

# DOBLE MIRADA DEL FORMADOR DE PROFESORADO DE MATEMÁTICAS: OPORTUNIDAD PARA IDENTIFICAR SU CONOCIMIENTO

Macarena Reyes-Bravo, M.<sup>a</sup> Isabel Pascual, Luis C. Contreras y Soledad Estrella

*Presentamos un estudio acerca del conocimiento de ocho formadores de profesores de matemática, participantes en un grupo de Lesson Study para la formación de profesorado de primaria, en el ámbito del sentido numérico. El objetivo fue caracterizar los conocimientos de estos formadores que surgen en episodios en los que sus acciones consideran tanto a sus futuros profesores como a los alumnos hipotéticos (doble mirada). Se analizaron fragmentos en un proceso top-down y bottom-up. Los episodios de doble mirada mostraron ser útiles para identificar elementos del conocimiento del formador, permitiendo diferenciarlo del conocimiento propio de un profesor, aunque asociados entre sí.*

*Términos clave:* Doble mirada; Formadores de profesorado de matemáticas; Lesson Study; Profesorado de primaria

Double view of the mathematics teacher educator: opportunity to identify their knowledge

*We present a descriptive study about the knowledge of eight mathematics teacher educators in the context of a Lesson Study group, in the field of number sense, for primary teacher training. The objective is to identify elements of knowledge through the double perspective of the educators, when their practices consider both their future teachers and primary school students (double-look). Fragments were analyzed in a top-down and bottom-up process. The double-look scenarios appear useful to identify elements of the educator's knowledge, of a different nature from that of a teacher, although associated with it.*

*Keywords:* Double look; Lesson Study; Mathematics teacher educators; Primary teachers

Reyes-Bravo, M., Pascual, M. I., Contreras, L. C. y Estrella, S. (2024). Doble mirada del formador de profesorado de matemáticas: oportunidad para identificar su conocimiento. PNA, 18(5), 467-493. <https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29431>

### Dupla visão do formador de professores de matemática: oportunidade de identificar seus conhecimentos

*Apresentamos um estudo descritivo sobre o conhecimento de oito formadores no contexto de um grupo de Estudo de Aulas, na área do sentido numérico, para formação de professores primários. O objetivo é identificar elementos de conhecimento através da dupla perspectiva dos formadores, quando suas práticas consideram tanto seus futuros professores quanto os alunos do ensino fundamental (dupla visão). Os fragmentos foram analisados em um processo top-down e bottom-up. Os cenários de duplo olhar parecem úteis para identificar elementos do conhecimento do formador, de natureza diferente do conhecimento do professor, embora a ele associados.*

**Palavras-chave:** Formadores de professores de matemática; Olhar duplo; Estudo da lição; Professores primários

Las últimas tres décadas han sido cruciales para el avance en la comprensión del conocimiento del profesor en general, desde los influyentes trabajos de Shulman (1986, 2005), y del profesorado de matemáticas en particular. Aportes notables incluyen las contribuciones de Ball (2008), Carrillo et al. (2018) y Godino (2009). En años recientes, la investigación en este ámbito ha evolucionado progresivamente abordando el conocimiento de las personas responsables directas de la formación de profesores que enseñarán matemáticas (Beswick y Goos, 2018), a quienes denominaremos formadores.

Este constructo comprende aquellos profesionales que proporcionan formación a futuros profesores y a aquellos en servicio activo, tanto en el nivel de pregrado como en el posgrado (Lanier y Little, 1986). En adelante, nos referiremos al formador de profesores como MTE utilizando estas siglas.

Como han señalado Reyes-Bravo et al. (2023), el interés creciente por comprender la estructura y organización del conocimiento del MTE es patente por su inclusión en múltiples foros de discusión, como las diferentes aportaciones en los monográficos de *Journal of Mathematics Teacher Education* —en especial el monográfico de 2018—, o *ZDM* —monográfico de 2014—, en los *Handbook* especializados, como el *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (de 2008 y 2020), en los *ICMI Studies* o en los *Working Groups* de PME. En el camino hacia la determinación de un modelo para comprender y estructurar este conocimiento se ha asumido que, al igual que las matemáticas que han de aprender los estudiantes es una parte del conocimiento del profesor de matemáticas, una parte del conocimiento del MTE ha de ser el conocimiento del profesorado que va a formar, a modo de metaconocimiento (Beswick y Chapman, 2012). Lo que queda por determinar es qué otros elementos componen la estructura de ese conocimiento. Incluso asumiendo que una componente imprescindible

dentro de este conocimiento, que podría entenderse como común a profesores y MTE, es la relativa a las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje, se ha puesto en discusión la diferente naturaleza que ese conocimiento ha de tener en cada uno de ellos o sobre la forma diferente en que es puesto en juego (Lloyd, 2006).

Una vía para intentar comprender la estructura y organización del conocimiento del MTE está siendo la búsqueda de características diferenciales entre conocimientos que pueden ser propios tanto de MTE como de profesores (Ball, 2008; Jaworski, 2008; Zopf, 2010). Así, Zaslavsky y Leikin (2004) han sugerido que una posible diferenciación en las formas que un determinado conocimiento, compartido por profesores y formadores, puede radicar en quién se considera aprendiz en cada caso, es decir, al que va dirigida la atención del profesor, lo que hemos llamado “la mirada” (Reyes-Bravo et al., 2023).

La mirada del profesor se centra en el estudiante; la del MTE puede centrarse, tanto en el estudiante como en el futuro profesor (FP), cuando esto ocurre hablamos de “doble mirada”. Esta idea de doble mirada integra a quién va dirigido el proceso de enseñanza (en este caso estudiante y futuro profesor) y el contenido que desarrolla (escolar o de formación de profesorado). Los episodios de doble mirada se vislumbran como una vía útil para avanzar de forma empírica en la determinación del conocimiento del MTE.

En este estudio abordamos la caracterización de conocimiento de formadores de profesorado de matemáticas de primaria que surgen en episodios de doble mirada, analizando fragmentos de la transcripción de las discusiones entre MTE de primaria acerca de un diseño e implementación de actividades formativas en el contexto de *Lesson Study* que promueve el sentido numérico de la división entre números naturales. Este contexto nos parece especialmente relevante pues el conocimiento que manifiestan los formadores emerge al elaborar colaborativamente el diseño y al reflexionar sobre su puesta en práctica. De estos debates hemos seleccionado fragmentos en los que se evidencia esa doble mirada, analizando su utilidad para responder a la pregunta de cómo la doble mirada del MTE caracteriza distintos elementos de su conocimiento.

## REFERENTES TEÓRICOS

La literatura sobre el MTE ha definido su conocimiento como un metaconocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. En esa línea, aunque los avances de investigación empírica en el campo son escasos, han arrojado valiosa claridad respecto a dos escenarios en los que fluctúa su discurso. El primero de ellos se identifica con la Formación Inicial Docente (FID), mientras que el segundo se refiere a la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria.

Se podría asumir que el grado de madurez alcanzado por diferentes modelos de conocimiento del profesor de matemáticas en las últimas décadas ha servido

como base en las investigaciones sobre el conocimiento del MTE (Abell et al., 2009; Chick y Beswick, 2018). Una característica compartida que se observa en la mayoría de estas contribuciones es la consideración del MTE en su rol de profesor, razón por la cual es útil la diferenciación entre conocimiento del contenido (CK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK) propuesta por Shulman (1986). Así, entendemos que el MTE debe, como en el caso del profesor, conocer lo que enseña y cómo enseñarlo. En ese sentido, es crucial cuestionarse sobre cuál es el contenido de la FID (que llamaremos C') para proponer una reconfiguración de los elementos que lo componen.

