¿CÓMO ATIENDEN, INTERPRETAN Y DECIDEN FUTURAS MAESTRAS AL INTERACTUAR CON EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE NIÑAS? EL CASO DE LAS IGUALDADES NUMÉRICAS

Eder Pinto, Juan Luis Piñeiro, Camila Cortés y M.ª Victoria Martínez Videla

En esta investigación, exploramos cómo un grupo de 21 futuras maestras de primaria atiende, interpreta y decide basándose en el pensamiento algebraico evidenciado por niñas al resolver igualdades numéricas. Nos situamos en las perspectivas conceptuales del noticing y el MTSK para profundizar en el conocimiento profesional de las participantes. Las futuras maestras participaron en una asignatura sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, la cual siguió la metodología del análisis de vídeos. Los principales resultados muestran que las participantes consideran los elementos algebraicos involucrados en la situación, aunque el uso de evidencia es limitado. Además, destacamos la movilización de diversos conocimientos matemáticos para la enseñanza del álgebra escolar.

Términos clave: Curso basado en análisis de vídeos; Futuras maestras; MTSK; *Noticing*; Pensamiento algebraico

How do prospective elementary school teachers attend to, interpret, and decide based on children's algebraic thinking? The case of numerical equalities

In this research, we explore how a group of 21 future primary school teachers attend to, interpret, and make decisions based on the algebraic thinking demonstrated by girls when solving numerical equalities. We adopt the conceptual perspectives of Noticing and MTSK to deepen the participants' professional knowledge. The future teachers participated in a course on teaching and learning school algebra, which followed a video analysis methodology. The main results show that the participants consider the algebraic elements involved in the situation, although the

Pinto, E., Piñeiro, J. L., Cortés, C. y Martínez-Videla, M. V. (2024). ¿Cómo atienden, interpretan y deciden futuras maestras al interactuar con el pensamiento algebraico de niñas? El caso de las igualdades numéricas. *PNA, 18*(5), 495-521. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29823

use of evidence is limited. Additionally, we highlight the mobilization of various mathematical knowledge for teaching school algebra.

Keywords: Algebraic thinking; MTSK; Noticing; Prospective Elementary School Teachers; Video-Based Course

Como futuras professoras atendem, interpretam e decidem sobre o pensamento algébrico de meninas? O caso das igualdades numéricas

Nesta pesquisa, exploramos como um grupo de 21 futuras professoras do ensino fundamental atende, interpreta e decide com base no pensamento algébrico evidenciado por meninas ao resolver igualdades numéricas. Adotamos as perspectivas conceituais do Noticing e do MTSK para aprofundar o conhecimento profissional das participantes. As futuras professoras participaram de um curso sobre ensino e aprendizagem de álgebra escolar, que seguiu uma metodologia de análise de vídeos. Os principais resultados mostram que as participantes consideram os elementos algébricos envolvidos na situação, embora o uso de evidências seja limitado. Além disso, destacamos a mobilização de diversos conhecimentos matemáticos para o ensino da álgebra escolar.

Palavras-chave: Curso baseado em análise de vídeos; Futuras professoras; MTSK; Noticing Pensamento algébrico

Responder al pensamiento matemático de las[1] estudiantes constituye una práctica docente esencial que impulsa una enseñanza de alta calidad (Larison et al., 2022; Ivars et al., 2020; Mellone et al., 2020; NCTM, 2014; Walkoe et al., 2024). A pesar de la importancia que supone que profesoras consideren el pensamiento matemático de sus estudiantes, esta acción es muchas veces invisibilizada en los programas de formación del profesorado (Jacobs et al., 2024). Más específicamente, en el contexto de la formación inicial docente, aprender a partir del pensamiento matemático de las estudiantes es considerado una acción crucial pues es una de las formas para aproximarse a la práctica (Grossman, 2018). En este documento nos proponemos profundizar en las maneras en que futuras maestras de primaria (FM, en adelante) consideran el pensamiento matemático de las estudiantes con la finalidad de tomar decisiones usando su conocimiento profesional.

Nos centramos en un tipo específico de pensamiento matemático: el pensamiento algebraico, que constituye uno de los propósitos fundamentales de la enseñanza del álgebra en la educación primaria (Kieran et al., 2022). En

[1] Con la finalidad de escribir este texto con lenguaje inclusivo de género, hemos utilizado el femenino como genérico.

particular, nos interesa uno de los aspectos curriculares claves relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano: la aritmética generalizada. Esta fomenta que niñas razonen sobre igualdades numéricas más allá del cálculo, enfocándose en las propiedades y relaciones entre cantidades a través de diversas representaciones matemáticas y examinando su generalidad (Blanton et al., 2018). Aunque un número creciente de investigaciones ha abordado las maneras en que niñas de 6 a 12 años trabajan con igualdades numéricas desde una perspectiva algebraica (p. ej., Marquardt, 2022; Radford, 2022; Xie et al., 2022), aún es necesario profundizar en cómo las FM consideran el pensamiento algebraico de las estudiantes. Algunas investigaciones que exploran el conocimiento de las FM al enseñar álgebra se centran en el conocimiento del contenido (Pincheira y Alsina, 2021) y en documentar las debilidades de las FM (Hohensee, 2017; Stephens, 2006). Por tanto, enfocarnos en cómo las FM consideran el pensamiento algebraico de sus estudiantes al trabajar con igualdades numéricas constituye la originalidad del presente estudio.

Una vía efectiva para que FM interactúen y aprendan del pensamiento algebraico de las estudiantes es a través del análisis de vídeos de clases, lo que les permite, entre otras cosas, aproximarse a la práctica (Grossman, 2018). Dadas las particularidades que tiene la enseñanza del álgebra en la educación primaria, observar vídeos que muestren cómo niñas razonan con ideas algebraicas constituye un desafío para la formación de docentes de matemáticas (Pinto et al., 2024). Para abordar este desafío, nos apoyamos en la competencia profesional del *noticing*. Esta competencia implica que las docentes *atiendan*[2] a las características del pensamiento matemático de las estudiantes, lo *interpreten* y *tomen decisiones* informadas basadas en evidencias y considerando los propósitos de enseñanza (Jacobs et al., 2010). Si bien el *noticing* permite desarrollar una enseñanza basada en la comprensión matemática actual de las estudiantes (Grossman, 2018), también es necesario identificar qué conocimientos profesionales específicos y especializados movilizan las FM al atender, interpretar y decidir con base en el pensamiento algebraico evidenciado por niñas.

Varios trabajos, y particularmente el Conocimiento Interpretativo de la Profesora (Di Martino, 2019; Mellone et al., 2020), han mostrado que el conocimiento es crucial para atender a las ideas de las estudiantes. Sin embargo, estos trabajos no muestran una especificidad que permita identificar con claridad qué conocimientos especializados se movilizan cuando se atiende, interpreta y decide. Por ello, hemos optado por el Modelo de Conocimiento Especializado de la Profesora de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo et al., 2018), pues nos permite complejizar y enriquecer las comprensiones sobre lo que ocurre cuando las FM interactúan con el pensamiento algebraico de niñas al

[2] Las cursivas corresponden a énfasis de las autoras para resaltar las habilidades específicas del *noticing*.

trabajar con igualdades numéricas, analizando qué conocimiento movilizan las profesoras, i.e., indicios de que las acciones de las profesoras requieren conocimiento matemático especializado. En este sentido, no intentamos mostrar cómo dialogan dos perspectivas teóricas, sino que nuestro interés está puesto en los dominios referidos al conocimiento del contenido (MK) y del conocimiento didáctico del contenido (PCK) y cómo esta información puede complementar el análisis que permite el *noticing*. Aunque existen escasos estudios sobre la relación entre los constructos de *noticing* y MTSK (Badillo y Fernández, 2018), se sabe que el conocimiento matemático especializado para la enseñanza influye en la capacidad de las profesoras para interactuar con el razonamiento matemático de las estudiantes (Joglar-Prieto et al., 2022; Sherin, 2007). No obstante, el sostener conocimiento de las matemáticas escolares no es condición suficiente para interpretar respuestas de estudiantes (Di Martino, 2019; Mallone et al., 2020).

