O USO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA NO 9.º ANO: ESTRATÉGIAS, SIGNIFICADOS E DIFICULDADES

Kelly Aguiar, João Pedro da Ponte e Joana Mata-Pereira

O objetivo deste artigo é caracterizar o uso da linguagem algébrica por alunos de 9.º ano, no que se refere a estratégias, significados e dificuldades. Para tal, discutimos as produções decorrentes da realização de uma tarefa de cunho algébrico por seis alunos. Os resultados mostram o uso de estratégias simbólicas e de estratégias baseadas na reflexão informal e a atribuição de significados adequados a símbolos, mas uma disposição limitada de busca e revisão de significados de expressões algébricas. Usar parênteses, multiplicar monómios e expressar relações presentes no contexto do problema destacam-se como as principais dificuldades dos alunos.

Plavras-chave: Aprendizagem da Álgebra; Linguagem algébrica; Sentido de símbolo; Significado; Símbolo

The use of algebraic language in grade 9: Strategies, meanings, and difficulties

The aim of this article is to characterize the use of algebraic language by grade 9 students, with regard to strategies, meanings and difficulties. For that, we discuss the productions resulting from solving an algebraic task by six students. The results show the use of symbolic strategies and strategies based on informal reflection and the attribution of appropriate meanings to symbols, but a limited willingness to search and revise the meanings of algebraic expressions. Using parentheses, multiplying monomials and expressing relationships present in the context of the problem stand out as the students' main difficulties.

Keywords: Algebraic language; Learning Algebra; Meaning; Symbol; Symbol sense

Aguiar, K., Ponte, J. P. e Mata-Pereira, J. (2024). O uso da linguagem algébrica no 9.º ano: estratégias, significados e dificuldades. *PNA 18*(4), 391-414. http://doi.org/10.30827/pna.v18i4.27382

El uso del Lenguaje Algebraico en el noveno grado: Estrategias, significados y dificultades

Este artículo busca caracterizar el uso del lenguaje algebraico por estudiantes de noveno grado, en cuanto a estrategias, significados y dificultades. Discutimos producciones resultantes de la realización de una tarea algebraica por parte de seis alumnos. Los resultados muestran el uso de estrategias simbólicas y estrategias basadas en la reflexión informal y la atribución de significados apropiados a los símbolos, más una disposición limitada para buscar y revisar los significados de las expresiones. Se destacan como principales dificultades de los estudiantes el uso de paréntesis, la multiplicación de monomios y la expresión de relaciones presentes en el contexto del problema.

Términos clave: Aprendiendo Álgebra; Lenguaje algebraico; Sentido de los símbolos; Significado; Símbolo

A Álgebra é um dos grandes ramos da Matemática e o seu domínio no currículo escolar liga-se à sua importância em áreas mais avançadas da Matemática, à sua utilidade em diversas esferas da vida e ao seu papel como ferramenta para a modelação matemática (Graham et al., 2009). A linguagem algébrica simbólica desempenha um papel fundamental em campos tecnológicos, científicos e profissionais (NCTM, 2000). As atuais necessidades nestas áreas relacionam-se com o uso de símbolos algébricos de modo flexível e com sentido crítico. Assim, a aprendizagem algébrica deve compreender a construção de uma linguagem algébrica que seja significativa para o aluno e que potencie a sua capacidade para resolver problemas (Arcavi et al., 2017).

A importância das competências algébricas e a sua centralidade nos currículos de Matemática em todo o mundo, contrastam com as muitas dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentam (Arcavi et al., 2017). São diversos os problemas na aprendizagem que envolvem a linguagem algébrica, como dificuldades em ver a estrutura subjacente às expressões algébricas, dar-lhes significado e usá-las para resolver problemas (Kop et al., 2020). A investigação em educação matemática tem mostrado que alunos, ao ingressarem no ensino superior, podem ainda ter dificuldades com a Álgebra em geral e em lidar com expressões algébricas em particular (Kop et al., 2020). O facto de o ensino da Álgebra estar desde há muito tempo centrado maioritariamente na manipulação simbólica pode estar na origem de algumas das dificuldades (Branco e Ponte, 2012; Ponte et al., 2013). Apesar dos estudos desenvolvidos nesta temática nas últimas décadas, tais problemas persistem no âmbito do uso da linguagem algébrica pelos alunos (Arcavi et al., 2017) e as investigações mostram-se incompletas ao indicarem o modo como os alunos compreendem e usam símbolos algébricos (Weinberg et al., 2016).

Deste modo, é relevante conhecer mais acerca do modo como os alunos usam a linguagem algébrica para saber, por exemplo, os significados que atribuem aos símbolos e expressões algébricas, e se reconhecem a utilidade do uso da linguagem algébrica para resolverem problemas. Para tanto, realizamos uma investigação com um grupo de alunos de 9.º ano de uma escola pública em Portugal, no contexto de realização de tarefas de cunho algébrico, visando analisar os significados construídos por eles bem como as suas estratégias e dificuldades no uso da linguagem algébrica. No ano em que este estudo foi realizado, estava em vigor um currículo que apresentava uma perspetiva bastante formalista e abstrata da Álgebra (MEC, 2013).

Neste artigo, o nosso objetivo é caracterizar o uso da linguagem algébrica por alunos de 9.º ano, nomeadamente, no que se refere às suas estratégias, significados e dificuldades na resolução de uma tarefa de cunho algébrico. Assim, apresentamos e discutimos algumas resoluções escritas e justificações orais dos alunos, que podem ser elucidativas no tocante às suas perspetivas quanto ao uso da linguagem algébrica.

A LINGUAGEM ALGÉBRICA E O SENTIDO DE SÍMBOLO

As origens da Álgebra ligam-se à formalização e sistematização de técnicas de resolução de problemas (Moura e Sousa, 2005). Diversas representações, como palavras e figuras geométricas, foram usadas durante séculos para representar problemas do cotidiano antes de existir notação literal —fases retórica e sincopada da Álgebra (Usiskin, 1988). A criação da linguagem algébrica simbólica, representou um grande salto no desenvolvimento da Matemática (Kaput e Shaffer, 2002). A linguagem algébrica simbólica, como a síntese de um longo processo histórico humano, pressupõe a utilização de símbolos precisos de aceitação universal que permitem expressar o desconhecido e lidar com o abstrato de modo abreviado e sistematizado (Moura e Sousa, 2005). A partir disso, e considerando que pensar algebricamente constitui uma ação multifacetada que engloba vários modos de pensar, e não apenas o uso de símbolos (Kieran, 2004), a linguagem algébrica simbólica tem-se revelado um importante instrumento que auxilia o pensamento na resolução de problemas e sua aprendizagem abre caminho a outras aprendizagens (Arcavi et al., 2017).

A linguagem algébrica, ao capturar e exibir estrutura matemática (Arcavi et al., 2017), permite que ideias matemáticas complexas sejam expressas sucintamente e interpretadas eficazmente (NCTM, 2000). No âmbito da aprendizagem matemática, porém, o que um aluno vê ao olhar para uma expressão algébrica, depende do que está apto a perceber (Sfard e Linchevski, 1994). Neste sentido, torna-se necessária a construção de significados para os símbolos de modo a promover a compreensão da linguagem algébrica. Ao longo da aprendizagem matemática os alunos devem desenvolver o sentido de símbolo (Arcavi et al., 2017; Kop et al., 2020), que é, para a Álgebra, o equivalente ao que o sentido de número é para a Aritmética, uma “capacidade geral de extrair significado matemático e de ver a estrutura dos símbolos, para codificar o significado em símbolos e para os manipular a fim de descobrir novos significados matemáticos” (Zorn, 2002, p. 4). Para Arcavi (1994), o sentido de símbolo é uma noção geral de quando e como usar símbolos. O termo “sentido de símbolo” é mencionado primeiramente por Fey (1990) e desenvolvido por Arcavi (1994). Os autores não definem este termo diretamente, mas descrevem uma série de características ligadas à adoção, leitura e manipulação de símbolos, por meio das quais exemplificam o sentido de símbolo. Muitas destas características como “habilidade para examinar uma expressão algébrica e fazer um esboço do padrão que pode emergir em representação numérica ou gráfica” ou “habilidade para comparar ordens de magnitude de funções” (Arcavi, 1994, p. 24) aludem, muitas vezes, ao contexto de ensino nos anos de escolaridade mais avançados. De facto, no âmbito internacional, investigações nesta temática situam-se principalmente entre o 10.º e o 12.º anos de escolaridade (Kop et al., 2020). Entretanto, Arcavi (1994) aponta que estas características são desenvolvidas ao longo da experiência escolar.