Diversos autores han explorado en la FID, la idea de definir los subdominios y categorías que podrían formar parte del conocimiento del contenido (C'K) y del conocimiento didáctico de dicho contenido (PC'K). Algunos han aportado desde la reflexión teórica y otros, han levantado evidencias empíricas (Contreras, 2021; Escudero-Ávila et al., 2021; Masingila et al., 2018; Pascual et al., 2021; Ponte, 2011; Zopf, 2010), pero en todos aquellos se asume que, así como el conocimiento matemático es un elemento clave del conocimiento del profesorado de matemática, el conocimiento del profesor es una parte constitutiva del conocimiento del contenido de la enseñanza para el MTE (Castro-Superfine et al., 2020; Zaslavsky y Leikin, 2004).

De esta manera, distintos modelos de conocimiento del profesor han sido gradualmente incorporados al conocimiento del MTE, lo que plantea la necesidad de reflexionar sobre la naturaleza de las relaciones entre estos dos tipos de conocimiento que pueden convivir en el mismo sujeto y que se articulan en torno a los dos escenarios mencionados.

Un aporte crucial en esta línea es el trabajo de Jaworski (2008), quien inicia la discusión acerca de cómo se imbrican ambos conocimientos. En su estudio, propone un modelo de relación basado en la intersección de conjuntos entre el conocimiento específico del MTE y el conocimiento distintivo del profesor, dando lugar a un conjunto de conocimientos compartidos entre el MTE y el profesor que enseña matemática (ver figura 1).

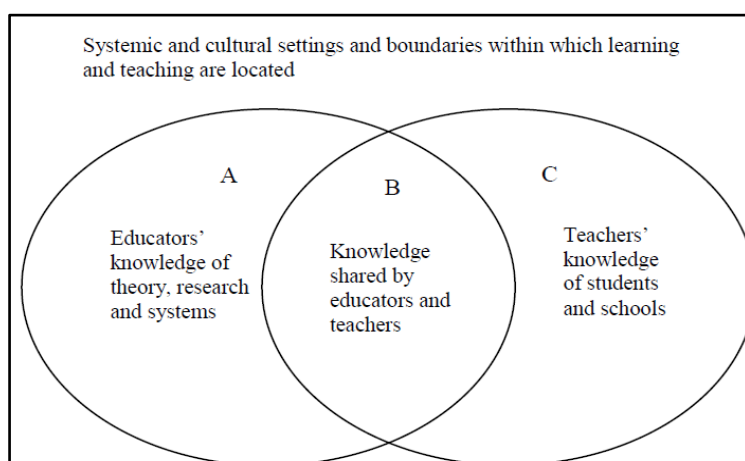


Figura 1. Modelo de conocimiento en la formación docente (Jaworski, 2008, p.336)

Asimismo, es posible diferenciar entre el conocimiento del profesor que los MTE ponen en práctica al enfocarse en el estudiante, del conocimiento del MTE acerca de cómo desarrollar ese contenido cuando la atención se dirige al FP. A este cambio de enfoque lo denominaremos “doble mirada”. Cuando la mirada del MTE se posa en el FP, entendemos que el contenido a enseñar se reconfigura y el conocimiento didáctico de ese contenido se expande hacia consideraciones propias de los FP. La doble transferencia que sugiere Olanoff (2011) en su investigación y que se ha transformado en nuestro objeto de estudio, tiene este mismo sentido. Para la autora, la identificación del foco de atención en el discurso del MTE (el estudiante de matemática o el FP) podría ayudar a identificar conocimientos que distinguen el conocimiento profesional del MTE del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

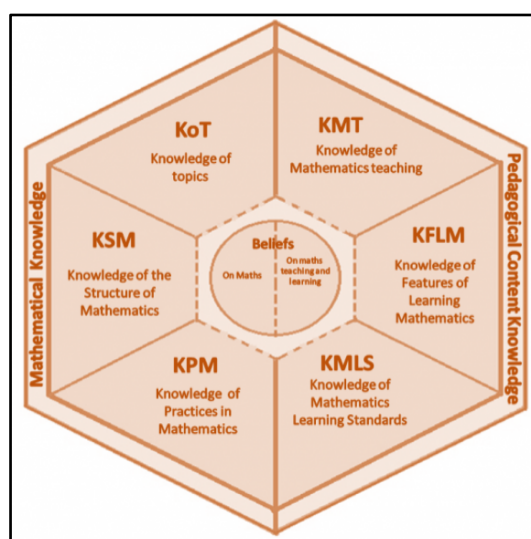
Centrándonos en el escenario de la FID, cuando el MTE pone la mirada en los FP, Escudero-Ávila et al. (2021), tomando como referencia a Ponte (2011), consideran tres pilares en el conocimiento del formador sobre el contenido de la formación: el conocimiento profesional (vinculado al conocimiento del contenido, de los estudiantes, de la enseñanza o del currículo), la práctica de enseñanza de la matemática (focalizando el papel del profesor en su quehacer docente) y la identidad profesional (como individuo y como miembro de una comunidad educativa).

Con respecto a la organización del conocimiento didáctico de ese contenido, partimos de una adaptación del PCK propuesto desde el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* de Carrillo et al., 2018), encontrando conocimiento de la enseñanza del contenido de la formación, conocimiento de las características de aprendizaje del contenido de la formación y conocimiento de los estándares de la formación (Pascual, 2021). De manera similar, Chick y Beswick (2018) plantearon un marco de conocimiento pedagógico de "contenido" para los MTE y señalaron que el “contenido” que los MTE enseñan

no depende exclusivamente del conocimiento de la disciplina, sino que incluye el conocimiento para enseñarla.

Aunque el conocimiento del profesor que el MTE moviliza puede organizarse mediante MTSK, es esencial tener en cuenta las discrepancias en la manera en que cada uno de estos actores asimila y desarrolla dicho conocimiento. Estudios previos (Pascual, 2021; Zopf, 2010) destacan estas disparidades. A partir de estos hallazgos, surge la consideración que el conocimiento matemático del MTE es más amplio y profundo, así como más enriquecido en conexiones entre distintos tipos de conocimiento. Estas conexiones se evidencian a través de la interrelación de distintos subdominios de conocimiento, matemáticos y didácticos, en extractos de análisis de conocimiento del formador (Pascual, 2021), que son más variados, justificados y complejos que en el caso de las relaciones establecidas en el conocimiento del profesor (Zakaryan et al., 2018).

Para categorizar el conocimiento del profesor que moviliza el MTE, nos serviremos de las herramientas analíticas del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) que contempla, además de la distinción entre MK y PCK, la organización del conocimiento especializado en subdominios de conocimiento y categorías (ver figura 2).



*Figura 2.* Modelo de conocimiento especializado del docente de matemáticas (Carrillo et al., 2018, p.6)

De un lado, en lo que se refiere al conocimiento matemático (MK) se considera el conocimiento de los temas (KoT) como la red interconectada y fundamentada de conocimiento matemático, conceptual y procedimental, útil para la enseñanza de distintos tópicos matemáticos; este dominio de conocimiento incluye también el conocimiento de la práctica matemática (KPM), como el conocimiento sintáctico de la disciplina, de cómo se construye, y del quehacer matemático; finalmente, se diferencia el conocimiento de la estructura matemática (KSM) que involucra el conocimiento de las conexiones que se establecen entre distintos temas

matemáticos y de los conceptos y procedimientos transversales y auxiliares en la disciplina.

De otro lado, el conocimiento didáctico de las matemáticas (PCK) se estructura en conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que incluye conocimiento sobre cómo transformar el contenido matemático para ser enseñado, incluyendo teorías de enseñanza de las matemáticas y conocimiento para el diseño de tareas; el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), entendido como el conocimiento sobre las formas de interacción y dificultades de aprendizaje de los estudiantes con el contenido matemático; y, finalmente, el conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que diferencia elementos de conocimiento relacionados con la secuenciación de los temas matemáticos y el aprendizaje esperado.

Considerando que el objetivo de este estudio es caracterizar los conocimientos de MTE de primaria que surgen en episodios de doble mirada, recurriremos a los fundamentos teóricos y a las herramientas analíticas del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) para analizar el conocimiento como profesor que moviliza el formador y las relaciones que este conocimiento tiene con el conocimiento del formador movilizado con la intención de gestionar la FID. Utilizaremos la perspectiva de Ponte (2011) y Pascual (2021) para caracterizar aquellos conocimientos del formador que no son compartidos con otros profesores.

