, pelo conjunto dos inteiros estritamente positivos e estritamente negativos, não incluindo o zero. Para incluir o zero, os autores utilizam a notação $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$, representando, respetivamente, o conjunto dos inteiros relativos positivos, incluindo zero, e o conjunto dos inteiros relativos negativos, incluindo zero. Repare-se que a notação usada pelos autores não é muito intuitiva, uma vez que quando a notação inclui o zero, este não está incluído no conjunto.

Os autores introduzem a noção de número absoluto, seguido da noção de números simétricos ou opostos, recorrendo a conhecimentos prévios da simetria de vetores "já sabes que cada vector tem o seu simétrico" (Biscaia et al., 1971, p. 169) e é este novo conceito de simetria de um ponto, que lhes permite graduar e orientar a reta numérica, de uma forma mais simples e mais eficiente, sem recorrer ao vetor e estabelecendo uma ordem entre os inteiros relativos representados na linha (figura 2). Repare-se anda que o sinal do número é representado sobre o mesmo, numa notação particular da reforma da matemática moderna (p.e., o número inteiro negativo um é representado por $\bar{1}$).

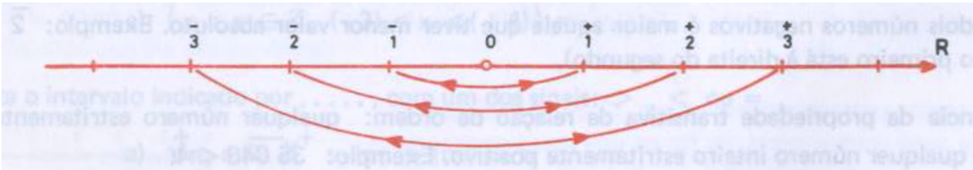
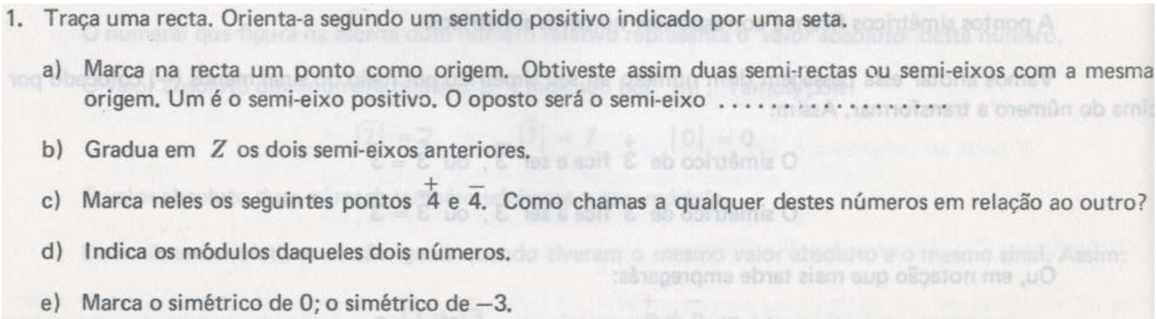


Figura 2. Graduação da reta numérica (Biscaia et al., 1971, p. 169)

A reta numérica graduada serve de base para o estabelecimento das relações de ordem em ℤ. Para finalizar o capítulo, foi proposto aos alunos um conjunto de 10 exercícios, a maioria deles utilizando a reta graduada para a sua resolução, como podemos ver na figura 3.



1. Traça uma recta. Orienta-a segundo um sentido positivo indicado por uma seta.
   a) Marca na recta um ponto como origem. Obtiveste assim duas semi-rectas ou semi-eixos com a mesma origem. Um é o semi-eixo positivo. O oposto será o semi-eixo . . . .
   b) Gradua em Z os dois semi-eixos anteriores.
   c) Marca neles os seguintes pontos $\overset{+}{4}$ e $\bar{4}$. Como chamas a qualquer destes números em relação ao outro?
   d) Indica os módulos daqueles dois números.
   e) Marca o simétrico de 0; o simétrico de −3.

Figura 3. Primeiras alíneas do exercício 1 do capítulo 6 (Biscaia et al., 1971, p. 170)

O conteúdo do capítulo 7 (Okeeffe, 2013) é dedicado às operações de inteiros relativos. Para introduzir a adição, os autores recorrem ao conhecimento prévio do aluno sobre a adição de vetores da forma $k\vec{u}$, que é sustentada por uma reta, como podemos ver na figura 4.