Por tanto, en este artículo nos interesa explorar cómo las FM interactúan con el pensamiento algebraico de las niñas al resolver igualdades numéricas en el contexto de la observación de vídeos de clase. Para ello, nos proponemos abordar dos preguntas de investigación: (a) ¿Cómo *atienden*, *interpretan* y *deciden* las FM basándose en las estrategias de las niñas?; y (b) ¿qué conocimientos matemáticos especializados para la enseñanza del álgebra escolar movilizan las FM al *atender*, *interpretar* y *decidir* en función de las estrategias de las niñas?

Perspectivas conceptuales

El marco teórico que sustenta este trabajo se organiza en torno a tres elementos centrales: (a) la aritmética generalizada como enfoque al pensamiento algebraico; (b) *noticing*; y (c) MTSK.

Aritmética generalizada como enfoque al pensamiento algebraico

Nuestra postura es que el pensamiento algebraico se caracteriza por cuatro prácticas centrales: generalizar, representar, justificar y razonar, con estructuras matemáticas y relaciones (Blanton et al., 2018). Estas prácticas —que reconocen que las experiencias algebraicas van más allá de la mera manipulación simbólica— deben estar presentes en la actividad algebraica, independientemente del enfoque al pensamiento algebraico. Nos centramos en la aritmética generalizada como enfoque al pensamiento algebraico, en la cual las operaciones aritméticas, sus propiedades y el signo igual constituyen el contexto para desarrollar pensamiento algebraico. Por ejemplo, en la Figura 1 presentamos igualdades numéricas abiertas que trabajamos con niñas de 9-10 años (Pinto et al., 2023).

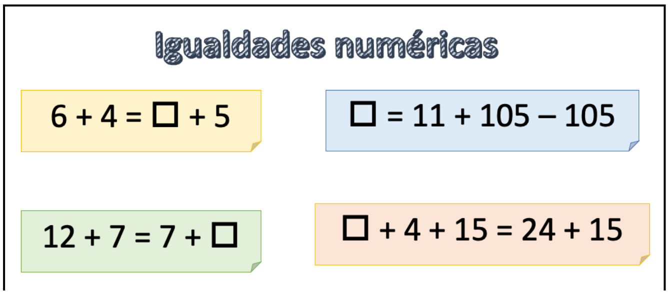


Figura 1. Ejemplo de igualdades numéricas

En las igualdades de la Figura 1 hay involucradas diferentes propiedades de la adición (como la conmutativa en la igualdad 12 + 7 = 7 + □), que pueden ser usadas para evitar hacer cálculos y señalar el número que podría ir en cada espacio en blanco. Lo algebraico tiene relación con promover que niñas observen múltiples cálculos, noten y representen la estructura subyacente para justificar y razonar con las generalizaciones observadas, permitiendo notar que una operación es más que un proceso o un algoritmo (Blanton et al., 2018).

El signo igual permite desarrollar una comprensión de las igualdades y equivalencias, el cual puede ser abordado desde dos enfoques: (a) operacional, que involucra ver el signo igual e inmediatamente colocar un resultado; y (b) relacional, que se entiende como un enfoque flexible al cálculo en el cual las expresiones son transformadas usando las propiedades fundamentales (Molina, 2009). El enfoque relacional del signo igual favorece que niñas examinen la generalidad al analizar las propiedades y relaciones numéricas involucradas. Más específicamente, Jacobs et al. (2007) proponen tres aplicaciones de este enfoque:

- ver el signo igual cómo indicador de relación entre dos expresiones, el cual involucra, por ejemplo, que al agregar una misma cantidad a ambos lados de la igualdad, la relación entre ambas expresiones no cambia;
- usar relaciones numéricas para simplificar cálculos, que implica ir más allá de procedimientos mecánicos e involucra identificar relaciones numéricas y razonar sobre las transformaciones que permitirán resolver una situación problema; y
- hacer explícitas relaciones generales basadas en las propiedades fundamentales de los números, que tiene relación con saber reconocer y aplicar las propiedades en igualdades numéricas para reconocer las estructuras de estas en diferentes contextos.

Noticing

Noticing es un constructo que refiere a las formas especializadas en que las profesoras observan y dan sentido a los acontecimientos del aula y a los detalles de la enseñanza (Choy y Dindyal, 2020). A pesar de las diferentes conceptualizaciones de *noticing* en el contexto de la Educación Matemática (Weyers et al., 2023), nos interesamos por un tipo específico: el *professional* *noticing of children's mathematical thinking* (Jacobs et al., 2010). Este constructo está centrado específicamente en considerar lo que hacen o dicen estudiantes y considera un conjunto de tres habilidades interrelacionadas:

- Prestar atención a las estrategias de las estudiantes, lo cual involucra que profesoras presten atención a los detalles matemáticos que surgen en las estrategias de las estudiantes. Dichas estrategias son importantes pues permitan profundizar en la comprensión de los razonamientos de sus estudiantes.
- Interpretar las comprensiones de las estudiantes, en la cual las profesoras comprenden las estrategias de las estudiantes con base en: (a) los detalles de las estrategias desarrolladas y (b) hallazgos en investigaciones relacionadas en el área.
- Decidir cómo responder sobre la base de las comprensiones de las estudiantes, lo que involucra que las profesoras usen lo que han aprendido sobre la comprensión de las estudiantes en una determinada situación y su razonamiento es coherente con la investigación sobre el desarrollo matemático de los escolares.

Las tres habilidades del *noticing* buscan identificar cómo profesoras consideran el pensamiento matemático de las estudiantes para tomar decisiones informadas (Jacobs et al., 2010). Dado que no pueden planificar cuáles son las respuestas exactas que darán las estudiantes, es necesario que las profesoras atiendan y relacionen elementos matemáticos significativos en las estrategias de las estudiantes para interpretar y decidir cómo responder (Barnhart y van Es, 2015). Las tres habilidades ocurren de manera simultánea y proporcionan las bases para entender cómo responden profesoras ante demandas específica de una tarea profesional.

MTSK

Los diferentes modelos de conocimiento de la profesora han puesto de manifiesto la compleja relación entre el conocimiento de las matemáticas y cómo es usado en las diferentes actividades que estructuran la enseñanza de esta disciplina (Llinares, 2019). El MTSK respeta los dominios del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del contenido, reconociendo la especialización del conocimiento matemático como una propiedad inherente al modelo y que se extiende a todos los subdominios (Carrillo et al., 2018). Este modelo considera dominios y subdominios que buscan profundizar en el conocimiento de la profesora de matemáticas, tanto en los elementos que lo componen como en las interacciones. En la Figura 2 presentamos los dominios y subdominios del modelo.

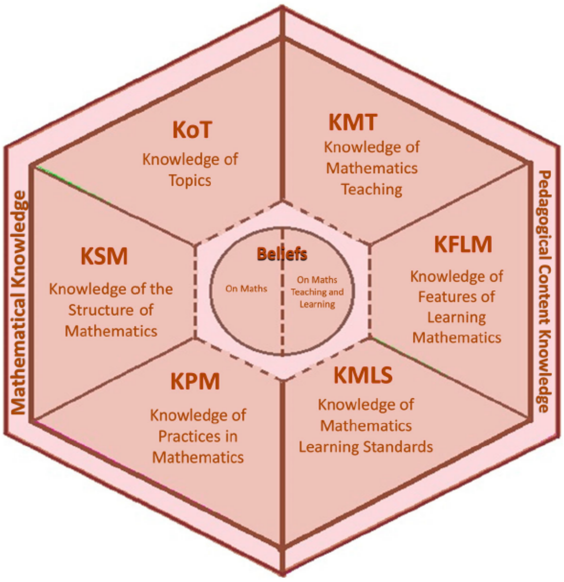


Figura 2. Dominios y subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2018, p. 241)

Tal como se muestra en la Figura 2, el modelo está compuesto por dos grandes dominios: (a) el conocimiento del contenido (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK); y una dimensión relativa a las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza.

En este artículo nos centramos en los dos dominios del modelo. Con respecto al primero (MK), se presentan tres subdominios que se relacionan con tres formas de conocer el contenido matemático: (a) conocimiento de los temas (KoT); (b) conocimiento de la estructura matemática (KSM); y (c) conocimiento de la práctica matemática (KPM). Con respecto al dominio PCK, este se centra en qué debe ser enseñado y aprendido en un determinado momento y está compuesto por tres subdominios: (a) conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT); (b) conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM); y (c) conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

MÉTODO

Esta investigación tiene un planteamiento cualitativo. Específicamente, seguimos las directrices de la Investigación de Diseño pues constituye una forma de involucrar a FM en un desarrollo profesional profundo al mismo tiempo que puedan dar sentido a sus experiencias de aula (Fowler et al., 2022; Prediger et al., 2015).