## METODOLOGÍA

Este estudio busca comprender cómo es el conocimiento del formador movilizado en episodios de doble mirada desde un paradigma interpretativo, cuyo enfoque cualitativo permite describir las manifestaciones de conocimiento de un grupo de formadores. La recolección de datos se efectuó en el contexto de un *Lesson Study* (LS) en que los MTE diseñaron, implementaron y reflexionaron una lección que promovió el sentido numérico de la división entre números naturales para futuro profesorado de primaria.

A partir de un enfoque inductivo (*bottom-up*) de los datos, se analizaron ocho sesiones de LS y dos implementaciones del plan de lección, a través de las transcripciones de las grabaciones de vídeo. Se realizó una triangulación entre los cuatro investigadores, tanto de la selección de unidades de información que atendieran al fenómeno de estudio, como de su análisis, y se describieron los conocimientos de los MTE que se distinguían del conocimiento del profesor en los episodios de doble mirada, de forma conjunta.

Después se realizó un análisis deductivo (*top-down*) de los datos (Grbich, 2003). En particular, para identificar el conocimiento especializado como profesor de matemáticas que manifiesta el MTE se han empleado las categorías del modelo MTSK; para reconocer el conocimiento del MTE sobre el contenido de la FID se ha considerado la configuración propuesta por Ponte (2011); y finalmente, para

referir el conocimiento didáctico del MTE sobre el contenido de la FID se ha empleado la extensión del modelo MTSK propuesta por Escudero-Ávila et al., (2021) y Pascual (2021). La interpretación de las evidencias empíricas sobre conocimiento del MTE ha seguido un proceso de análisis de contenido (Krippendorff, 1990).

### Participantes

El grupo de formadores de LS lo conformaron ocho MTE de primaria, siete mujeres y un varón, provenientes de distintas universidades de diferentes regiones de Chile. Con edades comprendidas entre los 39 y 59 años, y con experiencias y conocimientos similares en la formación didáctico-matemática de estudiantes a profesorado de primaria. Desde su formación de pregrado, cinco de los MTE son profesores de primaria y tres son profesores de matemáticas de secundaria; según su formación de postgrado, seis tienen el grado de magíster y dos el grado de doctor, en las áreas de educación y educación matemática.

El grupo de MTE, que participaba por primera vez en un proceso de LS, colaboró en el diseño, observación y discusión de una lección centrada en la división entre números naturales, cuyo objetivo fue fomentar el desarrollo del Sentido Numérico (SN) en futuro profesorado de primaria que enseñarán matemáticas.

### Proceso de *Lesson Study*

El proceso de LS se llevó a cabo a lo largo del año 2022 y constó de ocho sesiones y dos implementaciones (ver Figura 3).

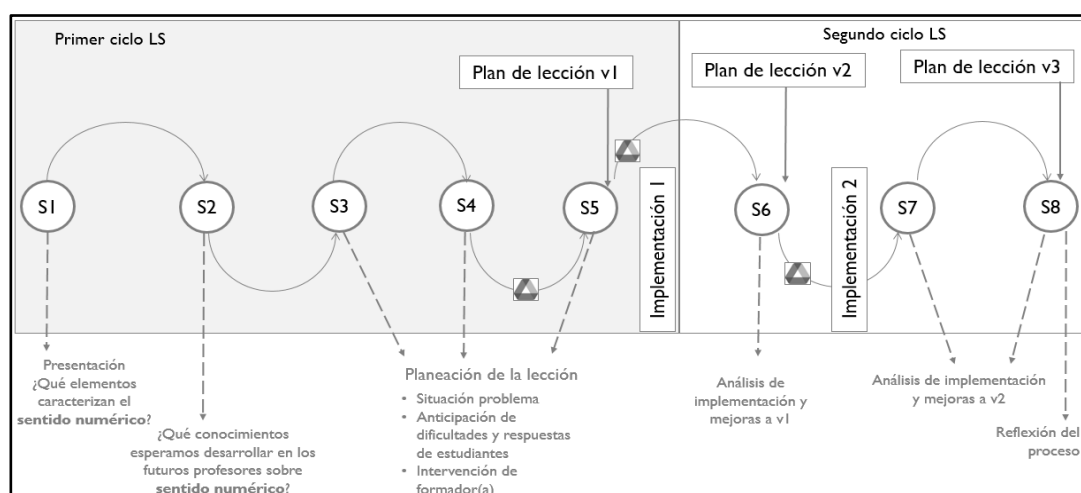


Figura 3. Diseño del proceso LS con MTE de primaria sobre SN (adaptado de Estrella et al., 2022)

Las ocho sesiones se realizaron de manera sincrónica a través de la plataforma Zoom. Cada sesión sincrónica de LS duró 60 minutos, mientras que las dos implementaciones presenciales se extendieron en promedio a 100 minutos cada



una. Además, se trabajó de manera asincrónica en un documento compartido en Google Drive, donde se diseñó colaborativamente el plan de lección.

En las dos primeras sesiones, los MTE identificaron como problema de enseñanza relevante en la FID las dificultades de los FP respecto a la división entre números naturales. Si bien la motivación inicial de trabajar la división se sustentó en sus experiencias como MTE, es posible encontrar en la literatura dificultades y/o errores que presentan estudiantes a nivel escolar y en la FID respecto al uso y comprensión del algoritmo asociado a esta operación. Valgan las líneas que siguen para justificar, contextualmente, la elección de esta temática en la LS

Para Lewin et al. (2013) el algoritmo de la división puede generar errores en su uso debido a que requiere el uso de otros conocimientos, como la estimación de productos, el empleo de sustracciones, y la necesidad de llevar un registro ordenado de los pasos que se efectúan. Incikabi et al. (2020) señalan que los estudiantes de primaria poseen una deficiente o defectuosa comprensión del sistema de numeración decimal (específicamente del valor posicional) lo que podría derivar en errores al momento de dividir números naturales. Añaden que el excesivo uso de procedimientos carentes de comprensión conceptual por parte de los estudiantes, genera que empleen algoritmos sin dar significado a lo que hacen, por ejemplo, al usar el algoritmo convencional para la división entre números naturales. Lo mismo mencionan Kaasila et al. (2009) sobre profesores de primaria en formación, identificando que estos últimos tienen errores de comprensión frente al algoritmo de la división de números naturales porque no saben manejar el resto, o no logran hacer conexión con las otras operaciones aritméticas, o porque sus estrategias de razonamiento son insuficientes.

Por estos motivos, el tratamiento de la división entre números naturales promoviendo el sentido numérico (SN) se transforma en una oportunidad para los futuros profesores de primaria, atendiendo a las dificultades explicitadas. Contemplamos el SN como la comprensión de los números naturales y de la operación división en específico, junto a la inclinación a usar esa comprensión de manera flexible para analizar situaciones en el contexto de la resolución de problemas, emitiendo juicios matemáticos frente a diversas estrategias que conducen a la búsqueda de un cociente (McIntosh et al., 1992; Yang, 2019). Para la promoción del SN se contemplan componentes esenciales, como comprender el significado de los números y las operaciones usando diversas representaciones; utilizar números de referencia; emplear composiciones y descomposiciones de los números; comprender el efecto relativo de las operaciones; analizar diversas estrategias que implican estimaciones, cálculo mental y cálculo escrito; y evaluar lo razonable de una respuesta (Almeida et al., 2014).