A Tabela 1 apresenta algumas das características referidas por Arcavi (1994), que consideramos poderem ser promovidas explicitamente no 3.º ciclo. As capacidades descritas nesta tabela compõem o sentido de símbolo e são resultantes de um processo de construção de significado para os símbolos (Arcavi, 2006). As quatro primeiras características, relativas à adoção de símbolos algébricos, evidenciam um propósito fundamental da Álgebra – a resolução de problemas. Trata-se de capacidades que se referem à escolha do uso da linguagem algébrica como estratégia de resolução de problemas e justificação de asserções. As características A3 e A4, em particular, sugerem uma competência que inclui tanto o adiamento oportuno da busca por significado em favor de aplicações rápidas de procedimentos algébricos, como, quando necessário, a interrupção de uma rotina de manipulação algébrica para refletir informalmente, questionar, relacionar ideias ou criar significado (Arcavi et al., 2017). Arcavi (1994) designa esta competência por “transição flexível” entre procedimentos automáticos com símbolos algébricos e reflexão informal. As quatro características relativas à leitura dos símbolos tratam da busca por significados. As características L1 e L2, destacam a iniciativa de rever os significados dos símbolos, ao longo ou ao final da resolução, por meio da monitorização do processo e da verificação da plausibilidade dos resultados. Todas estas capacidades sugerem o uso de símbolos algébricos de modo flexível e com sentido crítico (Arcavi, 1994). O seu desenvolvimento é um longo processo na trajetória dos alunos, onde eles devem exercitar a procura pela estrutura expressa nos símbolos, a leitura do seu significado e a perceção de seu potencial na resolução de problemas (Arcavi et al., 2017).

Tabela 1
Características do Sentido de símbolo (a partir de Arcavi, 1994)

Categoria	Característica
Adoção dos símbolos	A1. Saber que é possível representar informações com exatidão por meio de expressões simbólicas e capacidade para construí-las.
	A2. Saber se os símbolos algébricos são ou não as ferramentas mais apropriadas para resolver um problema.
	A3. Reconhecer os benefícios de refletir informalmente sobre um problema antes de abordá-lo simbolicamente.
	A4. Ser capaz de fazer transição flexível entre o uso de procedimentos automáticos com símbolos e de refletir informalmente.
Leitura dos símbolos	L1. Ter sentido crítico quanto aos resultados e os seus significados, e compará-los com os resultados intuitivamente esperados.
	L2. Ter consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a resolução de um problema.
	L3. Reconhecer diversos aspetos de um significado a partir de expressões algébricas equivalentes.
	L4. Saber que os símbolos podem desempenhar funções distintas em contextos diferentes.

Dificuldades no uso da Linguagem Algébrica

Entendemos por "uso da linguagem algébrica", de forma ampla, ações envolvidas no lidar com a linguagem algébrica, tanto por meio da escolha autónoma de adotar símbolos, como pela necessidade de leitura e manipulação de símbolos dados. Usar a linguagem algébrica pode constituir um desafio e trazer grandes dificuldades aos alunos, em particular porque nas práticas comuns de ensino não é valorizada a atribuição de significado aos símbolos pelos alunos (Ponte et al., 2009; Sharpe, 2019). Uma destas dificuldades é criar expressões algébricas para modelar situações-problema (Izsák, 2011; Kieran, 2007). Por exemplo, uma investigação realizada por Sharpe (2019), com 645 estudantes de 7.º a 9.º ano nos Estados Unidos, aponta a dificuldade de criar expressões algébricas para traduzir e resolver problemas. Os seus resultados sugerem ainda que a compreensão das relações aritméticas entre quantidades pelos alunos se relaciona com a maneira como tentam usar variáveis para expressar situações-problema (Sharpe, 2019). Esta dificuldade é particularmente importante, visto que os alunos que não conseguem criar expressões para modelar situações são incapazes de entender o valor prático da Álgebra para a resolução de problemas e, consequentemente, não tiram partido das potencialidades da linguagem algébrica no modo como abordam os problemas e nas suas estratégias de resolução (Arcavi et al., 2017).

Nesta perspetiva, Wilkie (2019) refere que, se os alunos forem ensinados apenas a manipular expressões algébricas sem aprenderem a apreciar a sua origem e explorar seus significados, podem não percecionar o poder da Álgebra de expressar generalidade e representar situações. Esta autora aponta, a partir de uma investigação com alunos australianos do 7.º ao 12.º ano, que estes apresentam dificuldades na representação de variáveis. Do mesmo modo Palatnik e Koichu (2017), ao apresentarem um estudo de caso feito com alunos israelitas, mostram que, mesmo após a criação de uma expressão algébrica correta para a resolução de um problema, os alunos precisaram de continuar a exploração da expressão algébrica no contexto do problema a fim de lhe darem significado. Estes autores referem que o raciocínio matemático, em particular a justificação, é fundamental para que os alunos consigam atribuir significado aos símbolos e expressões algébricas.

As dificuldades na realização de manipulações simbólicas também se destacam. Os resultados de um estudo feito por Ramos et al. (2021) com alunos do 7.º ao 9.º ano da educação básica das Honduras, mostram que mesmo alunos com bom desempenho em provas nacionais cometem erros relacionados a aspetos algorítmicos da Álgebra. Os autores referem que alguns obstáculos à aprendizagem se relacionam com as características da linguagem algébrica, destacando a necessidade do aluno entender a generalização de relações da Aritmética e assimilar problemas tanto no contexto aritmético como no algébrico. A importância dos conceitos da Aritmética na aprendizagem da Álgebra é evidenciada nas dificuldades que os alunos apresentam em usar a relação de igualdade, compreender a noção de equivalência de expressões (Tabach e Friedlander, 2017) e realizar adições algébricas de polinómios, particularmente em expressões onde é necessário eliminar parênteses e há uma subtração (Arcavi et al., 2017). Para ilustrar estas dificuldades destacamos a tendência de "fechamento", evidente em falsas simplificações como, por exemplo, $10 + h = 10h$ (Arcavi et al., 2017).

As características do currículo e do ensino desempenham um importante papel no que tange às dificuldades no uso da linguagem algébrica por alunos da educação básica (Sharpe, 2019). Kilhamn (2013), numa investigação baseada nas aulas lecionadas por duas professoras, concluiu que os professores moldam as oportunidades de aprendizagem algébrica a partir das abordagens que adotam. Segundo a autora, os alunos apreendem significados diferentes para variáveis por exemplo, a partir das perspetivas das professoras. Do mesmo modo, Ayalon e Wilkie (2020), a partir de uma investigação com 350 alunos dos contextos inglês, australiano e israelita, apontam que, enquanto os alunos ingleses e australianos tendem a expressar relações entre variáveis de modo descritivo, mas não simbólico, os alunos israelitas tendem a expressar tais relações simbolicamente desde o 7.º e 8.º anos. Estes autores exploram as possíveis razões para as diferenças e semelhanças encontradas no estudo, analisando as diferentes abordagens de ensino usadas pelos professores destes alunos. Evidencia-se, portanto, que as abordagens de ensino de tópicos algébricos concorrem para o surgimento destas dificuldades, sendo também uma via por onde se pode promover maior compreensão do uso da linguagem algébrica (Weinberg et al., 2016).