Contexto y participantes

La investigación fue desarrollada en el marco de una asignatura referida a la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar en el grado de maestra de primaria, en una universidad chilena. En Chile, los grados de maestras de primaria suelen tener una duración de 10 semestres e incluyen asignaturas referidas al álgebra escolar por ser un bloque de contenido que se aborda desde primero de primaria (Mineduc, 2012). La asignatura se encontraba en el sexto semestre y tenía por objetivo que FM diseñen experiencias de aprendizaje que fomentaran el pensamiento algebraico en niñas de 6 a 12 años. El primer autor fue el docente de la asignatura, quien es maestro de primaria y tiene formación en Didáctica de la Matemática.

La asignatura siguió una metodología basada en el análisis de vídeos de aula, que permitió a FM observar, analizar y discutir cómo las niñas interactuaban con diversos contenidos algebraicos. Esta metodología la escogimos pues facilita una aproximación a la práctica y ofrece varios beneficios en la formación de FM, como lo es planificar y practicar la enseñanza, así como recibir retroalimentaciones inmediatas (Grossman, 2018). El curso constó de seis sesiones de tres horas cada una, desarrolladas a lo largo de varias semanas. Organizamos las sesiones del curso siguiendo las líneas de contenido del pensamiento algebraico propuestas por Blanton et al. (2018), tal como lo exponemos en la Figura 3.

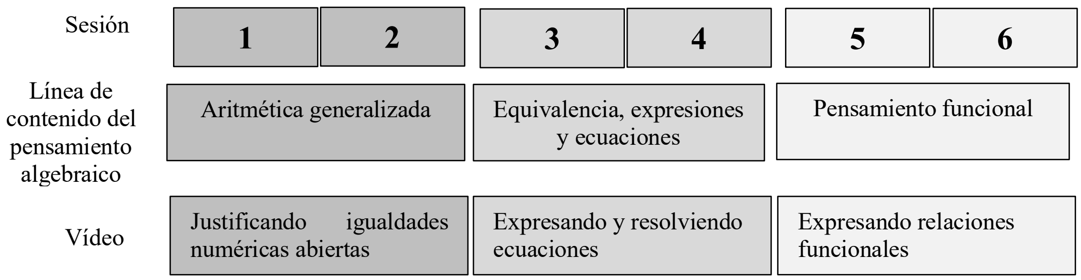


Figura 3. Organización del curso

Los vídeos provenían de clases de álgebra con niñas de primaria (para más información, véase Pinto et al., 2023), las cuales exhibieron sus estrategias e ideas al interactuar con ideas algebraicas. Al seleccionar los vídeos, buscamos que aparecieran tanto niños como niñas, incluimos diversas dinámicas de interacción de clase y nos enfocamos en destacar las fortalezas del razonamiento de las niñas en lugar de sus errores. Los vídeos se visualizaron al inicio de cada sesión del curso y todos contaban con su respectiva transcripción. Un mismo vídeo se visualizaba en dos sesiones (como es el caso del vídeo “Justificando igualdades numéricas abiertas” que fue observado en las sesiones 1 y 2). Luego de la observación, las FM respondían individualmente a preguntas específicas sobre el vídeo. Finalmente, generamos una discusión y análisis de los vídeos abordando cómo las FM atienden a los detalles de las estrategias de las niñas, interpretan con base en las comprensiones evidenciadas por las niñas y toman decisiones sobre cómo debe seguir la enseñanza. Lo anterior involucra las tres habilidades del *noticing*, lo que nos permitió resaltar las características de las estrategias e ideas de las niñas, así como destacar los elementos algebraicos y didácticos relacionados con sus respuestas.

Participaron 21 FM que anteriormente habían cursado tres asignaturas centradas en distintos sistemas numéricos, analizando producciones escritas de niñas, pero no habían tenido experiencia en el análisis de vídeos. Todas participaron voluntariamente y proporcionaron su consentimiento informado, asegurando el tratamiento ético de sus respuestas, supervisado por el Comité de Ética Institucional de la universidad del primer autor.

Instrumentos de recolección de la información

En este artículo nos centramos en las primeras dos sesiones de la asignatura (referidas a la aritmética generalizada). El vídeo exhibido en ambas sesiones se sitúo en una clase con niñas en la que se fomentó una visión relacional (no computacional/operacional) de las expresiones aritméticas horizontales a través de propiedades aritméticas de la suma y la resta. El vídeo tuvo una duración de 116 segundos y lo seleccionamos pues evidenciamos diferentes comprensiones de niñas sobre el signo igual al trabajar con igualdades numéricas. En concreto, el vídeo mostró las respuestas de tres niñas[3] –David, Teo y Susana– al completar la igualdad numérica 6+4=□+5. En la respuesta de David se evidencian dos comprensiones sobre el signo igual al resolver la igualdad: una operacional (“puse diez, pero me di cuenta que era un error pues sumé 6 más 4”) y otra relacional-equivalencias (“estábamos viendo que los números me dieran el mismo resultado, el 6 más el 4, y el 5 más 5”). En el caso de Teo evidenciamos la comprensión relacional-equivalencias (“porque 6 más 4 es 10, y dice es igual, entonces puse 5 más 5 es 10”) y en el caso de Susana se evidencia la comprensión relacional-simplificación de cálculos, pues evidencia el uso de la compensación (“al seis le restas una y se la das al cuatro, entonces serían cinco más cinco”).

En cada sesión, las FM observaron el vídeo dos veces consecutivas y, luego, les pedimos que respondieran individualmente y por escrito a diferentes preguntas, tal como se muestra en la Tabla 1. Las preguntas fueron adaptadas de investigaciones previas que se interesan por profundizar en el pensamiento matemático de niñas (por ejemplo, Jacobs et al., 2007; van Es y Sherin, 2010).

Tabla 1
Preguntas que respondieron FM al observar el vídeo

Sesión	Habilidad del *noticing*	Preguntas
1	Atender	[1] Describe en detalle qué hizo cada estudiante al responder a la igualdad numérica

[3] Usamos nombres ficticios de las niñas para resguardar su anonimato.

Tabla 1
Preguntas que respondieron FM al observar el vídeo

Sesión	Habilidad del *noticing*	Preguntas
2	Interpretar	[2] ¿Qué podemos decir sobre la comprensión de cada niña?
	Decidir	[3] Supón que eras la profesora de ese grupo de estudiantes, ¿qué problemas o situaciones propondrías a continuación?

En la primera sesión del curso, nos centramos en cómo FM atienden a las estrategias de las niñas, respondiendo a [1]. Después de visualizar el vídeo y responder a la pregunta, presentamos el modelo de pensamiento algebraico de Blanton et al. (2018) e introdujimos la aritmética generalizada mediante evidencias obtenidas del vídeo. Luego, analizamos los lineamientos curriculares de educación primaria relacionados con aritmética y álgebra, y discutimos los diferentes enfoques sobre el signo igual. Para la siguiente sesión, las FM debían leer las investigaciones sobre pensamiento relacional de Molina (2009) y sobre niveles de conocimiento del signo igual de Matthews et al. (2012). En la segunda sesión, recogimos evidencias sobre cómo las FM interpretan las estrategias de las niñas (respondiendo a [2]) y toman decisiones (respondiendo a [3]).

En cada sesión, las FM tuvieron 30 minutos para responder a las preguntas (ver Tabla 1) y el énfasis estuvo puesto en considerar lo que niñas hacen o dicen poniendo atención a su pensamiento algebraico.