Durante las sesiones 3, 4 y 5, establecieron el objetivo de la lección y diseñaron la tarea principal para promover el desarrollo del SN, anticipando posibles dificultades de los FP, así como respuestas y devoluciones que los MTE podrían ofrecer. La primera implementación del plan de lección versión 1 ocurre entre la sesión 5 y 6, a cargo de una de las MTE en su curso de formación inicial. Esta

implementación fue grabada en vídeo y compartida con el resto del grupo de MTE para que pudieran observarla. Posteriormente, en la sesión 6, el grupo analizó la implementación y propuso rediseños al plan, lo que generó una segunda versión. Esta segunda versión se implementó en otra región del país y estuvo a cargo de otra MTE. Después de compartir la videograbación de la lección implementada con el grupo de MTE, se analizó en la sesión 7 y se propusieron más mejoras al plan de lección, lo que dio lugar a la versión 3 y final. La sesión 8 fue diseñada para que el grupo realizara una reflexión grupal pública de su experiencia personal del proceso de LS.

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este análisis mostraremos evidencias de conocimiento específico propio del formador en situaciones de doble mirada, señalando cómo cada evidencia de MTSK puesto en juego puede relacionarse con el conocimiento del MTE. Asimismo, mostraremos la riqueza en las relaciones entre subdominios de conocimiento que manifiesta el MTE, evidenciando una visión más holística del conocimiento de la que cabría esperar de un profesor. A veces, los fragmentos seleccionados muestran concepciones propias de un MTE (que denotaremos por  $MTE_i$ ) que ayudan a comprender sus decisiones.

### **Conocimiento de los MTE al consensuar el conocimiento profesional a desarrollar en los FP sobre SN**

Los tres primeros fragmentos que exponemos son parte de la segunda sesión de LS, que se enfocó en que los MTE acordaran qué conocimientos esperaban desarrollar en los FP sobre SN. En el primer fragmento, una de las MTE plantea la necesidad de diseñar una situación problema en un escenario distinto al de manejo del dinero, considerando el contexto rural en que se desempeñarán los FP que ella forma.

*MTE<sub>i</sub>:* Es cierto que los niños rurales sí necesitan tener el manejo del dinero, pero el manejo del dinero no es tan espontáneo [por eso en la formación de futuros profesores incluiría actividades que permitieran] calcular cuánto afrecho voy a mezclar con trigos, avenas y cosas para los pollos, y [hacerles ver cómo] matematizar eso.

En este fragmento, la MTE manifiesta su doble mirada al diseñar un problema para FID con la perspectiva del contexto de quienes serán los estudiantes de primaria con los que trabajarán los FP. Vemos cómo conjuga su conocimiento como profesora de matemáticas, específicamente conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), de la categoría técnicas, estrategias, tareas y ejemplos, con su conocimiento sobre la enseñanza del contenido de la FID en el diseño de tareas, en un todo coherente y relacionado.

La segunda evidencia se presenta cuando se decide qué conocimientos matemáticos y didácticos de las matemáticas guiarán el diseño de la lección para los FP de primaria, de acuerdo a los estándares para carreras de Pedagogía en Educación General Básica en Chile (MINEDUC, 2022). Uno de los MTE propone un estándar que indica “Justifica la pertinencia de estrategias de cálculo mental con números naturales y racionales, tales como descomposición, composición y compensación, y las aplica en situaciones de estimación de cantidades y medidas” (p. 114). Su decisión se basa en la reflexión conjunta generada entre los integrantes del grupo durante la sesión.

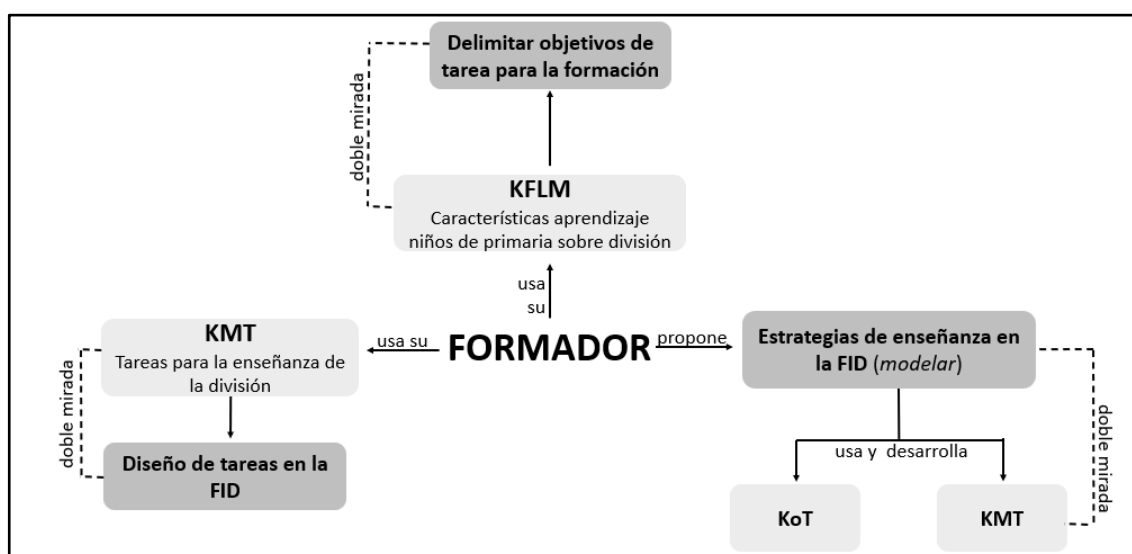
*MTE<sub>i</sub>:* Estábamos viendo también que los niños y las niñas [alumnos de primaria] tienen problemas a veces con el tema del algoritmo, al parecer no son tan hábiles en eso, pero quizás podrían desarrollar ciertas destrezas para obtener divisiones mentalmente.

En este fragmento observamos cómo la atención a una dificultad de los alumnos en Educación Primaria sirve como detonante para sugerir orientaciones en la lección que se diseñará para la formación de FP. De esta evidencia inferimos cómo el MTE aprovecha su conocimiento como profesor de matemáticas sobre las dificultades de los niños de primaria al trabajar la división, particularmente su conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), al enfocar la lección que se implementará con los FP, mostrando su conocimiento sobre los estándares de la formación al delimitar los objetivos de la tarea en su papel de MTE.

Al decidir el objeto matemático a desarrollar en la lección desde el SN, una de las MTE plantea que en su experiencia ha constatado el desconocimiento de los FP sobre la división, afirmando que en muchos casos “no saben dividir”. Es ahí cuando identificamos la tercera evidencia de doble mirada.

*MTE<sub>i</sub>:* Una [como MTE] tiene que [...] trabajar con ellos [FP] desde explicarles como que estuviera trabajando con los niños [alumnos de primaria], en el fondo modelando para que puedan ellos a su vez aprender.

Este fragmento evidencia el empleo de una estrategia de formación de profesores, siendo un conocimiento específico del MTE, si bien su foco está en el aprendizaje de los FP, modela el proceso de enseñanza como lo haría con alumnos de primaria. Se deduce del fragmento cómo la MTE imbrica sus conocimientos sobre la formación de profesorado y sobre la enseñanza en primaria a través del empleo de estrategias para la formación inicial docente, con la intención de desarrollar el conocimiento de los temas matemáticos (KoT) sobre la división y el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) de los futuros profesores.



*Figura 4.* Doble mirada como episodio de identificación de conocimiento del MTE desde fragmentos de la sesión 2 de LS.

*Nota:* La línea semipunteada indica el episodio de doble mirada. Los rectángulos gris oscuro indican el conocimiento exclusivo del MTE. Los rectángulos gris claro indican conocimiento compartido entre el MTE y el profesor de matemática, descrito desde el MTSK.

### Conocimiento de los MTE al diseñar una lección que promueve el SN

Los siguientes fragmentos corresponden a las sesiones 3, 4 y 5. El objetivo de estas sesiones fue el diseño de la lección sobre división promoviendo el SN. Se compartieron los fundamentos de la situación problema que sustenta el plan de la lección. Durante la discusión, una de las MTE plantea la siguiente afirmación.

*MTE<sub>i</sub>:* Creo también que el estudiante [FP] se dé cuenta de lo necesario que es el conocimiento, tanto el conocimiento disciplinar, pero [también] en el sentido de tener claridad de por qué existen esos algoritmos, el sentido de dónde viene... Porque en la medida que él [FP] tenga esa claridad, él va a poder aplicar distintas estrategias y va a poder entrar a discutir con sus estudiantes.