Metodologia de investigação

A investigação apresentada neste artigo segue a abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan e Biklen, 1994) e concretiza-se a partir da realização de entrevistas com alunos de 9.º ano de uma escola pública em Portugal. As entrevistas, realizadas pela primeira autora (designada por investigadora), ocorreram em contexto de realização individual de tarefas de cunho algébrico e as resoluções e justificações orais dos alunos, documentadas na investigação, contribuem para a reflexão acerca da questão de saber como se caracteriza o uso da linguagem algébrica pelos alunos. Os participantes da investigação são seis alunos de uma mesma turma de 9.º ano, os quais foram convidados por indicação da professora de Matemática, que lecionava nesta turma há três anos. O critério estabelecido para este convite baseia-se na abrangência de alunos de diferentes níveis de desempenho em Matemática, de modo a obter um conjunto de dados diversificados, considerando que alunos de diferentes níveis de desempenho podem apresentar aspetos distintos no uso da linguagem algébrica. O conhecimento que a professora de Matemática da turma tem sobre o perfil de cada aluno foi, portanto, fundamental na escolha dos participantes. A partir dele, foi possível vislumbrar o perfil de cada aluno e da turma onde estão inseridos. Trata-se de uma turma com um ambiente de trabalho produtivo, onde a maioria dos alunos demonstra interesse pelas atividades propostas e não há histórico de reprovações. Os seis alunos são aqui identificados com os nomes fictícios de Maria e Rosa (ambas com desempenho baixo), Laura e José (desempenho médio), Daniel e Paulo (desempenho elevado e grande interesse pela Matemática).

Cada aluno participou em duas entrevistas individuais, ambas realizadas no primeiro trimestre do ano letivo de 2018-2019, com intervalo de cerca de um mês entre elas. Os dados da primeira entrevista foram utilizados para aprimorar as questões da segunda entrevista, que visava clarificar aspetos que tivessem ficado por perceber na entrevista anterior. Em cada entrevista foi apresentada ao aluno uma tarefa, composta por quatro questões de natureza distinta e que poderiam possibilitar o uso de diferentes estratégias. Pretendia-se suscitar a comunicação de ideias, por isto, após a leitura e a realização de algum trabalho autónomo pelo aluno em cada questão, teve lugar um diálogo entre aluno e investigadora, onde este era convidado a explicar o modo como pensou ou a fazer perguntas.

A questão discutida neste artigo foi resolvida pelos alunos na primeira tarefa. Trata-se de um problema geométrico (Figura 1) onde o aluno deveria identificar se as duas figuras apresentadas têm a mesma medida de área e representar, por meio de expressões algébricas, a diferença entre elas.

TAREFA 1

1) As duas figuras são construídas com segmentos de comprimentos a e b.

Figura 1 Figura 2

a) As partes sombreadas das duas figuras têm a mesma medida de área? Explica o teu raciocínio recorrendo a palavras e/ou desenhos.

b) Escreve expressões algébricas para representar a medida de cada área:

Área Sombreada	Expressão
Figura 1	
Figura 2	

c) Qual é a diferença das medidas das duas áreas?

Figura 1. Tarefa 1

A tarefa, tendo essencialmente um caráter algébrico, foi construída com o intuito de possibilitar o uso de estratégias distintas, em particular na alínea *a*). Os alunos poderiam comparar as suas áreas, por exemplo, pela contagem de retângulos de medida de área ab e b^2 (Figura 2), a partir das semelhanças nas formas e da área do quadrado de lado b, ou a partir de adições algébricas que indicassem a medida de cada área e da sua diferença. A multiplicidade das respostas dadas pelos alunos e a riqueza dos dados advindos da resolução desta questão na entrevista, justificam a nossa opção pela sua discussão neste artigo, visando responder ao nosso objetivo de investigação.

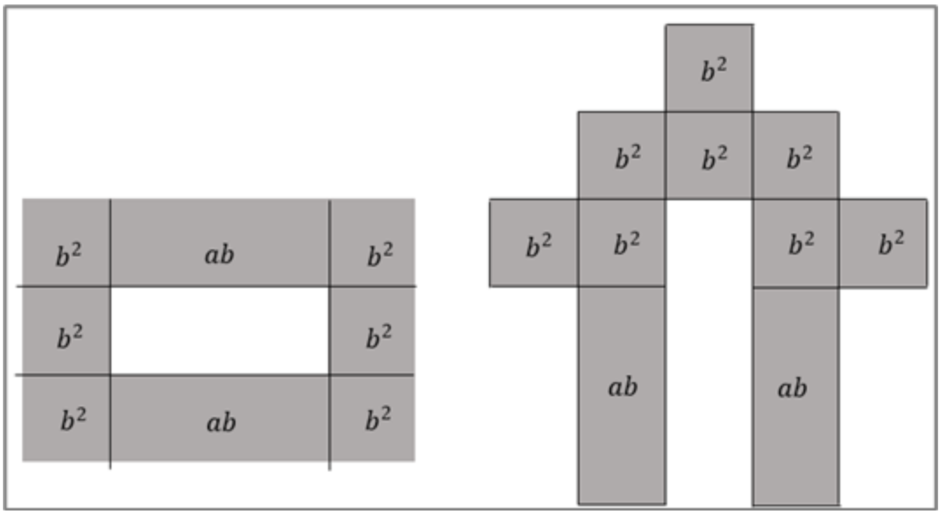


Figura 2. Estratégia possível (contagem).

A recolha de dados, portanto, teve por base as entrevistas individuais, com recurso à gravação áudio da sua resolução oral, e a recolha das resoluções escritas da tarefa. A análise de dados foi orientada por um conjunto de categorias e unidades de análise (Tabela 2) que surgem a partir da literatura neste tema e das diversas características do sentido de símbolo (Arcavi, 1994; Arcavi et al., 2017; Kop et al., 2020). As estratégias usadas pelos alunos podem ser significativas no que refere à adoção dos símbolos e de como os alunos os usam para resolver a questão e justificar suas respostas. Observamos os significados que atribuem aos símbolos e expressões, tendo em conta ainda dificuldades que podem ter na leitura dos símbolos. Consideramos, em particular, as dificuldades apresentadas pelos alunos na criação de expressões algébricas e na manipulação algébrica a fim de ver quais são os principais obstáculos que enfrentam ao lidar com a linguagem algébrica.

Tabela 2
Categorias e Unidades de Análise

Categorias de Análise	Unidades de Análise
Estratégias	Resolução
	Justificação
Significados	Atribuídos aos Símbolos
	Atribuídos às expressões
Dificuldades	Criação de expressões algébricas
	Manipulação algébrica

RESULTADOS

Analisamos, em seguida, características presentes no trabalho dos alunos ao resolverem a tarefa. Os dados são apresentados a partir de três pontos, que consideram aspetos comuns das resoluções e a complexidade de ideias relacionadas nas resoluções. Primeiro, no *ponto de partida,* apresentamos episódios relativos à interpretação do contexto do problema e à sua representação por meio da linguagem algébrica. No segundo ponto, *obstáculos no caminho*, apresentamos episódios relativos à manipulação da linguagem algébrica. No terceiro ponto, *caminhos alternativos*, apresentamos episódios relativos ao uso de estratégias distintas para resolver o problema. Em cada ponto, exploramos estratégias, significados e dificuldades evidenciados pelos alunos visando responder ao objetivo de investigação.

Ponto de partida

Interpretar a situação proposta e dar significado aos símbolos a e b no contexto dado são fundamentais na resolução do problema. Esta foi uma dificuldade apresentada inicialmente por Maria, que demorou bastante lendo a questão e, em seguida, perguntou o que seriam estas letras.

Maria: Aqui o comprimento a é de qual? O a? Como assim? Comprimento b...

Investigadora: O a é este tamanho (aponta a legenda).

Maria: Ah, OK! Então, isto é a (aponta a figura).