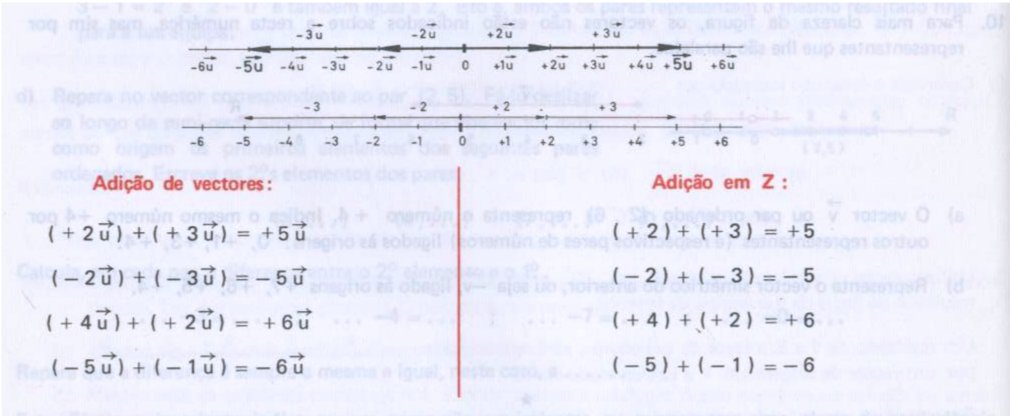


Figura 4. Adição (Biscaia et al., 1971, p. 174)

A partir da observação da coluna da esquerda, os autores afirmam que "é natural estudarmos, agora, uma nova operação que chamaremos adição em $\mathbb{Z}$ (ou adição de inteiros relativos), que se exemplifica na coluna da direita" (Biscaia et al., 1971, p. 174).

São apresentadas as operações de adição em $\mathbb{Z}$, caracterizando a estrutura do grupo $(\mathbb{Z}, +)$, seguidas de um conjunto de exercícios de aritmética, e um conjunto de exercícios contextualizados nas áreas de finanças, temperaturas, deslocamentos e alturas. Por exemplo, no exercício 2 é utilizado como exemplo um termómetro e a medição de temperaturas:

> *Um termómetro indicava ao meio dia uma temperatura ambiente de 18.º (positivos). Sabe-se que até às 16 horas ainda subiu 4 graus, tendo em seguida descido 7 graus até à meia noite. Que temperatura indicava o termómetro à meia noite?* (Biscaia et al., 1971, p.181)

A subtração decorre do conhecimento da adição, recorrendo à igualdade

$$(+3) + \boxdot = +10,$$

pedindo ao leitor para determinar que número se deve colocar em $\boxdot$. De seguida, os autores pedem para determinar o número x na expressão