Este fragmento evidencia conocimiento sobre la necesidad de plantear tareas para la formación que permitan desempaquetar los conocimientos sobre la división con los FP, para que estos aprendan a desempaquetarlos con sus alumnos de primaria. En efecto, se observa la doble mirada puesto que la MTE manifiesta su conocimiento de los temas matemáticos (KoT, procedimientos) con foco en que los FP puedan construir estrategias para enseñar la división a alumnos de primaria, promoviendo el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT, estrategias). Este conocimiento de la MTE es relevante, en tanto que en su discurso manifiesta como necesarias las relaciones entre distintos subdominios del MTSK que se promueven para desarrollar conocimiento en los FP. Además, la MTE refuerza la idea expresada con el siguiente fragmento.

*MTE<sub>i</sub>*: Pero si él [FP] no tiene claridad en por qué, de dónde proviene el algoritmo, de por qué hay algoritmos alternativos, que en realidad están todos relacionados en el caso de la división, es poco probable que él pueda trabajar el sentido numérico con sus propios estudiantes después.

Respecto a las preguntas de discusión que tienen previsto plantear a los FP durante la lección, una de las MTE propone la identificación y reflexión sobre errores que podrían cometer alumnos de primaria al resolver divisiones. En efecto, ella busca que la actividad que se proponga en la FID tenga como horizonte las dificultades con las que podrían enfrentarse en su quehacer como profesores, convirtiéndose en una tarea profesional.

*MTE<sub>i</sub>*: También podría pedirse que [el FP] razonara por qué se equivocó [el alumno de primaria], en qué se equivocó, qué error cometió ahí [...], o sea dónde considera que el estudiante [...] cometió el error.

Esta idea se refuerza con lo expresado a continuación por la MTE, quien complementa su postura aludiendo a su ejercicio en la FID. En el siguiente fragmento se observa la importancia que otorga a que el FP comprenda el error del niño, estableciéndose la doble mirada.

*MTE<sub>i</sub>*: Porque mientras uno como profe [que enseña matemática] no logra identificar el error del estudiante [de primaria] no lo puede apoyar. O sea, es lo que por ejemplo yo hago con mis estudiantes [de pedagogía], les pongo una situación donde hay errores y le digo “identifique el error y a partir de eso elabore una estrategia”, pero el problema es que si no identificaste el error cualquier estrategia que plantees no va a estar adecuada.

Ambos fragmentos dan cuenta del conocimiento de la MTE sobre la enseñanza del contenido de la FID, específicamente sobre el diseño de tareas que permiten reflexionar y obtener aprovechamiento de los errores de niños de primaria, como práctica de enseñanza de las matemáticas. La doble mirada se expresa en que la MTE pretende construir en los FP conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), pensando en las dificultades de los niños de primaria al trabajar la división.

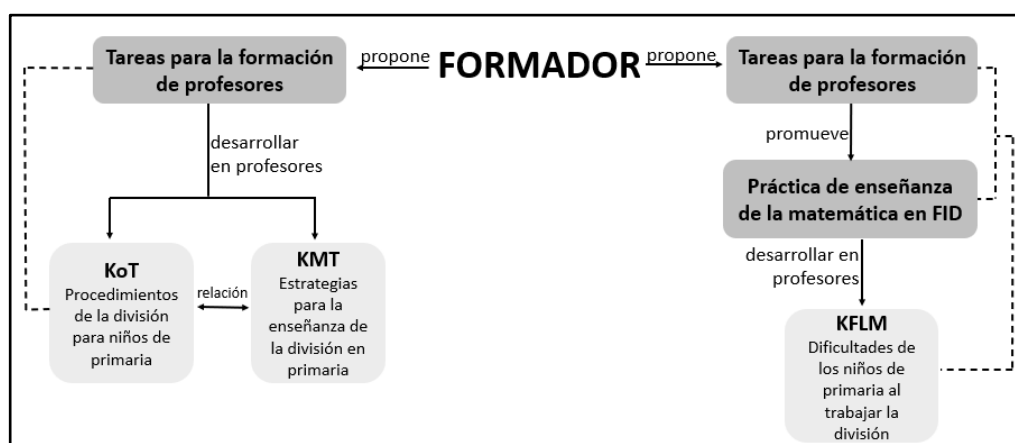


Figura 5. Episodio de doble mirada que identifica conocimientos del MTE desde fragmentos de sesiones de diseño (3, 4 y 5) de LS.

### Conocimiento de MTE al implementar la lección que promueve el SN

#### Primera implementación

Tras las cinco sesiones de *Lesson Study* se efectúa la primera implementación del plan de lección. En la tarea de inicio, la MTE plantea a los FP una situación de división como medida en la que deben estimar la respuesta y seleccionar una de las tres alternativas que se exponen, con la condición de resolver mentalmente en un tiempo determinado. Posteriormente, se les solicita registrar el paso a paso que realizaron para encontrar la respuesta con el fin de compartirla con sus compañeros en el plenario. Al finalizar esta tarea la MTE lleva la situación a un contexto de aula de primaria y les plantea la siguiente reflexión.

*MTE<sub>i</sub>*: Los niños en la escuela, ¿pensarán todos lo mismo [estrategia] cuando usted le plantee un problema?

En este fragmento se muestra cómo la MTE trae al niño hipotético a la sala de clases de la formación inicial, con la intención de provocar cuestionamiento en los FP de una posible experiencia docente sobre la diversidad de pensamiento numérico en el aula de primaria para que ellos se posicionen como profesores. Esta estrategia empleada por la MTE es parte de su conocimiento sobre la enseñanza del contenido de la FID, y junto a la reflexión generada permite que los FP comprendan la importancia de tener conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria (KFLM), pudiendo anticiparse a cómo podrían interactuar sus futuros alumnos de primaria frente a tareas de división.

Posteriormente, la MTE realza la importancia de ponerse en el lugar de los alumnos que tendrán los FP al diseñar tareas matemáticas para primaria, señalando implícitamente el perfil del profesorado que desea formar. Afirmaciones como “Se dan cuenta lo interesante [de la actividad], también ustedes se ponen en el lugar de los niños” o “entonces cuando usted le plantea un problema a un niño, hay todo un

mundo. Interesante esto de poder mirar [las diversas resoluciones] con la mente abierta” dan cuenta de este perfil. En consecuencia, la doble mirada que tiene la MTE incide en la construcción del perfil del profesorado de primaria que desea promover, mostrando conocimiento sobre la identidad de quienes enseñan matemática en estos niveles educativos. Otro ejemplo se expone a continuación.

*MTE<sub>i</sub>*: Si alguna de ustedes dice “yo tengo una mejor [estrategia]”, es importante la idea que ustedes entiendan y vean que uno puede pensar un problema de tantas formas diferentes. Usted en su clase de matemática tiene que tratar que sus niños tengan ese espacio [...] quizás un niño lo va a pensar de otra manera que usted no lo tenía pensado, y está bien.

La MTE tiene conocimientos sobre tareas de enseñanza en la formación inicial docente que le permiten a los FP fomentar conocimiento sobre la práctica matemática (KPM) de resolución de problemas y a su vez, la necesaria práctica de enseñanza sustentada en la implementación de tareas que promueven el razonamiento y la resolución de problemas (NCTM, 2014). La doble mirada que se observa en este fragmento permite ligar el conocimiento propio del contenido (KPM) que debe desarrollar el FP y su puesta en acción a través de tales prácticas de enseñanza.

En la lección implementada se observa el énfasis puesto por la MTE en posicionar al niño hipotético de primaria como un actor más de la sala de clases universitaria. La tarea central consistió en que los FP analizaran las posibles estrategias que podrían emplear tres niños de primaria respecto a un problema de división entre números naturales, específicamente al calcular el precio de un quillay sabiendo que cinco cuestan \$2480. Uno de los niños hipotéticos plantea la siguiente estrategia: “Yo calculé mentalmente. Divido \$2480 en 10 y obtengo \$248, y luego calculo el doble, que es \$496. Entonces, el precio de un quillay es \$496”. En esa instancia la MTE plantea el siguiente relato.