Análisis de datos

Considerando nuestras preguntas de investigación, analizamos las producciones escritas de las 21 FM a través de un análisis de contenido deductivo (Kuckartz, 2019). Para abordar dicho análisis establecimos tres categorías analíticas:

- Elementos algebraicos relevantes considerados (Blanton et al., 2018; Jacobs et al., 2007, 2010; Molina, 2009), con los cuales buscamos identificar los elementos algebraicos relevantes involucrados en las respuestas de las niñas y que tienen relación con: (a) significado operacional del signo igual (respuesta de David); (b) significado relacional del signo igual como indicador de una relación entre expresiones equivalentes (respuestas de David y Teo); (c) significado relacional del signo igual que favorece establecer relaciones numéricas para simplificar cálculos (respuesta de Susana); y (d) otros elementos;
- Uso de evidencia (Jacobs et al., 2010), con la cual buscamos identificar si las FM usan (o no) evidencias sobre lo que las niñas hacen o dicen para apoyar sus descripciones.

- Dominios y subdominios de conocimiento del MTSK (Carrillo et al., 2018), con la cual buscamos interpretar los conocimientos movilizados en las descripciones de las FM con alguno de los dominios/subdominios del MTSK. Tuvimos especial cuidado con identificar elementos tratados en el curso como indicios de conocimiento especializado movilizado.

Las tres categorías las aplicamos a las respuestas de las FM al atender (respuesta a [1]), interpretar (respuesta a [2]) y decidir (respuesta a [3]). Por tanto, consideramos como unidad de análisis las respuestas escritas de todas las FM a cada una de las preguntas. Para garantizar la fiabilidad de las codificaciones, sometimos las codificaciones a un proceso de calibración entre las autoras que incluía sesiones conjuntas de codificación y discusión de los desacuerdos. Este proceso permitió evaluar la fiabilidad. El acuerdo interjuez fue superior al 91%, excediendo el mínimo aceptable.

RESULTADOS

A continuación, describimos las maneras en que las FM atienden, interpretan y deciden sobre las estrategias de David, Teo y Susana al completar la igualdad numérica $6+4=\square+5$. Describiremos en cada sección los elementos algebraicos relevantes considerados por las FM (comprensiones evidenciadas sobre el signo igual), el uso de la evidencia y los dominios del MTSK movilizados.

Atención a las estrategias

De manera general, las 21 FM atendieron a los elementos algebraicos relevantes involucrados en, al menos, una de las niñas (David, Teo y/o Susana). En la Tabla 2 presentamos cómo son las atenciones que evidenciaron las FM al responder a la instrucción "Describe en detalle qué hizo cada estudiante al responder a la igualdad numérica".

Tabla 2
Elementos atendidos por las FM, uso de la evidencia y conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados

	Elementos		Uso de evidencia	Dominios y subdominios MTSK	
Niña	Algebraicos	Otros		MK	PCK
David	13 (7)	1	6 (7)	KoT: 16 KPM: 2	KFLM: 20 KMT: 6
Teo	18	3	9	KoT: 14 KPM: 2	KFLM: 18
Susana	16	5	16	KoT: 14 KPM: 1	KFLM: 13 KMT: 1

Tabla 2

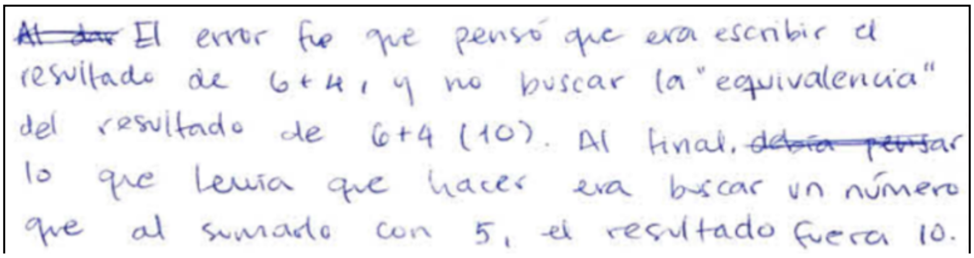
Elementos atendidos por las FM, uso de la evidencia y conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados

	Elementos		Uso de evidencia	Dominios y subdominios MTSK	
Niña	Algebraicos	Otros		MK	PCK

Nota. Los números entre paréntesis corresponden a aquellas FM que realizaron una atención parcial; solo se centraron en una de las comprensiones sobre el signo igual evidenciados por David.

De manera general, la mayoría de las FM atendió a los elementos algebraicos relevantes involucrados en las respuestas de las niñas: los significados operacional o relacional del signo igual. A continuación, profundizamos en las descripciones de las respuestas dadas por cada niña.

En relación con la atención a las comprensiones evidenciadas de David (operacional y relacional-expresiones equivalentes), 13 FM atendieron a las dos comprensiones, mientras que cinco FM solo a la comprensión operacional, dos solo a la estrategia relacional-equivalencias y una no atendió a ninguna de las comprensiones. Por ejemplo, en la Figura 4 presentamos la respuesta de A09[4].



~~Al dar~~ El error fue que pensó que era escribir el resultado de 6+4, y no buscar la "equivalencia" del resultado de 6+4 (10). Al final, ~~debía pensar~~ lo que tenía que hacer era buscar un número que al sumado con 5, el resultado fuera 10.

Figura 4. Respuesta de A09 a la respuesta de David

En la respuesta anterior (véase Figura 4) es posible evidenciar cómo A09 atendió a la comprensión operacional ("pensó que era escribir el resultado de 6+4") y relacional-equivalencias ("buscar un número que al sumarlo con 5, el resultado fuera 10"). Por otra parte, todas las FM que atendieron, al menos, a una de las comprensiones de David proporcionaron evidencias que permiten complementar sus descripciones. Un hallazgo significativo es que en la mayoría encontramos interpretaciones, aun cuando solo pedíamos descripciones detalladas. Estas interpretaciones son sobre una de las comprensiones de David, o bien, de ambas. Por ejemplo, en la Figura 4 es posible identificar que A09 razona y entrega significados a la comprensión de David ("y no buscar la equivalencia", "lo que tenía que hacer era…").

[4] Hemos usado la etiqueta Pi, donde i=1, 2, 3…21 para garantizar el anonimato de las participantes.

Respecto al conocimiento movilizado para atender a la comprensión de David, es posible evidenciar que la mayoría de las descripciones de las FM pueden ser asignadas a ambos dominios: conocimiento del contenido (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK). Específicamente, aquellos que solo atendieron a la comprensión de David (cuatro FM) tienden a centrarse en el MK, específicamente proporcionan evidencias del conocimiento de los temas (KoT) (centrados en los procedimientos). Por otra parte, todas las FM que interpretaron presentan evidencias del PCK, específicamente del conocimiento del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y, en menor medida, sobre KMT. También hay evidencias en gran parte de las FM de KoT. Relativo al PCK, en la Figura 4 es posible evidenciar como A09 proporcionó evidencias de KFLM (“el error fue que pensó”, “y no buscar la equivalencia”). Esta interpretación se basa en que la participante se refiere a los significados del signo igual y a los errores que tienen estudiantes al enfrentarse a estos.

Con respecto a la comprensión “relacional-expresiones equivalentes” sobre el signo igual evidenciada en la respuesta de Teo, dieciocho FM atendieron a ella, mientras que tres no. Por ejemplo, en la Figura 5 se presenta la respuesta de A08, en la cual atendió a la manera en que Teo relaciona las expresiones a ambos lados del signo igual.

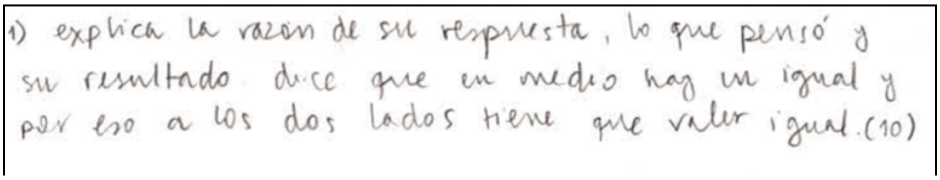

1) explica la razon de su respuesta, lo que pensó y su resultado dice que en medio hay un igual y por eso a los dos lados tiene que valer igual (10)

Figura 5. Respuesta de A08 a la respuesta de Teo

La mitad de las FM proporcionó evidencias a sus descripciones, tal como lo hace A08 con la expresión “dice que…” (véase Figura 5). Por otra parte, dos tercios de estas FM realizan interpretaciones sobre el razonamiento de Teo. Por ejemplo, A03 interpreta la respuesta del niño con expresiones tales como “comprende”. En la Figura 6 se observa esta respuesta.