Esta dificuldade inicial na compreensão do significado dos símbolos a e b foi superada a partir da observação da figura, de modo que, ao responder à primeira alínea, relativamente a qual das figuras tem maior área, Maria percebeu que a área da figura 2 excede a da figura 1 em dois quadrados. A aluna não recorreu a expressões algébricas para justificar sua afirmação (na alínea *a*), mas baseou-se na comparação informal das figuras para explicar sua resposta, usando linguagem verbal e gestos ao apontar partes da figura.

Investigadora: Qual das duas áreas é maior?

Maria: É esta (Figura 2).

Investigadora: Porquê?

Maria: Vê-se! Por exemplo, se tirarmos este (quadrado lateral de lado b) vamos ver que este depois vai juntar aqui (em baixo, na Figura 2) e é igual a este (Figura 1). E sobravam estes dois quadrados. Então significa que este (Figura 2) é maior.

Rosa, por outro lado, interpretou corretamente o enunciado e não teve dificuldades em dar significado a a e b no problema, explicitando o modo como percepcionou estes símbolos.

Investigadora: O que significam o a e o b?

Maria: O a e o b, os comprimentos! Não diz o valor, então mete-se as letras.

O registo de sua resolução, na Figura 3, mostra que a aluna recorreu imediatamente à criação de expressões algébricas. Em sua estratégia, ainda na alínea a, não teve atenção a possibilidade de comparação de aspetos visuais das figuras.

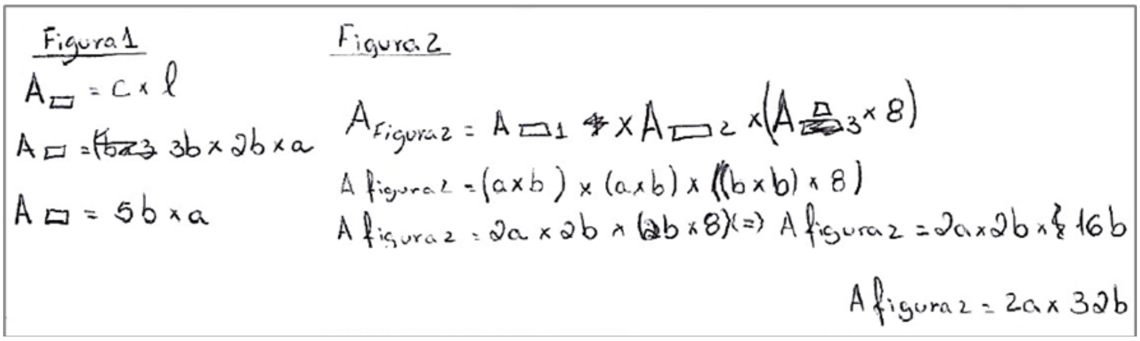


Figura 3. Resolução de Rosa.

A criação de expressões sugere que a aluna teve a noção de que estas podiam representar a área de cada figura. Rosa indicou o produto $c \times l$ para o cálculo de área, mas escreveu $2b \times a$ como o comprimento na figura 1, em vez de $2b + a$, e não se referiu ao retângulo branco que não faz parte da área sombreada. Para a figura 2, representou corretamente a área de dois retângulos e de oito quadrados e pretendia juntar as expressões, porém escreveu o produto destas áreas em vez da sua soma. Observamos que a aluna respondeu que o produto $(a \times b) \times (a \times b)$ é igual a $2a \times 2b$ e que $3b \times 2b$ é igual a $5b$, evidenciando uma contagem dos termos a e b (Figura 3). O uso incorreto de dobro e quadrado ao referir-se a $2b$ em vez de b^2, também surge no diálogo da investigadora com Rosa, quando ela expressou em linguagem verbal que $b \times b$ é lado vezes lado, mas não associou isto ao quadrado de b e sim ao seu dobro.

Rosa: Agora aqui é que eu não consigo. É $a \times b$ depois $b \times b$, que é lado vezes lado.

Investigadora: Mas, neste caso, lado vezes lado vai dar… (espera pela resposta).

Rosa: $2b$?

A criação de expressões que representassem as medidas de área das figuras também foi uma dificuldade para Maria na alínea b, onde a aluna somou as medidas de comprimento a e depois as medidas de comprimento b, contando-as oralmente nas figuras, e expressou a multiplicação dos monómios obtidos na contagem (Figura 4).

Área Sombreada	Expressão
Figura 1	Figura1 area = 2a X 10b
Figura 2	Figura2 area = 4a x 13b

Figura 4. Resolução de Maria (alínea b).

Na estratégia para o cálculo da diferença das medidas de área (na alínea *c*), ambas as alunas se basearam na comparação das expressões obtidas anteriormente e na realização de uma subtração. É importante destacar que Maria não relacionou o seu argumento inicial, de que sobravam dois quadrados na figura 2 em comparação com a figura 1, com o cálculo da diferença.

Vemos assim que duas estratégias distintas são usadas pelas alunas na alínea a: a comparação dos aspetos visuais das figuras e a criação imediata de expressões algébricas. No primeiro caso, Maria tira partido da reflexão informal sobre o problema para resolvê-lo parcialmente, já que verbaliza que "sobravam dois quadrados", mas não indica a medida da área excedente. No segundo caso, Rosa evidencia uma noção de que expressões algébricas poderiam representar o problema e que usá-las seria conveniente ou facilitador. Na criação das expressões algébricas ambas as alunas tiveram dificuldades em expressar as relações de multiplicação e adição presentes na situação. O uso indiscriminado da multiplicação evidencia uma dificuldade num conceito de Aritmética, a multiplicação. Vemos, pelas respostas das alunas, que esta dificuldade no âmbito da Aritmética comprometeu a criação das expressões algébricas, em particular a representação correta das relações expressas no contexto. Destacamos que as justificações dadas pelas alunas são maioritariamente de caráter simbólico e que Rosa atribuiu um significado adequado aos símbolos a e b, o que não fica claro no caso de Maria. O significado atribuído pelas alunas às expressões parece ligar-se essencialmente a procedimentos realizados com os símbolos, como a contagem de termos e a multiplicação de monómios que representam medidas de área. Relativamente à manipulação algébrica, destacam-se as dificuldades em multiplicação de monómios e, em particular, o uso de dobro em vez de quadrado ($2b$ em vez de b^2, em situações onde há o produto $b \times b$).

Obstáculos no caminho

A estratégia usada por Paulo e Daniel baseou-se na criação de expressões algébricas para representar as medidas de área de cada figura. Ambos os alunos interpretaram a situação e começaram imediatamente a escrever expressões algébricas para representar as medidas de área das figuras (Figura 5).

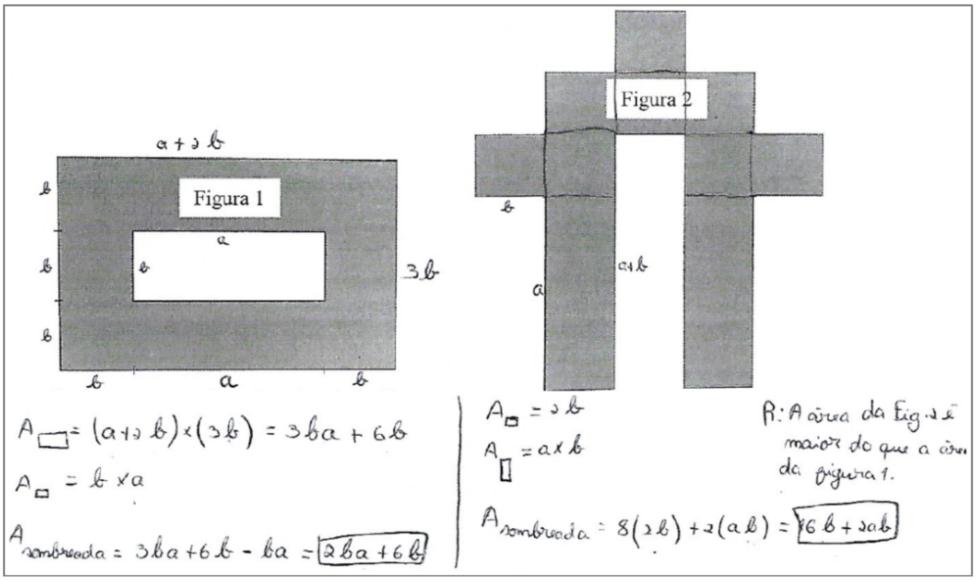


Figura 5. Resolução de Daniel.