*MTE<sub>i</sub>*: Imagínate un niño te dice eso, y tú le dices “ah, está malo”. Y quizá no, porque el niño pensó “ah es que lo dividí por 10”, pero no va a saber decírtelo así “profesora, usé la simplificación” [ríen los FP]. No te va a decir eso, pero a lo mejor lo pensó... entonces preguntarles ¿por qué y cómo?... en lenguaje de niños, ¡puede ser!

En el fragmento anterior se observa un posicionamiento de la MTE quien modela la importancia de evaluar la razonabilidad de las diversas estrategias matemáticas de los estudiantes de primaria, enfatizando el sentido numérico del FP y del alumno de primaria. Así, la MTE manifiesta conocimiento sobre características del aprendizaje de los niños de primaria sobre división (KFLM), lo que se traduce en una estrategia de enseñanza en la formación inicial de profesores que enseñarán matemáticas. Además, este relato manifiesta conocimiento sobre un perfil profesional particular de profesor de primaria que promueve en sus clases, lo que incidiría en la identidad profesional que está construyendo sus FP.





Adicionalmente, se desprende conocimiento de la MTE sobre la práctica de enseñanza de la matemática referida al planteamiento de preguntas deliberadas que permiten reconocer cómo aprende y piensa el estudiante de primaria (NCTM, 2014). Esta práctica tiene estrecha relación con el conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática de los estudiantes de primaria (KFLM) que debe desarrollar el FP, ya que tener antecedentes sobre cómo interactúan los alumnos de primaria con los contenidos matemáticos es clave para que el profesorado pueda orquestar discusiones productivas en la clase.

### *Segunda implementación*

Luego de implementar el primer plan de lección y realizar su rediseño, se llevó a cabo la segunda implementación a cargo de otra de las MTE participantes del LS. Esta lección ha sido rediseñada considerando las reflexiones emitidas por el grupo de MTE después del análisis de la primera implementación del plan de lección. Si bien en esta ocasión se observan menos referencias al niño hipotético en la sala de clases universitaria, la doble mirada también emerge. Al finalizar la actividad principal de la lección, la MTE manifiesta la trascendencia de tener instancias en la FID que les permitan un acercamiento al pensamiento de los alumnos de primaria.

*MTE<sub>i</sub>:* Por eso es tan importante que como profesores estén viendo las estrategias, cómo piensa el niño, su razonamiento, que pueden ser [cálculos] mentales como hicimos al principio [de la lección] o pueden ser escritas.

En efecto, la MTE está manifestando conocimiento sobre la necesidad de promover la práctica de enseñanza de interpretar el pensamiento matemático de los alumnos de primaria en los FP para incidir en su toma de conciencia de cómo interactúan y razonan los niños sobre el contenido matemático, fomentando el conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática de los alumnos de primaria (KFLM).

Al institucionalizar el sentido numérico en la lección, la MTE plantea la relevancia de poseer conocimiento sobre sus componentes con el fin de observarlas en las resoluciones de los alumnos de primaria.

*MTE<sub>i</sub>:* Pero para entender la comprensión [de los alumnos de primaria] yo debo tener las componentes [del sentido numérico], [...] y eso es lo que yo debo observar en mis estudiantes, ¿cuál estrategia y qué componente están usando? Si [el uso de] la descomposición y la composición, [reconocer] el valor relativo y absoluto [de los números], utilizar [diversas] representaciones.

En este episodio se observa que la MTE modela acciones de observación para indagar en las resoluciones de los estudiantes de primaria respecto al sentido numérico, manifestando conocimiento sobre una estrategia de enseñanza en la formación inicial. Ella enuncia la importancia del desarrollo de conocimiento profesional de los FP, en particular, de las componentes del sentido numérico, lo

que se traduce en el fortalecimiento del conocimiento sobre el tema matemático (KoT). La MTE tiene conocimiento sobre el KoT que necesita promover en sus FP y sobre la práctica profesional, ya que en esta última los futuros profesores ponen su KoT en acción para identificar e interpretar el pensamiento de los niños de primaria.

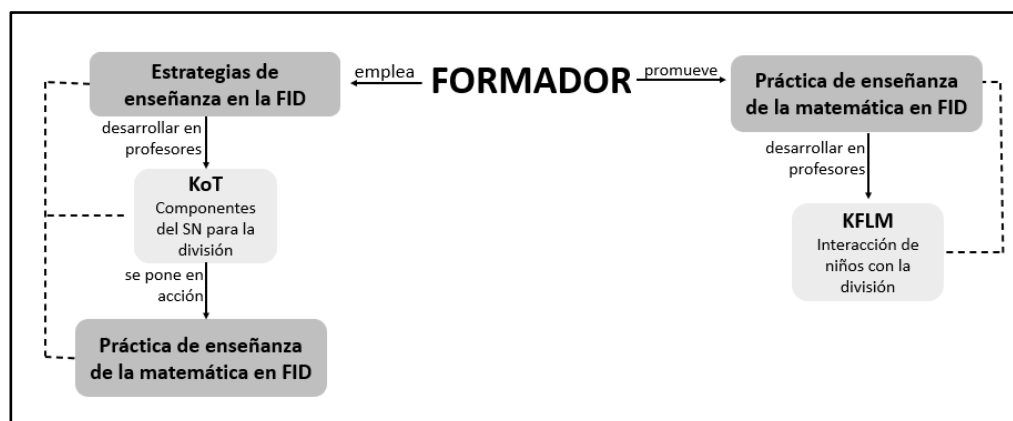


Figura 7. Doble mirada como episodio de identificación de conocimiento del MTE desde fragmentos de segunda implementación de la lección.

### Conocimiento de los MTE al rediseñar la lección que promueve el SN y reflexionar sobre el proceso de LS

La sesión 7 del *Lesson Study* implicó la reflexión y rediseño de la segunda implementación del plan de lección. En esa línea, los MTE discuten sobre las dos implementaciones realizadas y la necesidad de que los FP no solo posean una serie de estrategias, sino que sean capaces de interpretar el pensamiento de los estudiantes de primaria.

*MTE<sub>i</sub>*: Cuando [un FP] se vea enfrentado a enseñar a sus estudiantes [de primaria], si su estrategia no le resulta, tiene que tener herramientas como para poder enseñarles otras estrategias. Me parece que esa enseñanza y esa forma de poder analizar todo este tipo de situaciones desde distintas perspectivas, le da un enriquecimiento a nivel profesional.

En este episodio se observa la doble mirada en el discurso del MTE quien manifiesta conocimiento sobre la enseñanza del contenido de la FID a través de tareas que planteen distintas estrategias de resolución para que los FP sepan cómo gestionar estas situaciones en el aula de primaria. Al diseñar tareas con este objetivo, se desprende que el MTE tiene conocimiento sobre la práctica de enseñanza de las matemáticas de interpretar el pensamiento matemático de los alumnos de primaria y su necesidad de promoverla en los FP fomentando el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas de los alumnos de primaria (KFLM).

Al finalizar el proceso de LS se lleva a cabo la sesión 8 cuyo propósito es una reflexión colectiva experimentada por el grupo de MTE. En ella los MTE

reflexionan desde su experiencia sobre las clases en la formación inicial del profesorado, haciendo un llamado de atención que releva la doble mirada.

*MTE<sub>i</sub>:* Muchas veces la clase en la universidad está centrada en los estudiantes universitarios, en lo que requiere el estudiante universitario, cómo pensará mi estudiante, pero no en cómo piensa un niño o niña. Entonces uno de los elementos, de los aportes importantes de trabajar con este análisis de la respuesta, es que ya la clase no está pensada para el estudiante universitario, sino que está pensada en cuestionarnos y en reflexionar sobre cómo un niño o niña puede construir el pensamiento matemático.