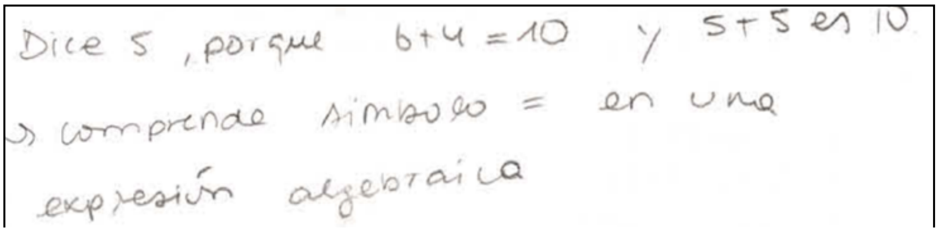

Dice 5, porque 6+4 = 10 y 5+5 es 10
→ comprende símbolo = en una
expresión algebraica

Figura 6. Respuesta de A06 a la respuesta de Teo

Respecto a qué conocimientos se movilizan en las *atenciones* a la respuesta de Teo, encontramos que las descripciones de 12 FM pueden ser asignadas a los dominios MK y PCK. Más concretamente, aquellas FM que solo atendieron a la comprensión de Teo dan evidencias, principalmente, de KoT y no presentan evidencias de interpretaciones. En relación con las FM que interpretan el razonamiento de Teo, todas dan evidencias de KFLM y, en mucha menor medida, evidencias de KoT. Por ejemplo, en la respuesta de A03, quien interpretó, es posible identificar cómo se dan evidencias sobre las formas en que Teo interactúa con la igualdad numérica (KFLM) al indicar que “comprende símbolo = en una expresión algebraica”.

En el caso de la comprensión “relacional-simplificación de cálculos” del signo igual evidenciada por Susana, 16 FM atienden a la comprensión, mientras que cinco no atendieron a esta. En la Figura 7 presentamos la respuesta de A18, quien atiende a las maneras en que la niña simplifica los cálculos (“Susana al 6+4 le quita 1 a 6 y se lo traspasa al 4 para que quede 5+5, al igual que al otro lado”).

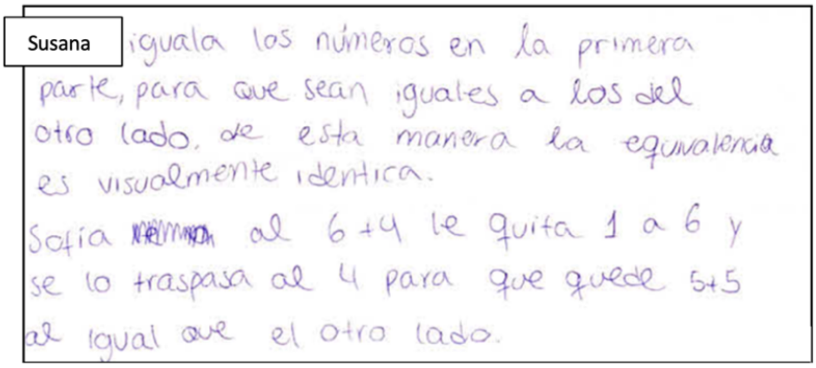


Figura 7. Respuesta de A18 a la respuesta de Susana

Todas las FM que atendieron a la comprensión de Susana proporcionan evidencias que apoyan sus descripciones, tal como lo realiza A18 (véase Figura 7). Otro hallazgo importante, y al igual que en las atenciones a las comprensiones de David y Teo, hay FM que realizan interpretaciones. Específicamente, la mitad de estas FM interpretan con base en la comprensión sobre el signo igual de Susana. Por ejemplo, la respuesta de A18 da cuenta de esto al señalar “Susana iguala los números en la primera parte…”.

En relación con los conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados en las atenciones a esta respuesta, nueve FM dan evidencias de ambos dominios del MTSK: MK y PCK. Particularmente, aquellas FM que atendieron a la comprensión sobre el signo igual evidenciada por Susana y no interpretaron, la mitad proporciona evidencias de KoT al describir los procedimientos empleados y se evidencian algunos ejemplos de KPM (justificar ideas matemáticas). Por otra parte, todas las FM que interpretaron movilizaron un conocimiento que se puede asignar al KFLM y casi todos al KoT.

Interpretaciones de las comprensiones

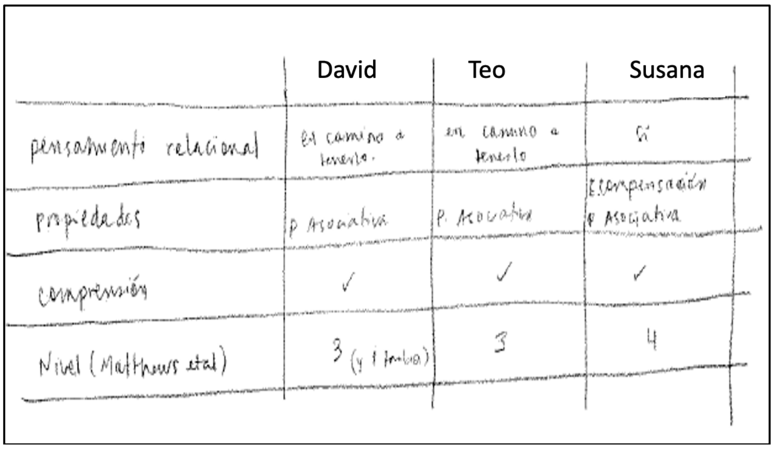
Con relación a la interpretación evidenciada por las FM al responder a la pregunta ¿Qué podemos decir sobre la comprensión de cada niña?, la Tabla 3 muestra los elementos interpretados por las FM, el uso de la evidencia y los conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados al considerar el pensamiento algebraico de las niñas.

Tabla 3
Elementos interpretados por las FM, uso de la evidencia y conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados

	Elementos		Uso de evidencia	Dominios y subdominios MTSK	
Niño	Algebraicos	Otros		MK	PCK
David	13 (5)	3	4 (0)	KoT: 10	KFLM: 21 KMT: 11
Teo	21	0	9	KoT: 9	KFLM: 21 KMT: 12
Susana	15	6	8	KoT: 15	KFLM: 21 KMT: 9

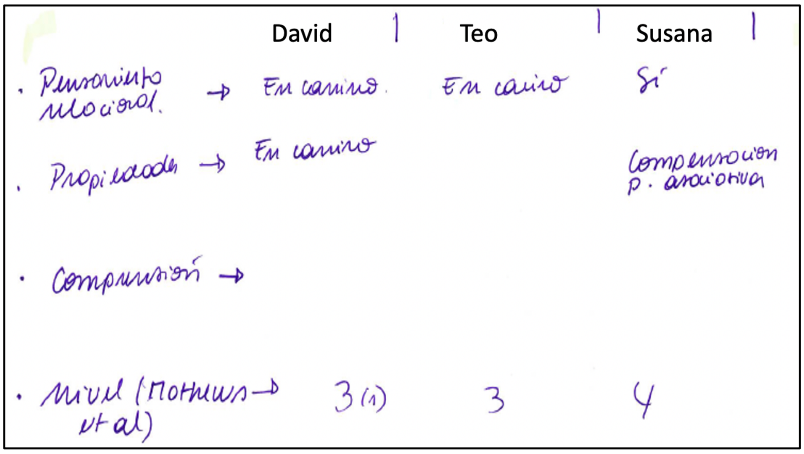
Nota. Los números entre paréntesis corresponden a aquellos que realizaron una interpretación parcial; solo se centraron en una de las comprensiones seguidas por David.

Las respuestas de las FM exhiben que la mayoría de estas interpretó los razonamientos de las niñas con base en la comprensión sobre el signo igual evidenciada. Todas las FM interpretan la comprensión relacional evidenciada por Teo en su respuesta, mientras que 18 lo hacen al considerar las comprensiones operacional y relacional sobre el signo igual evidenciada por David (13 FM interpretan ambas comprensiones, mientras que cinco interpretan sobre una de las comprensiones). Por otra parte, 15 FM interpretaron a la comprensión relacional evidenciada en la respuesta de Susana. Un hallazgo importante es que, en la respuesta de dos FM, en A08 y A20, encontramos unas tablas sobre la cual apoyaron sus razonamientos para otorgarle sentido a las respuestas de las niñas (véase Figuras 8 y 9).