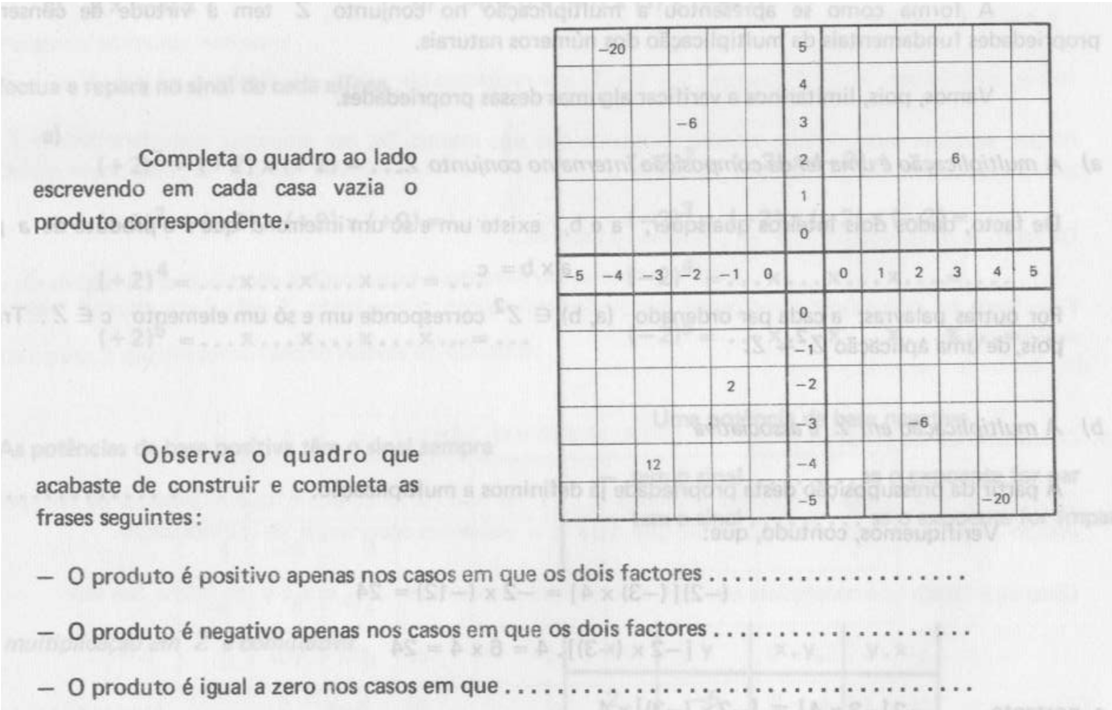
$$(-2) + x = +5,$$

concluindo que a subtração de números relativos é uma operação que sempre pode ser realizada por meio de adição, por exemplo,

$$(+7) - (+2) = (+7) + (-2) = +5.$$

O manual apresenta expressões numéricas e a simplificação da escrita, seguidas de um pequeno conjunto de exercícios.

No caso da multiplicação, os autores introduzem-na sistematicamente. Começam multiplicando dois números inteiros positivos e referem-se à multiplicação de números naturais. Então, recorrendo ao facto de +1 ser o elemento neutro, reconhecem que a multiplicação dos números relativos (sejam eles positivos ou negativos) por (+1) não altera o número relativo, ou seja, “De facto, qualquer que seja o número inteiro x, o produto de +1 por x ainda é x” (Biscaia et al, 1971, p. 187). Utilizando conhecimentos prévios de multiplicação com vetores, é introduzida a multiplicação de um número inteiro relativo por (-1). Somente após introduzir a multiplicação de um número natural por um número relativo, concluem a secção com a multiplicação de números relativos. Um dos exercícios que propõem faz uso de uma tabela, que permite ao leitor concluir qual é o sinal do produto, como podemos ver na figura 5.



Completa o quadro ao lado escrevendo em cada casa vazia o produto correspondente.

	−20					5						
						4						
			−6			3						
						2				6		
						1						
						0						
−5	−4	−3	−2	−1	0		0	1	2	3	4	5
						0						
						−1						
				2		−2						
						−3			−6			
		12				−4						
						−5					−20	

Observa o quadro que acabaste de construir e completa as frases seguintes:

— O produto é positivo apenas nos casos em que os dois factores ....

— O produto é negativo apenas nos casos em que os dois factores ....

— O produto é igual a zero nos casos em que ....

Figura 5. Produto de dois números relativos (Biscaia et al., 1971, p. 191)

Seguem-se as propriedades da multiplicação (lei de composição interna, associativa, comutativa, elemento neutro, recíproco de um número inteiro, anulamento do produto e distributiva), intercaladas com pequenos exercícios de aplicação. Nesta parte do livro é pedida a participação do leitor na dedução ou exemplificação destas propriedades. Por exemplo, para exemplificar que a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa, pede-se o preenchimento de uma tabela com o cálculo de $x \times y$ e $y \times x$, como podemos ver na figura 6.

c) A multiplicação em Z é comutativa

Completa o quadro ao lado com os valores apropriados.