En este fragmento la MTE declara la importancia otorgada a la presencia del niño hipotético en la formación inicial de profesores. En esa línea, potenciar los cuestionamientos de los FP sobre cómo los alumnos de primaria construyen su pensamiento matemático sitúa la doble mirada como parte del desarrollo profesional docente. De esta manera, los MTE han puesto de manifiesto su conocimiento sobre tareas que en la formación inicial promueven el conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática de los alumnos de primaria (KFLM) en los FP.

En la sesión 8, que corresponde al último encuentro, los MTE reflexionan sobre el proceso experimentado. Se identifican dos locuciones enunciadas por participantes distintos quienes en su complementariedad dejan entrever la relevancia que para ellos reviste el proceso de conocimiento profesional a desarrollar en los FP, toda vez que implícitamente expresan la doble mirada en su discurso.

*MTE<sub>i</sub>:* Para llegar a la división [FP] tiene que saber varias estrategias porque, qué pasa si un estudiante [de primaria] sabe de una manera y otro no entiende, cómo tú lo vas a apoyar. Realmente se dieron cuenta que sí tienen que saber y si tienen que tener varias estrategias para llegar a sus estudiantes

*MTE<sub>i</sub>:* Ellos [FP] se dan cuenta de que un profesor de matemática sí o sí tiene que saber, tiene que manejar varias estrategias para poder entregarle a sus estudiantes [de primaria], porque uno no sabe con qué tipo de estudiante se va a encontrar, por lo tanto, uno tiene que estar preparado para todo, porque hay estudiantes que también cuestionan lo que tú haces y tienes que tener respuestas.

La doble mirada manifestada por los MTE justifica la necesidad del desarrollo del conocimiento especializado de la matemática en los FP. En ambos fragmentos los MTE manifiestan explícitamente la necesidad de formar profesorado de primaria con sólidos conocimientos matemáticos y didácticos del contenido matemático, y a la vez expresan que los FP tomaron conciencia de ello. En términos del manejo de diversos procedimientos para enfrentarse a una división entre números naturales, los MTE expresan la necesidad de fortalecer el conocimiento sobre el tema (KoT) que se promueve en la formación inicial de profesorado de primaria; respecto a cómo enfrentarse a la enseñanza de estas estrategias y cómo

interaccionan los estudiantes de primaria cuando se enfrentan a situaciones que implican dividir, los MTE apuntan a desarrollar conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) y conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática de los estudiantes de primaria (KFLM) respectivamente.

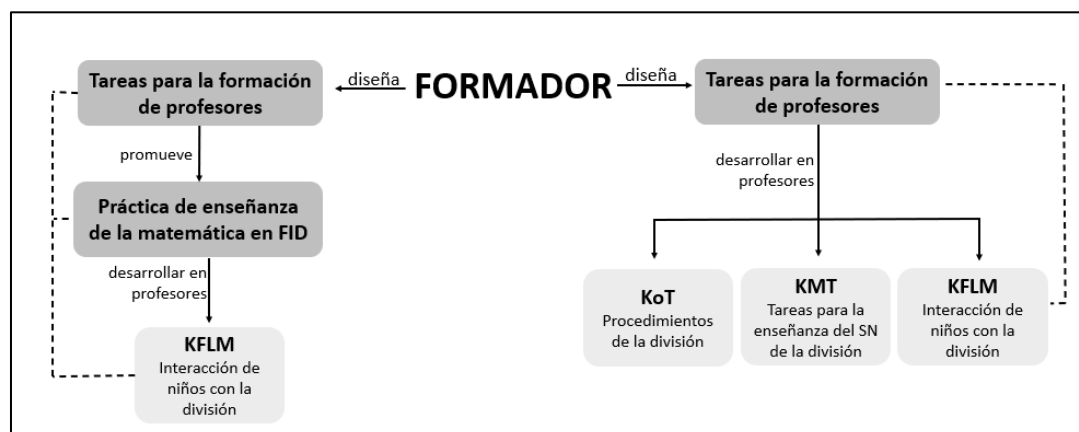


Figura 8. Doble mirada como episodio de identificación de conocimiento del MTE desde fragmentos de las sesiones (7 y 8) de rediseño de la lección y reflexión del LS.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio ha indagado en cómo la doble mirada del MTE caracteriza distintos elementos de su conocimiento profesional, lo que ha permitido distinguirlo del conocimiento propio de un profesor, aunque ambos estén asociados.

La literatura destaca la necesidad de que los futuros profesores se formen en un contexto que facilite la transición del rol de aprendiz al rol docente. Por consiguiente, en la construcción del conocimiento del profesor, se priorizan actividades inmersas en contextos reales de aula (Llinares et al., 2000). Una de las ideas que subyace a este principio es que al movilizar el contenido disciplinar en contextos de enseñanza y aprendizaje, el profesor logra una comprensión más profunda del mismo, transformándose en formas pedagógicamente útiles (Shulman, 1986).

Durante el proceso formativo, el MTE moviliza una amplia gama de conocimientos, todos ellos con un vínculo más o menos cercano con el conocimiento matemático que se pretende promover en el aula de primaria. Por ello, tener el aula de primaria presente en las actividades formativas se convierte en una estrategia esencial en la formación de profesores.

El contexto de *Lesson Study* sobre el cual se diseñaron las actividades de formación en nuestro estudio favoreció que los MTE prepararan escenarios, en el sentido de Zaslavsky y Leikin (2004), en que los futuros profesores pudieran adquirir el conocimiento profesional esperado (MTSK). Estos escenarios han supuesto retos para los futuros profesores ante situaciones de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes en las que, de acuerdo con Cooney y Krainer (1996),

han tenido la oportunidad de reflexionar sobre las propuestas que han elaborado, promoviendo prácticas profesionales como interpretar las interacciones con y entre profesores, potenciando el sentimiento de pertenencia a una comunidad de aprendizaje (Ferreira et al., 2023).

Hemos documentado que los escenarios en que el MTE moviliza conocimientos en episodios de doble mirada, permiten ver un conocimiento específico del MTE detrás de cada conocimiento del profesor puesto en juego. Así, el conocimiento de la enseñanza del contenido de la formación, específicamente sobre tareas o sobre estrategias ha aparecido vinculado al KoT, KPM, KMT y KFLM que se pretende desarrollar; su conocimiento sobre estándares de la formación al delimitar los objetivos de la tarea de formación docente, ha estado vinculado a KFLM, subdominio que también se vincula con conocimiento de prácticas de enseñanza de las matemáticas como interpretar el pensamiento matemático de los alumnos y el planteamiento de preguntas deliberadas que permiten reconocer cómo aprende y piensa el estudiante de primaria.

También hemos mostrado que el conocimiento del MTE es más rico en conexiones entre subdominios de MTSK que el conocimiento de un profesor. Así, han emergido relaciones ricas entre KoT (procedimientos) y KMT (estrategias de enseñanza), en el sentido de profundidad y extensión. Estas conexiones detectadas en el formador han sido identificadas como una vía que fomenta el establecimiento de relaciones por parte de los futuros profesores (Ferreira et al. 2023).

Por otro lado, estos escenarios han puesto de relieve una intencionalidad en la construcción de un perfil profesional que se ha vinculado con el KFLM, tanto del formador como el que desea desarrollar en sus futuros profesores, observándose la presencia de conocimiento del MTE sobre la identidad de quienes enseñan matemáticas.