	David	Teo	Susana
pensamiento relacional	en camino a tenerlo.	en camino a tenerlo	Sí
propiedades	p Asociativa	P. Asociativa	Ecompensación p Asociativa
comprensión	✓	✓	✓
Nivel (Matthews et al)	3 (y 1 [illegible])	3	4

Figura 8. Respuesta de A08

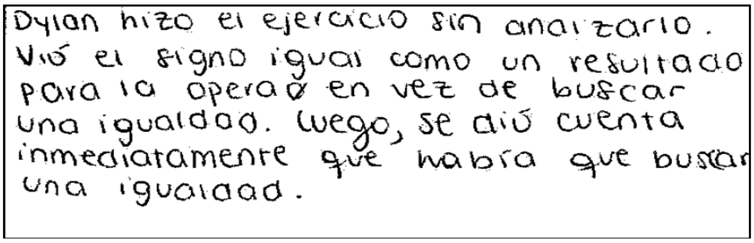


	David	Teo	Susana
· Pensamiento relacional →	En camino.	En camino	Sí
· Propiedades →	En camino		Compensación p. asociativa
· Comprensión →			
· Nivel (Matthews et al) →	3 (1)	3	4

Figura 9. Respuesta de A20

En las producciones anteriores es posible identificar la manera en que ambas participantes relacionan los razonamientos de las niñas con la idea de pensamiento relacional, propiedades de las operaciones, comprensión del signo igual y los niveles de conocimiento del signo igual como un indicador de igualdad matemática propuestos por Matthews et al. (2012). Estos temas fueron abordados en las sesiones del curso y constituyen una forma de entender cómo ambas FM atribuyen significado a las respuestas de las niñas.

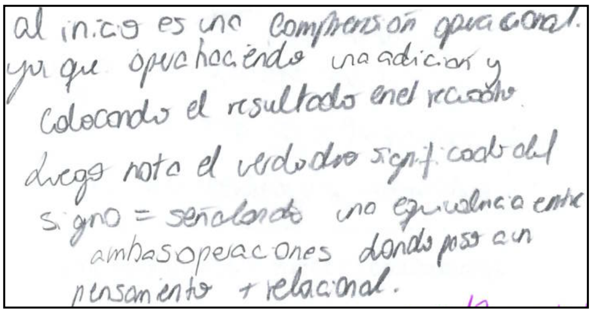
Un elemento común en las respuestas de las FM es la escasez de evidencias que apoyan sus interpretaciones; cuatro FM proporcionan evidencias para apoyar las interpretaciones a ambas comprensiones evidenciadas en las respuestas de David, mientras que nueve y ocho FM emplean evidencias al interpretar los significados relacionales de Teo y Susana, respectivamente. Por ejemplo, en la Figura 10 presentamos la respuesta de A03, quien interpreta el razonamiento de David, pero no proporciona evidencias.



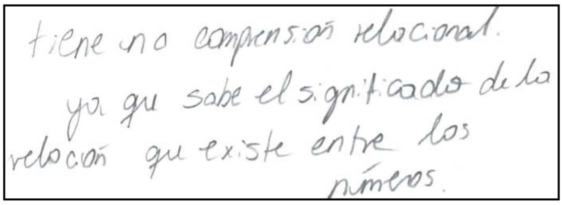
Dylan hizo el ejercicio sin analizarlo. Vió el signo igual como un resultado para la operació en vez de buscar una igualdad. Luego, se dió cuenta inmediatamente que habría que buscar una igualdad.

Figura 10. Respuesta de A03

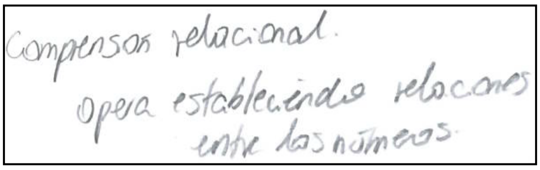
Los conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizado por las FM muestran presencia predominante del conocimiento didáctico del contenido (PCK), principalmente a través del conocimiento del aprendizaje matemático (KFLM), seguido en frecuencia del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Por ejemplo, en la Figura 11 presentamos las interpretaciones que realiza A13 a las respuestas brindadas por las tres niñas.


al inicio es una comprensión operacional. ya que opera haciendo una adición y colocando el resultado en el recuadro. luego nota el verdadero significado del signo = señalando una equivalencia entre ambas operaciones dando paso a un pensamiento + relacional.

David


tiene una comprensión relacional. ya que sabe el significado de la relación que existe entre los números.

Teo


Comprensión relacional. Opera estableciendo relaciones entre los números.

Susana

Figura 11. Interpretaciones realizadas por A13

En las interpretaciones realizadas por la participante, es posible identificar cómo ella centra su atención en cómo las niñas piensan y construyen conocimiento sus estudiantes al abordar las igualdades numéricas. Por ejemplo, al interpretar los razonamientos de las tres niñas, A13 otorga significado a las comprensiones sobre el signo igual usando la idea de "comprensión relacional" para la respuesta de Teo y Susana, y "comprensión operacional" y "pensamiento relacional" para la respuesta de David. En las respuestas de las FM también hay presencia del conocimiento del contenido (MK) a través del conocimiento de los temas (KoT).

Decisiones con base en las estrategias

Analizamos las decisiones de las FM al responder a la pregunta "Supón que eras la profesora de ese grupo de estudiantes, ¿qué problemas o situaciones propondrías a continuación?". A diferencia de las preguntas anteriores, las cuales pedían atender e interpretar con base en las comprensiones de cada niña, el planteamiento de esta pregunta es de una naturaleza más general; no solicitamos una decisión para cada niña. Nuestro interés estaba puesto en una primera aproximación a la toma de decisiones por parte del grupo de FM. De manera general, al decidir sobre qué problemas o situaciones propondrían a continuación, ninguna de las FM refiere a alguna niña en particular, así como tampoco proporcionan evidencias del razonamiento de las niñas en sus decisiones. Sin embargo, y tal como lo presentamos en la Tabla 4, hemos identificado en las decisiones algunos elementos algebraicos específicos que fueron considerados por las FM, así como los conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados.

Tabla 4
Elementos considerados por las FM al decidir y conocimiento matemático para la enseñanza movilizado

Elementos algebraicos específicos considerados	Frecuencia
Signo igual y propiedades de las operaciones	7
Solo signo igual	7
Solo propiedades de las operaciones	2
Otros elementos	4
Conocimiento matemático para la enseñanza	
Conocimiento del contenido (MK) – Conocimiento de los temas (KoT)	1
Conocimiento didáctico del contenido (PCK) –Conocimiento matemático de la enseñanza (KMT)	20
Conocimiento didáctico del contenido (PCK) –Conocimiento del aprendizaje matemático (KFLM)	3

De manera general, 16 FM deciden con base en uno o más de los elementos algebraicos específicos que se involucran en las respuestas de las niñas (signo igual y propiedades de las operaciones). Específicamente, siete FM consideran al signo igual y las propiedades de las operaciones en sus decisiones, tal como lo mostramos en la respuesta de A05 (véase Figura 12).

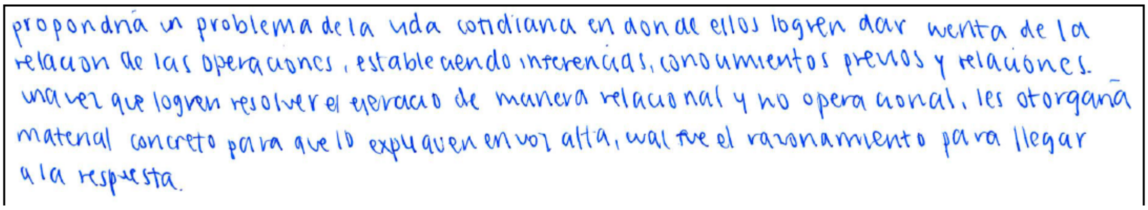

propondría un problema de la vida cotidiana en donde ellos logren dar cuenta de la relacion de las operaciones, estableciendo inferencias, conocimientos previos y relaciones.
una vez que logren resolver el ejercicio de manera relacional y no operacional, les otorgaría material concreto para que lo expliquen en voz alta, cual fue el razonamiento para llegar a la respuesta.