Compara os valores obtidos em cada caso, para x.y e para y.x e verifica que é sempre x.y = y.x.

x	y	x.y	y.x
2	−5		
−7	−10		
4	0		
0	−3		

Este facto, que é geral, traduz a propriedade comutativa da multiplicação em Z :

$\forall x,y \in Z \;,\quad x.y = y.x$

Figura 6. Propriedade comutativa da multiplicação em ℤ (Biscaia et al., 1971, p. 193)

A divisão de números relativos é introduzida como a operação inversa da multiplicação evidenciando que no conjunto dos números inteiros esta não é uma operação interna em ℤ (exemplo: $(-10) \times x = -3 \Leftrightarrow x = +\frac{3}{10}$ e $+\frac{3}{10} \notin \mathbb{Z}$). Os autores, a partir destes exemplos referem a existência do conjunto dos números racionais relativos, ℚ . Nas propriedades da divisão os autores optam por exemplificar que esta operação não é associativa nem comutativa, que não existe em ℕ elemento neutro para a adição. Mostram ainda que a divisão é distributiva à esquerda: $(36 + 42) \div 6 = 78 \div 6 = 13$ ou $(36 + 42) \div 6 = 36 \div 6 \, + \, 42 \div 6 = 6 + 7 = 13$, porém não é distributiva à direita.

Na secção seguinte, sobre resolução de equações, os autores optam por resolver equações numéricas em ℤ, com complexidade crescente ($x + 1 = 0$; $2x = -6$; $2x + 1 = -5$). Há dois exercícios no final da secção, um para determinar em extensão conjuntos, recorrendo à conjunção de condições, do tipo "a) $B = \{x: x \in \mathbb{Z} \wedge 3 - x = 2\}$" (Biscaia et al, 1971, p. 205) e resolução de equações, mais complexas do que resolveram no início da secção, como por exemplo "b) $\frac{8-y}{2} - 3 = 1$" (Biscaia et al, 1971, p. 205).

O capítulo termina com uma secção intitulada 'Cálculo de valores numéricos de expressões', com exemplos e exercícios para a substituição de variáveis, como por exemplo "Que valor tomará B dado por $B = \frac{a\times b}{2x}$, quando $a = -3$, $b = -4$ e $x = -1$" (Biscaia et al, 1971, p. 206).

Este livro constitui um recurso estruturante do currículo apresentado a professores e alunos: a apresentação dos conteúdos é expositiva, com vários momentos em que para a dedução de propriedades é pedida a intervenção do aluno, tal como referimos na introdução das propriedades da multiplicação. Isto representa que ao leitor é criada expectativa (Okeeffe, 2013) de aprendizagem participante. Os exercícios propostos ao longo dos dois capítulos não têm soluções nem propostas de resolução. O livro apresenta uma linguagem (Okeeffe, 2013) simples e direta, dirigida ao aluno, incluindo pequenas tarefas que motivam o aluno a refletir e o orientam na obtenção de conclusões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A reforma da matemática moderna trouxe profundas transformações no currículo da matemática a ser ensinado nos cursos industriais em Portugal. A análise de manuais escolares associados à experiência da reforma reveste-se de um interesse particular dado que em primeiro lugar, exibem metodologias de ensino que envolvem o aluno na aprendizagem, introduzem uma matemática mais formal, mas não deixam de parte a importância das aplicações.

O manual estudado *Matemática. 1.º ano*, publicado em 1971 apresenta aplicações consistentes com o que foi ensinado anteriormente, usando a noção de vetor para a introdução dos números inteiros relativos no capítulo 6, ao contrário do que acontecia nos manuais de reformas anteriores. De facto, a nomenclatura 'números inteiros' surge pela primeira vez durante esta reforma. O manual escolar em estudo é coerente (Krüger, 2010) horizontalmente, dentro do mesmo ano e verticalmente, tendo em atenção conhecimentos prévios dos alunos e tem potencialidades para reforçar as competências através da prática. No que respeita à visualização (Krüger, 2010), este é agradável, redigido em duas cores, com ilustrações várias que contribuem para a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos, como podemos verificar, por exemplo, na figura 5. Ao longo do manual encontram-se exercícios de aplicação a diferentes contextos (Krüger, 2010), relacionando a matemática com a realidade dos alunos.

O manual escolar corresponde ao pretendido no programa prescrito e publicado na *Folha Informativa*, adotando uma abordagem diferente de reforma anteriores para o ensino dos números inteiros, no 1.º ano dos cursos industriais. Este conjunto e as suas operações são introduzidos através dos conhecimentos anteriores de vetores. Esta abordagem vai de encontro ao movimento da reforma da matemática moderna que apela a um ensino da matemática mais formal e estruturado.