Diferente das alunas do ponto anterior, estes alunos representaram as relações de multiplicação, adição e subtração expressas no contexto do problema de forma adequada, sem dificuldades na criação das expressões. Ao longo da resolução, entretanto, os alunos tiveram dificuldades na manipulação algébrica que comprometeram as expressões obtidas e os significados que lhes atribuiram. Daniel escreveu a expressão $3b \times (2b + a)$ para representar a área do retângulo maior na figura 1, mas errou ao calcular o produto dos monómios $2b$ e $3b$. Do mesmo modo, ao calcular a área da figura 2, expressou corretamente a área dos retângulos maiores, ab e identificou que havia oito quadrados de lado b, mas no cálculo de sua área escreveu $2b$ em vez de b^2.

Daniel: Eu fiz a área do retângulo todo depois fiz a área do pequenino e subtraí, e dá a área sombreada da figura 1 … Aqui fiz a área destes quadrados e depois fiz a área destes retângulos que estão aqui e depois somei … Como são oito quadrados, fiz oito vezes a área de um quadrado e duas vezes a área do retângulo.

Vemos no diálogo que Daniel, assim como veremos adiante no trabalho de Paulo, atribuiu significados adequados às expressões na fase de sua criação, mas ao longo da resolução, e com os erros cometidos na manipulação algébrica, não percebe muito bem o que pode significar a expressão resultante. Questionado sobre o seu resultado, Daniel apoiou-se na manipulação simbólica para justificar sua resposta, e não evidenciou um sentido crítico para o significado da expressão resultante:

Daniel: OK, já sei. Esta (Figura 2) tem mais $10b$ do que esta (Figura 1).

Investigadora: Porquê $10b$?

Daniel: Porque aqui está $2ba$ e $2ab$, que é a mesma coisa, e depois aqui está, na figura 1, $6b$ e na figura 2, $16b$.

Para o cálculo da área da figura 1, Paulo também pretendia calcular a medida de área do retângulo maior e subtrair dela a medida de área do retângulo menor (Figura 6).

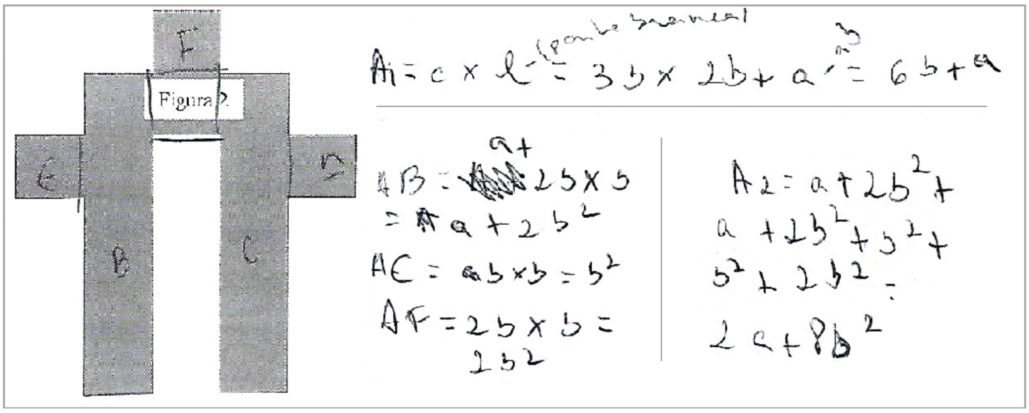


Figura 6. Resolução de Paulo (Alínea a).

Ele escreveu $3b \times 2b + a$, multiplicou $3b$ apenas por $2b$, como era esperado uma vez que não colocou parênteses, e calculou este produto como $6b$. Além disso, o aluno esqueceu-se de subtrair ab, acrescentando isto aos cálculos apenas no final. Para a figura 2, calculou a área por partes identificando corretamente a largura e o comprimento em cada retângulo, mas não usou parênteses, o que o levou ao erro no cálculo do produto de $a + 2b$ por b. Verificamos que aqui, calcula corretamente o produto $2b \times b$. O aluno também expressou dúvida quanto ao uso de parênteses em sua resolução da alínea *c*, onde calculou a diferença das duas medidas de área (Figura 7).

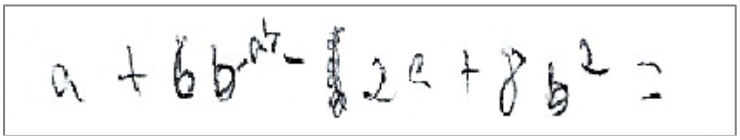


Figura 7. Resolução de Paulo (Alínea c).

Ambos os alunos atribuíram o significado de medidas de comprimento às expressões $3b$ e $a + 2b$, e construíram expressões significativas para si, mas não conseguiram atribuir um significado adequado às expressões resultantes. Uma vez que obtiveram as expressões $10b$, $a + 6b$ e $2a + 8b^2$ como medidas de área, não verificaram a plausibilidade destas respostas no contexto do problema:

Paulo:	São áreas diferentes. Esta aqui é maior, a figura 2.
Investigadora:	E como sabes isso?
Paulo:	Acho eu! Porque aqui (figura 1) é $a + 6b$ e aqui (figura 2) dá $2a + 8b^2$.

Vemos assim que os alunos veem o contexto do problema representado nas estruturas das expressões algébricas que criam. Compreendem que tais expressões podem representar as medidas de área, mas as dificuldades na multiplicação de monómios (o uso de $2b$ em vez de b^2 e calcular $3b \times 2b$ como $6b$), bem como dúvidas quanto ao uso de parênteses constituíram obstáculos determinantes nas suas resoluções. Os alunos atribuíram significados adequados aos símbolos e às expressões na fase inicial da resolução, mas ao longo das manipulações algébricas não há evidências de revisão dos significados das expressões, bem como de uma reflexão crítica sobre as expressões obtidas. Relativamente às estratégias usadas, destacamos que os alunos, ao focarem-se no procedimento de criação e manipulação das expressões algébricas, não tiveram a iniciativa de comparar as figuras e não identificaram que, na composição da figura 2, há mais dois quadrados de lado b do que na figura 1, o que poderia ser percecionado a partir da comparação informal das figuras. Desse modo, ao afirmarem que a área da figura 2 é maior que a área da figura 1, as suas justificações estão baseadas em procedimentos algébricos que, apesar de apropriados, resultaram em expressões incorretas.

Caminhos alternativos

Como vimos nos pontos anteriores, a estratégia de criação de expressões algébricas que representem as medidas das áreas das figuras foi usada imediatamente por Rosa, Daniel e Paulo. Maria, Laura e José, porém, focaram-se primeiramente na comparação informal das figuras e concluíram que a medida de uma das figuras excede a da outra em dois quadrados, justificando esta afirmação por meio de linguagem verbal (Figura 8).

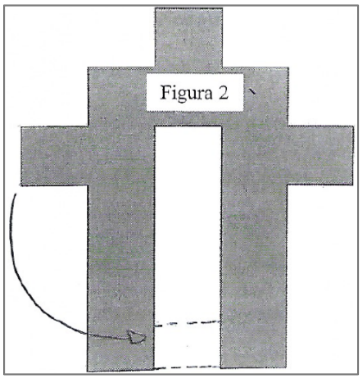
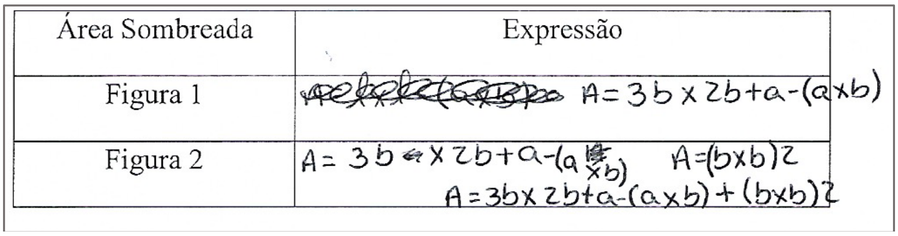


Figura 8. Estratégia de Laura.