Figura 12. Decisión de A05

En la respuesta de A05 (Figura 12) es posible identificar que la FM considera dos decisiones. En la primera de ellas “propondría un problema de la vida cotidiana en donde ellos logren dar cuenta de la relación de las operaciones, estableciendo inferencias, conocimientos previos y relaciones” y evidenciamos una consideración de las relaciones numéricas involucradas en las operaciones. Adicionalmente, en la segunda decisión hay una consideración al signo igual, al señalar que “una vez que logren resolver el ejercicio de manera relacional y no operacional (…)”.

Por otra parte, siete FM consideran solo al signo igual al decidir, mientras que dos FM consideran exclusivamente a las propiedades de las operaciones. Hay cuatro FM que deciden sobre otros elementos, como el clima de aula, la motivación o con elementos referidos a la enseñanza de la matemática generales que no se relacionan con lo involucrado en los vídeos, como lo mostramos en la respuesta de A14 en la Figura 13, quien considera la incorporación del juego, motivación y trabajo colaborativo.

trabajaría con juegos para incentivar la motivación de los alumnos en torno a las expresiones algebraicas y, luego, haría un trabajo colaborativo donde grupos de alumnos discutirían acerca de cómo llegar al resultado de una ecuación e incógnita.

Figura 13. Decisión de A14

Con respecto al conocimiento matemático para la enseñanza movilizado al decidir, predomina el conocimiento didáctico del contenido (PCK). Específicamente, todas las FM dan cuenta del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y tres FM al conocimiento del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Por ejemplo, en la respuesta de A16 (véase Figura 14) evidenciamos que la FM moviliza un MKT ("enfocaría la clase en actividades que trabajen las relaciones básicas y comparativas") y KFLM ("son los alumnos quienes deben explicarme su razonamiento en cuanto a cómo llegaron al resultado, qué pensaron (…)") al decidir.

Enfocaría la clase en actividades que trabajen las relaciones básicas y comparativas. Teniendo en cuenta que son los alumnos quienes deben explicarme su razonamiento en cuanto a cómo llegaron al resultado, qué pensaron o que sean ellos quienes descubran su ~~error~~ error.

Figura 14. Decisión de A16

Por otra parte, encontramos solo una evidencia del conocimiento del contenido (MK) movilizado en la respuesta de A01, específicamente del conocimiento de los temas (KoT). En la Figura 15 presentamos la respuesta de la FM.

Yo pondría una operación de resta para que se comprenda que si hago eso mismo de sumar 1 a un dígito y restar 1 al otro dígito no llegaré al mismo resultado porque, las distancias no serán las mismas.

Figura 15. Decisión de A01

En la respuesta de la participante evidenciamos un conocimiento profundo del contenido involucrado en la igualdad numérica presente en el vídeo ($6+4=\square+5$), específicamente sobre las definiciones, propiedades y fundamentos en la frase "que si hago eso mismo de sumar 1 a un dígito y restar 1 al otro dígito no llegaré al mismo resultado" involucra una consideración de la compensación involucrada en la situación, que corresponde a un conocimiento del tema matemático asociado.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este artículo nos centramos en abordar una práctica profesional crucial en la formación inicial de docentes de primaria: responder al pensamiento algebraico de las estudiantes. En los últimos años, la comunidad científica ha manifestado interés por destacar la importancia de que las docentes centren la enseñanza en las ideas algebraicas de las estudiantes, para tomar decisiones con evidencias (Walkoe et al., 2022). Dado lo anterior, en este artículo exploramos cómo un grupo de 21 FM interactúo con el pensamiento algebraico de estudiantes de 9-10 al resolver igualdades numéricas. Este estudio constituye una importante contribución pues a pesar de que no existe consenso sobre cómo entender el pensamiento algebraico en la educación primaria (Kieran, 2022), nuestro estudio permite aproximarnos a maneras de entender esos conocimientos matemáticos para la enseñanza del álgebra que, potencialmente, podría apoyar a la formación inicial docente en matemática.

En este estudio, las perspectivas conceptuales adoptadas nos han permitido ilustrar las maneras en que FM consideran y dan sentido al pensamiento algebraico de niñas en escolaridad primaria. En el caso del *noticing*, este constructo nos permitió identificar cómo las FM consideran a las estrategias de las niñas (elementos algebraicos relevantes considerados y el uso de la evidencia). Nuestros resultados muestran que este grupo de FM emplea escasamente la evidencia al atender, interpretar y decidir con base en las estrategias de las niñas, pero hay una consideración importante a los elementos algebraicos relevantes involucrados en las respuestas de las niñas; las comprensiones sobre el signo igual. Esto es relevante pues, generalmente, la investigación sobre el conocimiento sobre la enseñanza del álgebra ha estado centrada en documentar las dificultades que tienen las profesoras al interactuar con contenidos algebraicos (Stephens, 2006). La consideración de los elementos algebraicos relevantes permite destacar que las FM evidencian una sensibilidad hacia el pensamiento algebraico de sus estudiantes, ya que prestan atención a las relaciones que estos construyen, más que a procedimientos matemáticos aislados y mecánicos (Blanton et al., 2018). Por tanto, estos resultados son coincidentes con que las de las profesoras a las respuestas de sus estudiantes puede ser desarrollada mediante actividades cuidadosamente planificadas (Mellone et al., 2020)

Por otra parte, el MTSK nos permite dar una mirada más profunda a cómo FM interactúan con el pensamiento algebraico de niñas, específicamente al movilizar conocimientos matemáticos específicos para la enseñanza. Los principales resultados muestran que al atender e interpretar encontramos evidencias del conocimiento del contenido (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK), lo que difiere de los propuesto por Copur-Gencturk y Tolar (2022), quienes indican que las habilidades del *noticing* de atender e interpretar se asocian más fuertemente con el conocimiento didáctico del contenido que con el conocimiento matemático. Esta diferencia podría entenderse por la especificidad que involucra enseñar álgebra en los primeros cursos de la educación primaria. Por otra parte, cuando las participantes deciden, predomina una movilización del PCK, específicamente el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. Recientes investigaciones (por ejemplo, Hino y Funahashi, 2022) muestran que la toma de decisiones de profesoras se basa en el conocimiento del contenido matemático y en el conocimiento pedagógico del contenido. Consideramos que la predominancia del PCK al momento de decidir tiene relación con la forma en que se les planteó la pregunta a las FM: proponer una tarea o problema.

Un elemento importante que se desprende de nuestra investigación es que, si bien las FM debían describir de manera detallada las estrategias de las niñas, es difícil separar la descripción de la interpretación, tal como lo señalan diferentes autoras (Badillo y Fernández, 2018; Jacobs et al., 2010; Llinares, 2019). Los ejemplos de interpretación que emergen de las respuestas de las FM a la primera pregunta (Describe en detalle qué hizo cada estudiante al responder a la igualdad numérica) podrían ser consideradas como espontáneas, puesto que no pedimos realizar este tipo de razonamiento.

Esta investigación busca contribuir a las maneras en que FM consideran el pensamiento algebraico de niñas en escolaridad primaria, lo que es considerado una tarea central del profesor (Larison et al., 2022; Walkoe et al., 2022). Es importante reconocer que la naturaleza de la clase de matemáticas es compleja y dinámica, lo que supone un gran desafío al momento que profesoras tomen decisiones que permitan enriquecer el pensamiento algebraico de sus estudiantes pues deben filtrar información relevante (Llinares, 2019; Sherin y Star, 2011). El análisis de vídeos constituye una aproximación para que FM aprendan a utilizar el pensamiento de las estudiantes para tomar decisiones informadas (Barnhart y van Es, 2015) y desarrollen sus habilidades de atender, interpretar y decidir con base en las estrategias de niñas (Lee, 2021). Si bien el análisis de vídeo como metodología para trabajar con FM no es condición necesaria para hacer inferencias sobre el aprendizaje de las estudiantes (Erickson, 2011), el tipo de *noticing* empleado en esta investigación, así como el modelo del MTSK podrían entregar un marco interesante para orientar a FM sobre cómo atender, interpretar y decidir. Lo anterior también puede servir para el desarrollo profesional continuo de docentes a lo largo de las carreras profesionales, ya que aprenden a aprender a partir del razonamiento de sus estudiantes (Carpenter et al., 2003; Sherin et al., 2011).