Analizar los episodios de doble mirada nos ha permitido encontrar elementos del conocimiento del formador de profesores de matemáticas de primaria que son de diferente naturaleza del conocimiento propio de un profesor, aunque asociados a ese conocimiento. Es el caso de los citados conocimientos sobre tareas de la formación inicial, conocimiento sobre estrategias de formación, conocimiento sobre cómo delimitar los objetivos de la tarea de formación docente, conocimiento de la práctica de enseñanza de la matemática referida al planteamiento de preguntas deliberadas que permiten reconocer cómo aprende y piensa el estudiante de primaria, o conocimiento sobre la identidad profesional. Estudios posteriores que ayuden a una saturación de información podrán permitir configurar estos elementos de conocimiento encontrados en forma de categorías y subdominios que avancen hacia un modelo de conocimiento del formador de profesorado de matemáticas.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado al amparo de Beca Doctorado Nacional ANID Chile 21191968; Proyecto PID2021-122180OB-100 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España; y PUCV. 039.493/2024. Los autores colaboran con la RED MTSK (<https://redmtsk.net/>) y quieren agradecer a los MTE participantes su generosidad y colaboración.

## REFERENCIAS

- Abell, S. K., Rogers, M. A. P., Hanuscin, D. L., Lee, M. H. y Gagnon, M. J. (2009). Preparing the next generation of science teacher educators: A model for developing PCK for teaching science teachers. *Journal of Science Teacher Education*, 20(1), 77-93. <https://doi.org/10.1007/s10972-008-9115-6>
- Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 9-34. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997>
- Ball, D.L. (24-28 de marzo, 2008). Mathematical knowledge for teaching: Explicating and examining a program of research. En *AERA 2008 Annual Meeting Program* [Presentation]. American Educational Research Association 2008 Annual Meeting, New York, EEUU.
- Beswick, K. y Chapman, O. (2012). Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education* (pp. 629-632). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3\\_74](https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_74)
- Beswick, K. y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 417-427. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A. Ribeiro, M. y Muñoz-Catalan, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro Superfine, A., Prasad, P. V., Welder, R. M., Olanoff, D. y Eubanks-Turner, C. (2020). Exploring mathematical knowledge for teaching teachers: Supporting prospective teachers' relearning of mathematics. En A. Appova, R. M. Welder y Z. Feldman, (Eds.), *Supporting Mathematics Teacher Educators' Knowledge and Practices for Teaching Content to Prospective (Grades K-8) Teachers. Special Issue: The Mathematics Enthusiast* (vol. 17, nos. 2 & 3, pp. 367-402). ScholarWorks. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1492>
- Chick, H. y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of*

- Mathematics Teacher Education*, 21, 475-499. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y>
- Cooney, T.J. y Krainer, K. (1996). Inservice mathematics teacher education: The importance of listening. En A.J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1155-1185). Kluwer Academic Publishers. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0\\_32](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_32)
- Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 1(1), e202101. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12>
- Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher Education. En M. Goos, K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators* (pp. 23-40). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2)
- Estrella, S., Morales, S., Olfos, R. y Salinas, R. (2022). Estudio de e-Clases en Chile: cambios percibidos por profesores que diseñan, mejoran e implementan una tarea. En A. Richit, J. da Ponte y E. Soto (Eds.), *Estudos de aula na formação inicial e continuada de professores* (pp. 83-113). Editora Livraria da Física.
- Ferreira, M.C., Ribeiro, A.J. y Ponte, J.P. (2023). Práticas e Ações do Formador de Professores que Ensinam Matemática na Orquestração de Discussões Coletivas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 37(76), 666-687. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a14>
- Grbich, C. (2003). *New Approaches in Social Research*. SAGE.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemática. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/27/25>
- Incikabi, L., Ayanoglu, P. y Uysal, R. (2020). Sixth-Grade Students' Procedural and Conceptual Understandings of Division Operation in a Real-Life Context. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 13(1), 35-45. <https://doi.org/10.26822/iejee.2020.171>
- Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8-14.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203454213>
- Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (Vol. 4, pp. 335-361). Sense Publishers. <https://dspace.lboro.ac.uk/2134/8812>
- Kaasila, R., Pehkonen, E. y Hellinen, A. (2009). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies

- used. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 247-261. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9213-1>
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.
- Lanier, J. E. y Little, J. (1986). Research on teacher education. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook on research on teaching* (pp. 527-569). Routledge.
- Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D. y Zanocco, P. (2014). *Números. Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica*. SM.
- Llinares, S., Sánchez, V., García, M. y Escudero, I. (2000). Aprender a enseñar matemáticas. Efecto de una innovación educativa. *Revista de Enseñanza Universitaria*, vol. extra, 167-178.
- Lloyd, G. M. (2006). Using K-12 mathematics curriculum materials in teacher education: Rationale, strategies, and preservice teachers' experiences. En K. Lynch-Davis y R. L. Rider (Eds.), *The work of mathematics teacher educators: Continuing the conversation* (pp. 11-27) Association of Mathematics Teacher Educators Monograph.
- Masingila, J. O., Olanoff, D. E. y Kimani, P. M. (2018). Mathematical knowledge for teaching teachers: Knowledge used and developed by mathematics teacher educators in learning to teach via problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 429-450. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9389-8>
- McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-44.
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2022). *Estándares de la Profesión Docente. Carreras de Pedagogía en Educación General Básica*. [https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/02/basica\\_2023\\_digital.pdf](https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/02/basica_2023_digital.pdf)
- NCTM. (2014). *De los principios a la acción: Para garantizar el éxito matemático para todos*. NCTM.
- Olanoff, D. (2011). *Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions*. [Tesis doctoral, Syracuse University, EEUU]. [https://surface.syr.edu/mat\\_etd/64](https://surface.syr.edu/mat_etd/64)
- Pascual, M.I. (2021). El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España]. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/20208>
- Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2021). The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry. *Mathematics*, 9(11), 1241. <http://dx.doi.org/10.3390/math9111241>
- Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(6), 413-417. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9195-7>
- Reyes-Bravo, M., Pascual, M.I., Estrella, S., Tarisfeño, S. y Contreras, L.C. (2023). La “doble mirada” del formador de profesores de matemáticas como



- característica identificativa de su conocimiento. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.182-189). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamento de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2), 1-30. <http://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>
- Yang, D. (2019). Development of a three-tier number sense test for fifth-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 101(3), 405-424. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9874-8>
- Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105-123. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>
- Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 5-32. <https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009971.13834.e1>
- Zopf, D.A. (2010). Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education [Tesis de doctorado, University of Michigan, EEUU]. <https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/77702>

Macarena Reyes Bravo  
Pontificia Universidad Católica de  
Valparaíso, Chile  
macarena.reyes.b@mail.pucv.cl

M.<sup>a</sup> Isabel Pascual Martín  
Universidad de Sevilla  
mpascual@us.es

Luis C. Contreras González  
Universidad de Huelva  
lcarlos@uhu.es

Soledad Estrella  
Pontificia Universidad Católica de  
Valparaíso, Chile  
soledad.estrella@pucv.cl

Recibido: noviembre, 2023. Aceptado: octubre, 2024

doi: 10.30827/pna.v18i5.29431



ISSN: 1887-3987

## DOUBLE VIEW OF THE MATHEMATICS TEACHER EDUCATOR: OPPORTUNITY TO IDENTIFY THEIR KNOWLEDGE

Macarena Reyes-Bravo, M. Isabel Pascual, Luis C. Contreras, and Soledad Estrella

In this article we identify elements of knowledge of teacher educators through a descriptive study of eight primary teacher educators in the context of a Lesson Study group, in the field of number sense. These elements of knowledge are extracted through the double perspective of the educators, when their practices consider both their future teachers and primary school students. The analysis of the selected fragments was carried out in a top-down and bottom-up process, in which the background provided theoretical sensitivity to the study. Analyzing the instance of double vision has allowed us to find elements of the knowledge of the primary mathematics teacher educator that are of a different nature from a teacher's own knowledge, although associated with that knowledge. This is the case of knowledge about initial training tasks, knowledge about training strategies, knowledge about how to delimit the objectives of the teacher training task, knowledge of the teaching practice of mathematics referred to the posing of deliberate questions that allow us to recognize how the primary school student learns and thinks about professional identity. Subsequent studies that help to saturate information may allow these elements of knowledge found to be configured in the form of categories and subdomains that advance towards a model of knowledge for the mathematics teacher educator.