Laura: As áreas não têm a mesma medida porque a figura 2, esta parte aqui se for para aqui, fica a mesma imagem que a figura 1. E fica a sobrar estes dois depois, e este (Figura 2) tem mais área do que este (Figura 1).

José: Podemos ver que as figuras são semelhantes, mas foram acrescentados três quadrados e um foi tirado daqui. Logo, se colocássemos este quadrado aqui, teríamos estes dois a mais.

A partir daqui, Laura e José foram mais adiante do que Maria uma vez que, autonomamente, usaram a linguagem algébrica para expressar o excedente de dois quadrados de lado b na figura 2. Laura fê-lo por meio da expressão $(b \times b)2$ (Figura 9) e José tentou fazê-lo por meio da expressão $2b \times 2$ (Figura 10).



Área Sombreada	Expressão
Figura 1	A=3b x 2b+a-(a x b)
Figura 2	A= 3b x 2b+a-(a x b) A=(b x b)2 A=3b x 2b+a-(a x b)+(b x b)2

Figura 9. Resolução de Laura (alínea b).

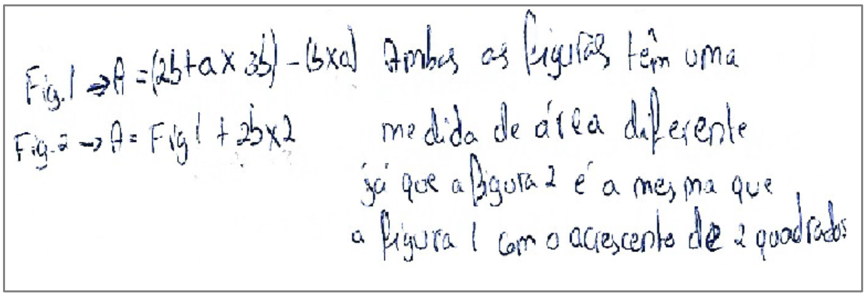
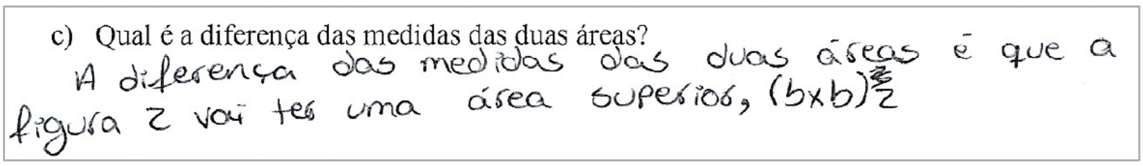


Fig.1 → A =(2b+a x 3b) - (b x a) Ambas as figuras têm uma medida de área diferente
Fig.2 → A = Fig1 + 2b x 2
já que a figura 2 é a mesma que a figura 1 com o acrescento de 2 quadrados

Figura 10. Resolução de José (alínea a).

Os alunos usaram esta ideia inicial para representar a medida de área da figura 2, de modo que atribuíram às expressões $(b \times b)2$ e $2b \times 2$ o significado de medida da área excedente. José escreveu que $b \times b$ é igual a $2b$, e ambos os alunos não usaram parênteses ao multiplicar a largura $3b$ pelo comprimento $2b + a$, um erro já observado nas resoluções de outros alunos. Laura não simplificou as expressões algébricas que criou, deixando-as exatamente como pensou e, como vemos na alínea *c* (Figura 11), mostrou dúvida quanto a multiplicar por 2 ou elevar ao quadrado.



c) Qual é a diferença das medidas das duas áreas?
A diferença das medidas das duas áreas é que a figura 2 vai ter uma área superior, (b x b)2

Figura 11. Resolução de Laura (alínea c).

Laura continuou usando sua estratégia inicial para indicar a diferença das medidas de área. José, porém, não associou o facto de haver dois quadrados de lado b a mais na figura 2 à diferença de medidas de área, escrevendo uma nova expressão para a área da figura 2 a partir de soma de áreas e calculando a diferença das medidas de área por meio do uso do sinal de menos (Figura 12).

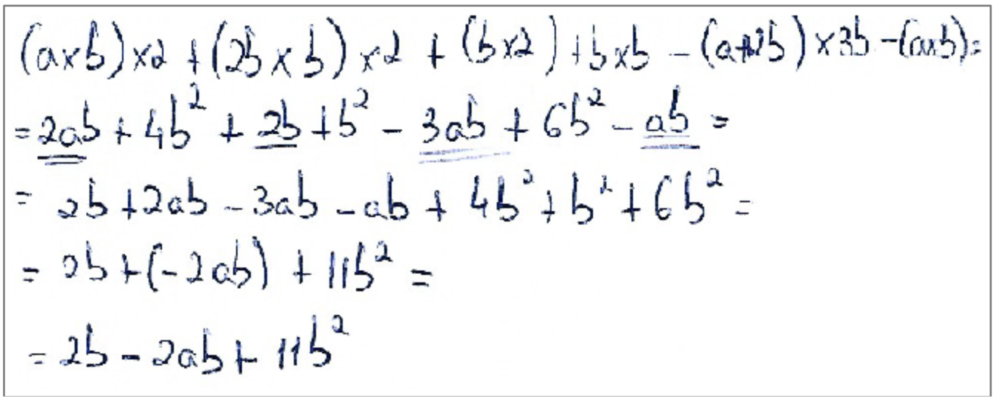
José: Aqui, na diferença das medidas, tenho de fazer a área dos dois e a diferença entre eles?

Investigadora: Tens de dizer qual é a diferença das duas medidas, mas sabes que a área da figura 2 era a mesma da figura 1 acrescida daqueles dois quadrados.

José: Sim. Isto aqui é a área da figura 1. Se pegar neste quadrado meto aqui, fica a área da figura 1 e depois tenho de fazer estes dois.

Investigadora: Sobram dois, não é?

José: Sim, sobram dois … Agora, para saber a diferença, vou ter de fazer esta equação menos esta.



$(a \times b) \times 2 + (2b \times b) \times 2 + (b \times 2) + b \times b - (a+2b) \times 3b - (a \times b) =$
$= 2ab + 4b^2 + 2b + b^2 - 3ab + 6b^2 - ab =$
$= 2b + 2ab - 3ab - ab + 4b^2 + b^2 + 6b^2 =$
$= 2b + (-2ab) + 11b^2 =$
$= 2b - 2ab + 11b^2$

Figura 12. Resolução de José (alínea c).

Notamos que José escreveu uma expressão que representa a medida da área da figura 2 menos a medida da área da figura 1, mas não usou parênteses, incorrendo em erro na adição algébrica. O aluno expressou corretamente a área de cada parte na alínea *b*, com exceção de uma, onde supôs que $3b$ é igual a a, usando $b \times a$ em vez de $b \times 3b$, e confundiu-se na cópia da expressão elaborada na alínea *b*, substituindo o termo $b \times a$ por $b \times 2$ na alínea *c*. É importante destacar que os erros cometidos na alínea *a*, não usar parênteses ao multiplicar $3b$ por $2b + a$ e afirmar que $b \times b$ é igual a $2b$, não foram cometidos novamente. Durante a sua resolução, o aluno refere que, ao subtrair uma medida de área maior de uma medida de área menor, obtém um número negativo, o que revela uma monitorização das suas ações relativamente ao contexto do problema:

José: O valor vai dar negativo assim.

Investigadora: Porquê?

José: Porque sabendo que a figura 1 tem uma área menor do que a figura 2, subtraindo assim a figura 1 com a dois, depois aqui o resultado será negativo.