De referir que os autores deste manual eram professores no terreno durante implementação da reforma nas turmas experimentais e que, à data da publicação, já tinham experiência acumulada em anos anteriores de lecionação. Neste sentido, não é surpreendente que o livro esteja dirigido ao aluno e peça o seu envolvimento na aprendizagem.

A informação recolhida na análise do manual permite-nos refletir sobre a importância do livro didático na aprendizagem dos alunos, num momento em que o ensino da matemática sofreu grandes transformações. Os professores do ensino técnico em Portugal, tentaram incorporar a sua experiência na nova reforma, não perdendo de vista a importância de uma perspetiva de formação profissional, que permitiria a estes alunos uma melhor preparação para o mercado de trabalho.

Referências

Almeida, M. (2007). *A sombra da Matemática... Um contributo para a compreensão desta disciplina no 3º ciclo liceal (1947-1974)*. [Tese de mestrado, Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, Portugal].

Almeida, M. C. e Rodrigues, A. S. (2025). Distinct approaches to integers in technical schools and in liceus, during modern mathematics in Portugal. Em E. Barbin, M. N. Fried, M. Menghini, e F. S. Tortoriello (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics* Education. Trends, Practices, Future Developments (pp. 513-526) Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-031-86870-2.

Almeida, M., Matos, J. M. e Rodrigues, A. (2022). Inovação curricular em livros de texto de matemática. Em R. E.Gutiérrez e J. L. Prieto (Comps.), *Memorias del VI congreso iberoamericano de historia de la Educación Matemática*. (pp. 815-830). Asociación Aprender en Red. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/230722

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Edições 70.

Biscaia, A., Gomes, F., Monteiro, J., Pinto, M. H. P. Heitor, S. e Pereira, V. (1971). *Matemática. 1.º ano*. Publicação dos autores.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria e Educação, 2*, 177-229.

Choppin, A. (2004). História dos livros e das edições didáticas. *Educação e Pesquisa, 30*(3), 549-566. https://doi.org/10.1590/S1517-97022004000300012

Choppin, A., e Bastos, T. M. H. C. (2012). O manual escolar: uma falsa evidência histórica. *Revista História Da Educação, 13*(27), 9-75.

Cohen, L., Manion, L. e Morrison, K. (2007). *Research methods in education (6th edition)*. Routledge.

Comissão (1968). Comunicação sobre o início dos ensaios para a reorganização do ensino da matemática. *Folha Informativa dos Professores do 1.º Grupo (E. T. P.), 16*, 1-4.

Comissão. (1970). Programa do 1.º ano. *Folha Informativa dos Professores do 1.º Grupo (E. T. P.), 41*, 11-16.

De Bock, D. (2023a). Modern Mathematics: An international movement diversely shaped in national contexts. Em D. De Bock (Ed.), *Modern Mathematics. An International Movement?* (pp. 1-12). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_1

De Bock, D. (2023b). The early roots of the european Modern Mathematics movement: How a model for the science of mathematics became a model for Mathematics Education. Em D. De Bock (Ed.), *Modern Mathematics. An International Movement?* (pp. 37-54). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_3

Furinghetti, F., Matos, J. M. e Menghini, M. (2013). From mathematics and education, to mathematics education. Em A. B. M. Clements, C. Keitel, J.

Kilpatrick e F. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 273-302). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_9

Gimeno, J. S. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática*. Artmed.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação, 1*, 9-43.

Heitor, A. O. S. (1958). Comentário sobre a XI reunião da comissão internacional para o estudo e aperfeiçoamento do ensino da matemática. *Boletin de Ação Educativa, 6*(23), 269-284.

Heitor, S. e Gomes, F. (1964). *Matemática. Vol. 1*. 2.ª Edição. Livraria Popular Francisco Franco.