En relación con las limitaciones del estudio, el análisis a las respuestas escritas de las FM varía con respecto a lo que ocurren en sus salas de clases (Barnhart y van Es, 2015), por lo que convendría considerar para otras investigaciones respuestas orales de las profesoras para capturar una mayor profundidad y variedad de conocimientos referidos a la enseñanza del álgebra escolar de los cuales dispondrían las profesoras. Sin embargo, consideramos que esta forma de analizar sus respuestas constituye una aproximación que permite arrojar información sobre el estado del conocimiento del profesor de primaria sobre pensamiento algebraico que ha sido poco explorado (Pincheira y Alsina, 2021; Sosa y Vasco, 2022). Además, identificamos como limitación el tipo de vídeo presentado, que solo ilustra uno de los aspectos asociados a la aritmética generalizada: el signo igual. Convendría, para próximos estudios, profundizar en otros aspectos.

Entre las líneas de investigación abiertas que quedan tras el estudio, consideramos que convendría profundizar en cómo se relacionan las tres habilidades del *noticing* con los dominios y subdominios del MTSK a través de los diferentes enfoques al pensamiento algebraico (por ejemplo, equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones; y pensamiento funcional). Lo anterior permitiría aportar al estado del conocimiento del profesor de primaria cuando enseña álgebra.

Agradecimientos

Esta investigación se ha desarrollado en el marco del Proyecto FONDECYT Iniciación 11220843. Además, agradecemos el financiamiento otorgado por ANID/PIA/Fondos Basales para Centros de Excelencia FB0003 y a la Red MTSK auspiciada por la AUIP.

Referencias

Badillo, E. y Fernández, C. (2018). Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: análisis del conocimiento y/o competencia docente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, A. P., J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 66-80). SEIEM.

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education*, *45*, 83-93. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.09.005

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-*

to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 27-49). Springer.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Heinemann.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Choy, B. H. y Dindyal, J. (2020). Teacher noticing, mathematics. En Peters, M. (Ed.), *Encyclopedia of Teacher Education* (pp. 1-5). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1179-6_241-1

Copur-Gencturk, Y. y Tolar, T. (2022). Mathematics teaching expertise: A study of the dimensionality of content knowledge, pedagogical content knowledge, and content-specific noticing skills. *Teaching and Teacher Education*, *114*, 103696. https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103696

Di Martino, P., Mellone, M. y Ribeiro, M. (2019). Interpretative knowledge. En Lerman, S. (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 1-5). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1

Erickson, F. (2011). On noticing teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 17-34). Routledge.

Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S. H. D. y Leonard, S. N. (2022). Design-based research in mathematics education: Trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal*, *35*(3), 635-658. https://doi.org/10.1007/S13394-021-00407-5/FIGURES/11

Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education*. Harvard Education Press.

Hino, K. y Funahashi, Y. (2022). Teachers' guidance of students' focus toward lesson objectives: How does a competent teacher make decisions in the key interactions? *ZDM – Mathematics Education*, *54*(2), 343-357. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01345-7

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(3), 231-257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). A learning trajectory as a scaffold for pre-service teachers' noticing of students' mathematical understanding. International *Journal of Sciences and Mathematics Education, 18*, 529-548. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 258-288.

Jacobs, V. R., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Jacobs, V.R., Empson, S.B., Jessup, N.A., Dunning, A., Pynes, D., Krause, G. y Franke, T. (2024). Profiles of teachers' expertise in professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27, 295-324. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09558-z

Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. M. y Contreras, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). 10 años de camino* (pp. 207-222). Dykinson.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM - Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/S11858-022-01435-6/FIGURES/4

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in Mathematics Education* (pp. 181-198). Springer.

Larison, S., Richards, J. y Sherin, M. G. (2022). Tools for supporting teacher noticing about classroom video in online professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3,* 139-161. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09554-3

Lee, M. Y. (2021). Improving preservice teachers' noticing skills through technology-aided interventions in mathematics pedagogy courses. *Teaching and Teacher Education*, *101*, 103301. https://doi.org/10.1016/J.TATE.2021.103301

Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, *14*(18), 30-43.

Marquardt, A., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M. y Matthews, P. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM Mathematics Education, 54,* 1199-1213. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y

Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K. y Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures eeveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 316-350. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.3.0316

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P. y Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education, 22*(2), 154-167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Ministerio de Educación de Chile [Mineduc]. (2012). *Bases Curriculares. 1º a 6º básico*.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: A systematic review from the MKT perspective. *Mathematics*, *9*(20), 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M.C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(1), 149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Pinto, E., Piñeiro, J. L., Cortés, C. y Martínez-Videla, M. V. (2024). La toma de decisiones de futuros maestros de primaria al interactuar con el pensamiento algebraico de niños. *Pensamiento Educativo*, *61*(2), 11. https://doi.org/10.7764/PEL.61.2.2024.3

Prediger, S., Gravemeijer, K. y Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM – Mathematics Education, 47*(6), 877-891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1151-1167. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x

Sherin, M. G. (2007). The development of teachers' professional vision in video clubs. En R. M. Baecker, D. Fono y P. Wolf (Eds.), *Video research in the learning sciences* (pp. 397-410). Routledge.

Sherin, M. G. y Star, J. R. (2011). Reflections on the study of teacher noticing: Seeing through teachers' eyes. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 66-78). Routledge.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (pp. 3-14). Routledge.

Sosa, L. y Vasco, D. (2022). Conocimiento especializado del profesor que enseña álgebra. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). 10 años de camino* (pp. 123-134). Dykinson.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal* *of Mathematics Teacher Education*, *9*(3), 249-278. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9000-1

Van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 155-176. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9130-3

Walkoe, J., Walton, M. y Levin, M. (2022). Supporting teacher noticing of moments of algebraic potential. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *32*(3), 271-286. https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.271

Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R. y Kaiser, G. (2023). Teacher noticing in mathematics education: A review of recent developments. *ZDM – Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x

Xie, S., Cai, J. (2022). Fifth graders' learning to solve equations: The impact of early arithmetic strategies. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1169-1179. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01417-8

Eder Pinto
Universidad de O'Higgins, Chile
eder.pinto@uoh.cl

Juan Luis Piñeiro
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
juanluis.pineiro@umce.cl

Camila Cortés
Grupo SM, Chile
camilact@gmail.com

María Victoria Martínez-Videla
Universidad de O'Higgins, Chile
marivi.martinez@uoh.cl

Recibido: diciembre, 2023. Aceptado: septiembre, 2024
doi: 10.30827/pna.v18i5.29823

ISSN: 1887-3987

How do Prospective Elementary School Teachers Attend to, Interpret, and Decide Based on Children's Algebraic Thinking? The Case of Numerical Equalities

Eder Pinto, Juan Luis Piñeiro, Camila Cortés, and M.ª Victoria Martínez Videla

Responding to students' mathematical thinking is an essential teaching practice that drives high-quality education. This article explores how 21 future primary school teachers interact with students' algebraic thinking when solving numerical equalities, within the context of video-based course. To do so, we aim to address two research questions: (a) How do future teachers attend to, interpret, and decide based on students' strategies? and (b) What specialized mathematical knowledge for teaching school algebra do future teachers mobilize when attending to, interpreting, and deciding based on students' strategies? Conceptually, we situate ourselves within the perspectives of *noticing* and the mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model to investigate the knowledge future teachers demonstrate and use when considering children's algebraic thinking. Participants engaged in a video-based course focusing on algebraic teaching and observed a video illustrating the reasoning of three students solving 6+4=□+5. We analyze how participants attend to, interpret, and decide based on children's responses, considering relevant algebraic elements, the use of evidence, and domains/subdomains of MTSK model. The primary findings indicate that participants consider various pertinent algebraic elements in children's responses, although the use of evidence is limited. Moreover, we identify different types of mathematical knowledge used during interactions with children's algebraic thinking. Specifically, the results demonstrate that in attending and interpreting, there is evidence of mathematical content knowledge (MK) and pedagogical content knowledge (PCK), while in decision-making, PCK predominates, specifically in knowledge of mathematics teaching.