No entanto, assim como os demais alunos, ao obter a expressão $2b - 2ab + 11b^2$ para a diferença das medidas de área, o aluno não evidenciou sentido crítico sobre a plausibilidade deste resultado no contexto do problema. A justificação em linguagem verbal, usada por José no início da sua resolução, foi deixada de lado em favor de uma justificação baseada na manipulação simbólica, onde o aluno subtraiu as duas expressões criadas para representar as medidas de área. É importante notar que não comparou o resultado obtido com sua primeira conclusão, explicitada em linguagem verbal.

Neste ponto vemos que os alunos usaram uma estratégia baseada na comparação das figuras e que isto contribuiu para que atribuíssem significados adequados aos símbolos e às expressões algébricas criadas. As justificações foram dadas tanto em linguagem verbal como em linguagem algébrica, sendo que José, ao longo de sua resolução, priorizou os procedimentos algébricos e abandonou sua conclusão inicial dada em linguagem verbal. Este aluno expressou as medidas por meio da soma ou diferença de medidas de área na alínea b, mas a partir daí não evidenciou uma revisão dos significados dos símbolos e das expressões, nem uma reflexão crítica sobre a expressão resultante. O uso de parênteses é uma dificuldade apresentada pelos alunos no âmbito da criação de expressões e, relativamente à manipulação algébrica, destacam-se as dificuldades que têm na multiplicação de monómios e, em particular, o uso de $2b$ em vez de b^2, em situações em que há o produto $b \times b$.

Discussão

A tarefa possibilitou que os alunos investigassem as semelhanças e diferenças entre duas figuras, comparassem suas medidas de área e as representassem por meio de expressões algébricas. Suas resoluções escritas e justificações orais revelam algumas características sobre o modo como usaram a linguagem algébrica, respondendo ao objetivo de investigação. Nas estratégias, vemos tanto a reflexão informal inicial e a comparação de aspetos visuais das figuras antes do uso de símbolos, como a resolução primariamente simbólica, que consiste na criação imediata de expressões algébricas que representem as medidas de área. Na primeira, e em particular no caso de Laura, vemos a utilidade de refletir informalmente sobre um problema antes de o abordar simbolicamente (Arcavi et al., 2017). Na segunda, os alunos usaram a linguagem algébrica como ferramenta para descobrir se as figuras tinham a mesma medida de área. Entre os alunos que escreveram expressões algébricas no início de suas resoluções, as justificações foram dadas essencialmente por meio de escrita simbólica, ao passo que os demais alunos apresentaram também argumentos em linguagem verbal e por meio de desenhos.

Os alunos evidenciaram uma noção imediata dos significados dos símbolos, referindo que a e b eram medidas de comprimento, à exceção de uma aluna. Relativamente aos significados das expressões, observamos que os alunos que têm baixo nível de desempenho em Matemática (segundo a professora da turma) atribuíram às expressões significados ligados a procedimentos, contagem de termos, junção de símbolos e multiplicação de termos. Vemos que os alunos atribuíram significados às suas expressões algébricas a partir do que estavam aptos a perceber (Sfard e Linchevski, 1994). O conceito de área e o produto de comprimento por largura perpassa as expressões iniciais criadas pelos demais alunos, que representaram subtração e adição de medidas de área. Estas expressões iniciais, que tinham significados claros para os alunos com níveis de desempenho médio e alto, podem sugerir ainda uma consciência de que estas expressões algébricas representam com exatidão o contexto do problema (Arcavi et al., 2017). Ao longo das resoluções, e focados em realizar as rotinas de manipulação das expressões algébricas, três destes alunos não demonstraram rever os significados das expressões equivalentes que encontraram, nem mesmo ter um sentido crítico quanto às respostas obtidas (Arcavi et al., 2017). Estes resultados sugerem, assim como indicado por Palatnik e Koichu (2017), a necessidade de explorar os significados das expressões algébricas no contexto de tarefas.

Algumas dificuldades se destacam no que se refere a criar expressões. nomeadamente a dificuldade em expressar relações de adição e a dificuldade relacionada com o uso de parênteses em multiplicações onde há uma adição num dos fatores. No primeiro aspeto vemos o caso de Maria e Rosa, que parecem ter usado indiscriminadamente a multiplicação e a contagem de termos. Este resultado, que está de acordo com o encontrado por Sharpe (2019) ao apontar a dificuldade de criar expressões, sugere que a expressão de relações presentes no enunciado do problema pode ser uma das possíveis origens de dificuldade. Relativamente à manipulação algébrica, vemos que o produto de monómios foi uma dificuldade significativa no trabalho dos participantes, bem como o uso de dobro em vez de quadrado. Os participantes que tinham bom desempenho em Matemática também cometeram estes erros, tal como aconteceu no estudo de Ramos et al. (2021). No nosso estudo, vimos que estes alunos ora calcularam tais multiplicações corretamente, ora incorretamente.

Ao relacionar estratégias de resolução e significados atribuídos às expressões, é importante observar que apenas José e Laura usaram a linguagem algébrica para representar que uma das figuras tinha dois quadrados de lado b a mais que a outra. Estes alunos exploraram tanto a realização de procedimentos algébricos, como a reflexão informal (Arcavi, 1994). Entre os outros alunos, podemos ver o uso de estratégias válidas e a criação de expressões com significados adequados, mas que, devido a erros na manipulação, não os conduziram à diferença correta das duas medidas de área. Nesta perspetiva, consideramos a importância da interrupção de rotinas de manipulação para refletir informalmente, questionar, rever os significados das expressões equivalentes e avaliar criticamente os resultados obtidos (Arcavi et al., 2017). O caso de José, que se afastou do seu resultado obtido por meio da comparação, em favor da subtração de duas expressões, pode ser significativo no tocante à valorização dos procedimentos algébricos diante de outras estratégias.

As estratégias e os significados que emergem no contexto da realização desta tarefa revelam que, ao nível da adoção de símbolos (Tabela 1), os alunos podem apresentar algumas características de sentido de símbolo (Arcavi, 1994). Em alguns alunos vemos, uma consciência de que é possível representar informações por meio de expressões algébricas e algum reconhecimento da utilidade de refletir informalmente sobre um problema antes de o abordar simbolicamente. Existem também os casos onde houve transição entre o uso de procedimentos algébricos e reflexão informal, destacando que apenas nestes casos houve a resolução correta e completa do problema. Este resultado, em particular, sugere que transitar entre procedimentos algébricos mais automáticos e práticas como refletir, questionar e comparar podem ser úteis aos alunos na resolução de tarefas que envolvem o uso da linguagem algébrica. Na leitura dos símbolos (Tabela 1), os significados dos símbolos e das expressões criadas pelos alunos, apontam uma disposição limitada de busca por significados pelos alunos, nomeadamente um sentido crítico quanto aos resultados, consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos e de expressões equivalentes durante a resolução de um problema.

Conclusão

As resoluções escritas e as justificações orais apresentadas pelos alunos na realização desta tarefa revelam características no seu uso da linguagem algébrica. Os resultados foram discutidos a partir de aspetos do *sentido de símbolo* (Arcavi, 1994). Vemos que alunos de 9.º ano podem demonstrar consciência de que é possível representar informações por meio de expressões simbólicas e usam-nas na resolução de problemas. Os participantes desta investigação atribuíram significados adequados a símbolos e expressões, em fases iniciais da resolução de um problema, mas não apresentaram disposição de busca de significados ao longo da resolução, por meio da revisão de significados de expressões equivalentes e avaliação crítica de resultados obtidos. Alguns alunos buscaram refletir informalmente sobre o problema antes de o abordar simbolicamente e, ao longo de sua resolução, há evidência de transição entre procedimentos algébricos e momentos de reflexão informal, questionamento e comparação. Nestes alunos vimos uma maior utilização de justificações verbais, além de simbólicas, do que nos alunos que exploraram com mais confiança a criação de expressões algébricas na resolução do problema. Relativamente às dificuldades, os resultados sugerem que expressar relações de adição e multiplicação envolvidas no problema, constituiu o principal obstáculo para os participantes que tiveram dificuldade na criação de expressões algébricas. Na manipulação algébrica, o uso de parênteses e o produto de monómios destacaram-se como as principais dificuldades dos participantes.