Krüger, J. (2010). Lessons from the early seventeenth century for mathematics curriculum design. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 25*(3), 144-171. https://doi.org/10.1080/17498430903584136

Matos, J. M. e Almeida, M. C. (2023). The distinct facets of Modern Mathematics in Portugal. Em D. De Bock, *Modern Mathematics. An international movement?* (pp. 169-197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2_9

Mohamed, M., e Johnny, J. (2010). Investigating number sense among students. Em R. A. Tarmizi e A. F. M. Ayub (Eds.), *International Conference on Mathematics Education Research 2010 (ICMER2010)*, (pp. 317-324). Elsevier, Ltd. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.044

Moon, B. (1986). *The "New Maths" curriculum controversy. An international story*. Falmer Press.

Novaes, B. W. D. (2012). *O movimento da matemática moderna em escolas técnicas industriais do Brasil e Portugal: impactos na cultura escolar* [Tese de Doutoramento em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Brasil]. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/189998

Okeeffe, L. (2013). A framework to textbook analysis. *International Review of Contemporary Learning Research, 2*(1). 1-13. http://dx.doi.org/10.12785/IRCLR/020101

Rodrigues, A. (2022). O Movimento da Matemática Moderna no ensino Técnico em Portugal. Em Gutiérrez, R. E. e Prieto, J. L. (Comps.). *Memorias del VI congreso iberoamericano de historia de la Educación Matemática*. (pp. 607-622). Asociación Aprender en Red. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/230722

Rodrigues, A. S. C. e Matos, J. M. (2021). A folha informativa do ensino técnico: uma ferramenta de partilha de experiências. *REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, 9*(3), 1-21. https://doi.org/10.26571/reamec.v9i3.13019

Rodrigues, A., Novaes, B. W. D. e Matos, J. M. (2016). A cultura escolar em conflito: ensino técnico e matemática moderna em Portugal. *Revista Diálogo*

Educacional, 16(48), 381-402. https://doi.org/10.7213/dialogo.educ.16.048.DS06

Silva, E.R., e Almeida, J. A. M. (1960). *Matemática industrial. Vol. 1. 2.ª edição*. Livraria Sá Costa.

Silva, C. S. (2004). O estudo dos manuais escolares de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática, 80*, 46-50.

Sousa, C. S. L. (2012). *O ensino de matemática no CPES. Análise de manuais*. [Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal]. http://hdl.handle.net/10362/9071

Uma versão anterior deste documento foi apresentada no VII Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática (VII CIHEM, Costa Rica, 2023).

Alexandra Sofia Rodrigues
EDUNOVA.ISPA, CICS.NOVA, Universidade
NOVA de Lisboa, UIED, Portugal
alexsofiarod@gmail.com

Recebido: Fevereiro, 2024. Aceitaram: Fevereiro, 2025
doi: 10.30827/pna.v19i5.30203

BY NC ND

ISSN: 1887-3987

WHOLE NUMBERS DURING MODERN MATHEMATICS IN TECHNICAL SCHOOLS IN PORTUGAL

Alexandra Sofia Rodrigues

Between 1950 and 1970, the modern mathematics movement spread extensively across the globe, bringing significant changes to the discipline's curriculum, along with adjustments in teaching methodologies and practices in school mathematics.

This research will conduct a documentary analysis of two curricular dimensions: the ‘prescribed’ and ‘enacted’ curriculum. In countries with centralised educational systems, such as Portugal during the decades under study, the prescribed curriculum (the programme) involves decisions made by government entities. Once established, the programmes are presented to teachers through curricular materials, primarily through textbooks. We will analyse the ‘enacted’ curriculum, particularly the textbook in use, employing the methodological framework of Okeeffe (2013) and Krüger (2010), as applied by Almeida e Rodrigues (2025).

In this text, we will analyse how whole numbers, along with their operations, are formed in the first year of industrial courses in Portugal during the reform. We review documentary sources such as journals, school manuals, legislation, and other references that contribute to an understanding of teaching practices in technical schools. The reform plays a differentiating and restructuring role in collaborative work within technical schools, integrating new mathematics while preserving the significance of real-world applications for students.

The information gathered from the textbook analysis enables us to contemplate the significance of textbooks in student learning at a time when mathematics education has experienced significant transformations. To present integers and their operations, the notion of vector was used, giving a new structure to the mathematical discipline of the 1st year of industrial courses but preserving the importance of applications in the real world of others.

The authors of the textbooks endeavored to integrate their teaching experience into the preparation of these resources, never losing sight of the perspective of professional training and, simultaneously, the importance of mathematics applications.