As características apontadas nesta investigação elucidam e ilustram o modo como alunos de 9.º ano podem lidar com a linguagem algébrica. O principal contributo deste artigo para a compreensão neste tema é o fato de se tratar de uma investigação baseada na noção de sentido de símbolo (Arcavi, 1994) em produções de alunos do 9.º ano de escolaridade. A ausência de um sentido de símbolo desenvolvido, apresentada mesmo por alunos de anos de escolaridade mais avançados (Kop et al., 2020), aponta a necessidade de desenvolvê-lo ao longo da trajetória dos alunos tal como sugerem Arcavi et al. (2017). Ao sugerir que alunos de 9.º ano podem apresentar algumas das capacidades que caraterizam o sentido de símbolo, este estudo destaca as potencialidades evidenciadas pelos alunos participantes da investigação e enfatiza a necessidade de desenvolver o sentido de símbolo neste ano de escolaridade.

Além disso, vemos a partir das produções de José e de Laura, o papel da interrupção de procedimentos algébricos automáticos em favor de momentos para refletir, questionar, buscar e rever significados, e avaliar criticamente resultados (Arcavi et al., 2017), em contexto de realização de tarefas que envolvem o uso da linguagem algébrica. Sublinhamos, assim, a importância da realização de momentos de reflexão informal, questionamento e busca por significado para a aprendizagem de tópicos algébricos e para o uso da linguagem algébrica com compreensão pelos alunos.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, L. Fonseca, A. Barbosa, T. Pimentel, P. Canavarro e L. Santos (Eds.), Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp. 29-48). SEM-SPCE.

Arcavi, A., Drijvers, P., e Stacey, K. (2017). The learning and teaching of Algebra: Ideas, insights and activities. Routledge.

Ayalon, M. e Wilkie, K. (2020). Students' identification and expression of relations between variables in linear functions tasks in three curriculum contexts. *Mathematical Thinking and Learning, 22*(1), 1-22. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1619221

Bogdan, R., e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Branco, N., e Ponte, J. (2012). The study of pictorial sequences as a support to the development of algebraic thinking. *Far East Journal of Mathematical Education, 8*(2), 101-135.

Fey, J. T. (1990). Quantity. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 61-94). National Academy Press.

Graham, K., Cuoco, A., e Zimmermann, G. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making in Algebra*. National Council of Teachers of Mathematics.

Izsák, A. (2011). Representational competence and algebraic modeling. Em J. Cai, e E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 239-256). Springer. https://doi:10.1007/978-3-642-17735-4

Kaput, J., e Shaffer, D. (2002). On the development of human representational competence from an evolutionary point of view. Em K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. v. Oers, e L. Verschaf (Edits.), Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education (pp. 277-293). Kluwer.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8(*1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Em F. Lester (Ed.), *Second handbook of reseach in mathematics teaching and learning* (pp. 707-756). NCTM.

Kilhamn, C. (2013, Fevereiro, 6-10). Hidden differences in teachers' approch to algebra – a comparative case study of two lessons. Em B. Ubuz, C. Haser, e M. A. Mariotti (Eds.) *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Antalya Turky: CERME 8

Kop, P., Janssen, F., Drijvers, P., e van Driel, J. (2020). The relation between graphing formulas by hand and students' symbol sense. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 137-161. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09970-3

MEC (2013). *Programa e Metas curriculares: Ensino Básico*. Ministério da Educação e Ciência.

Moura, A., e Sousa, M. (2005). O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica:dois olhares diferentes. *Zetetiké, 13*(24), 11-46.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Palatnik, A., e Koichu, B. (2017). Sense making in the context of algebraic activities. *Educational Studies in Mathematics, 95*, 245-262. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9744-1

Pinkernell, G., Düsi, C., e Vogel, M. (2017, Fevereiro, 1-5). Aspects of proficiency in elementary algebra. Em T. Dooley e G. Gueudet (Eds.) *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Dublin: CERME10.

Ponte, J. P., Branco, N., e Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. DGIDC.

Ponte, J., Branco, N., Quaresma, M., e Azevedo, A. (2013). Investigações e explorações como parte do trabalho quotidiano na sala de aula. *Revista de Educação em Ciências e Matemáticas. Amazônia, 9*, 5-22.

Ramos, L., Guifarro, M., e Casas, L. (2021). Dificultades en el aprendizaje del álgebra, un estudio con pruebas estandarizadas. *Bolema, 35*(70), 1016-1033. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a21

Sfard, A., e Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Sharpe, S. (2019). An algebraic translation task solved by grade 7–9 students. *Mathematical Thinking and Learning, 21*(1), 78-84. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1564970

Tabach, M., e Friedlander, A. (2017). Algebraic procedures and creative thinking. *ZDM Mathematics Education, 49*, 53-63. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0803-y

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. Em A. Coxford e A. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). NCTM.

Weinberg, A., Dresen, J., e Slater, T. (2016). Students' understanding of algebraic notation: A semiotic systems perspective. *Journal of Mathematical Behavior, 43*, 70-88. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.06.001

Wilkie, K. (2019). Investigating secondary students' generalization, graphing, and construction of figural patterns for making sense of quadratic functions. *Journal of Mathematical Behavior, 54*, 1-17. https://doi:10.1016/j.jmathb.2019.01.005

Zorn, P. (2002, Julho, 1-6). Algebra, Computer Algebra and Mathematical Thinking. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Hersonissos, Crete: J. Wiley. http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/ICTM2_Proceedings_Table_of_Contents.html

Kelly Aguiar
Universidade de Lisboa, Portugal
kelly.aguiar@edu.ulisboa.pt

João Pedro da Ponte
Universidade de Lisboa, Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt

Joana Mata-Pereira
Universidade Católica Portuguesa, Portugal
joanamatapereira@campus.ul.pt

Recebido: fevereiro de 2023. Aceitaram: julho de 2023
doi: 10.30827/pna.v18i4.27382

ISSN: 1887-3987

The use of Algebraic Language in Grade 9: Strategies, Meanings, and Difficulties

Kelly Aguiar, João Pedro da Ponte and Joana Mata-Pereira

The importance of algebra and its centrality in mathematics curricula around the world, contrast with the many learning difficulties that students experience (Arcavi et al., 2017). Despite the studies carried out on this subject in recent decades, problems persist in the context of the use of algebraic language by students and there are scarce investigations regarding designing the way students understand and use algebraic symbols (Weinberg et al., 2016). Thus, it is relevant to know more about how students use the algebraic language to find out, for example, the meanings they attribute to algebraic symbols and expressions, and whether they recognize or use the potential of algebraic language for solving problems. In this article, our aim is to characterize the use of algebraic language by grade 9 students, with regard to their strategies, meanings and difficulties in solving an algebraic task. For answer this question, we carried out an investigation with a group of six grade 9 students from a public school in Portugal, based on interviews in the context of solving tasks of an algebraic nature. Following a qualitative and interpretative approach (Bogdan & Biklen, 1994), we document and discuss students' written solutions and oral justifications, which can be elucidative regarding their perspectives on the use of algebraic language. Analyzed from the point of view of *symbol sense* (Arcavi, 1994), the results show that students use primarily symbolic strategies and strategies based on informal reflection. They attribute adequate meanings to symbols and expressions in the initial phase of solving the problem, but have a limited willingness to revise meanings throughout the solution. The main obstacle in creating algebraic expressions is to express addition and multiplication relations, present in the statement of the problem, taking into account the context. In algebraic manipulation, the main difficulties presented by the students are the use of parentheses and the product of monomials. In addition, in the context of solving tasks involving the use of algebraic language, the students show difficulties in interrupting automatic algebraic procedures by moments to reflect, question, seek and review meanings, and critically evaluate results.