

MODOS DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EDUCACIÓN INFANTIL: EFECTOS DE UN ITINERARIO DE ENSEÑANZA DE PATRONES DE REPETICIÓN

Yeni Acosta y Ángel Alsina

Se desarrolla una Investigación Basada en el Diseño con 24 niños de 4 años para diseñar y validar un itinerario de enseñanza de patrones de repetición y evaluar su efecto a partir del análisis de los modos de pensamiento algebraico (recursivo, relacional y funcional) que movilizan 8 escolares con un Índice de Competencia Matemática (ICM) medio en los contextos más concretos del itinerario. Los resultados muestran: a) una diferencia del 22% de éxito entre contextos concretos y abstractos; b) una mayor presencia de pensamiento recursivo que funcional. Se concluye que la enseñanza de patrones de repetición debe garantizar la transición del pensamiento recursivo al relacional y funcional.

Términos clave: Itinerario de enseñanza; Patrones de repetición; Pensamiento algebraico; Pensamiento funcional; Pensamiento recursivo; Pensamiento relacional

Modes of algebraic thinking in Early Childhood Education: effects of a teaching itinerary of repetition patterns

A Design-Based Research is developed with 24 4-year-old children to design and validate a teaching itinerary of repetition patterns and to evaluate its effect from the analysis of the modes of algebraic thinking (recursive, relational and functional) mobilised by 8 children with an average Mathematical Competence Index (MCI) in the most concrete contexts of the itinerary. The results show: a) a 22% difference in success between concrete and abstract contexts; b) a greater presence of recursive than functional thinking. It is concluded that the teaching of repetition patterns should ensure the transition from recursive to relational and functional thinking.

Keywords: Algebraic thinking; Functional thinking; Recursive thinking; Relational thinking; Repetition patterns; Teaching itinerary

Modos de pensamento algébrico na educação pré-escolar: efeitos de um itinerário de ensino com padrões de repetição

Uma Investigação Baseada em Design é desenvolvida com 24 crianças de 4 anos para conceber e validar um itinerário de ensino de padrões de repetição e avaliar o seu efeito a partir da análise dos modos de pensamento algébrico (recursivo, relacional e funcional) mobilizados por 8 alunos com um Índice de Competência Matemática (ICM) médio nos contextos mais concretos do itinerário. Os resultados mostram: a) uma diferença de 22% de sucesso entre contextos concretos e abstractos; b) uma maior presença do pensamento recursivo do que do funcional. Conclui-se que o ensino de padrões de repetição deve assegurar a transição do pensamento recursivo para o pensamento relacional e funcional.

Palavras-chave: Itinerário de ensino; Padrões de repetição; Pensamento algébrico; Pensamento funcional; Pensamento recursivo; Pensamento relacional

El álgebra temprana o *Early Algebra* a menudo se describe como una puerta de entrada a las matemáticas superiores y como un cambio de paradigma en la manera de abordar la enseñanza del álgebra (Hunter y Miller, 2022). Esta descripción responde al hecho de que, entre otras cosas, aporta un lenguaje y unos modos de pensamiento enriquecidos capaces de crear la base con la que se enseñan las matemáticas. Para Godino y Font (2003), el pensamiento algebraico, concebido como la ciencia de los patrones y el orden, es una forma de razonar que supone establecer generalizaciones y regularidades en diversas situaciones matemáticas. Una idea recurrente en la literatura es conceder importancia a la capacidad de distinguir e identificar la estructura (McGarvey, 2012; Mulligan y Mitchelmore, 2013; Papic et al., 2011; Rittle-Johnson et al., 2017). Para Mason et al. (2009) las estructuras matemáticas son las “propiedades generales que se ejemplifican en situaciones particulares como relaciones entre elementos o subconjuntos de elementos de un conjunto” (p. 10). En este sentido, coincidimos con Lüken y Kampmann (2018) cuando afirman que identificar y analizar patrones y estructuras juega un papel crucial en el aprendizaje de las matemáticas. Según Taylor-Cox (2003), los patrones son la piedra angular del pensamiento algebraico. Sin embargo, uno de los obstáculos para iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico es la tendencia a diseñar tareas que solo promuevan el uso del pensamiento recursivo. Esto significa que, en el contexto de tareas con patrones de repetición, los escolares tienden a enfocarse en los elementos sucesivos de una secuencia para poder predecir o extender solo el elemento que sigue de un conjunto

de elementos ordenados. Por tanto, continúa siendo un desafío para muchos niños ser capaz de abstraer la estructura de repetición o generalizar una relación recurrente de elementos. Precisamente, Tirosh et al. (2017) detectaron que el profesorado de infantil no apuesta por el diseño de tareas que se centren en la estructura de los patrones. Bajo esta mirada, de acuerdo con Twohill (2018), es alarmante pensar que para muchos escolares las habilidades que acompañan el pensamiento algebraico involucionen, en lugar de nutrirse y potenciarse mediante prácticas de aula focalizadas en su desarrollo.

Ante esta problemática, este artículo se centra en la enseñanza de patrones de repetición tomando en consideración, por un lado, la progresión de aprendizaje para patrones de repetición a partir de diversas habilidades, que van desde copiar hasta crear (Acosta et al., 2022b; Pincheira et al., 2022); y, por otro lado, el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), que parte de la base “que el desarrollo del pensamiento matemático en las primeras edades se debería llevar a cabo a través de itinerarios de enseñanza, entendiendo por itinerario una secuencia de enseñanza intencionada” (Alsina, 2022, p. 26). En estas secuencias, los contextos y recursos de enseñanza se organizan con base en el principio de abstracción progresiva, iniciando la enseñanza en lo situacional hasta avanzar hacia lo formal. Considerando estos antecedentes, este estudio sobre el pensamiento algebraico en educación infantil se focaliza en la enseñanza de patrones de repetición. Para ello, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué modos de pensamiento algebraico movilizan escolares de 4 años cuando se implementan tareas de enseñanza con patrones de repetición? De esta pregunta emergen los siguientes objetivos:

- 1) Diseñar, validar e implementar un itinerario de enseñanza para patrones de repetición que contempla tres niveles: a) nivel informal (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos), b) nivel intermedio (recursos literarios y tecnológicos); y c) recursos gráficos.
- 2) Analizar, por un lado, el efecto de dicha enseñanza en cada contexto; y, por otro lado, los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal.

MARCO TEÓRICO

Para fundamentar teóricamente el estudio, se define el pensamiento algebraico, el papel que ejercen los patrones en el desarrollo de este pensamiento, los modos de pensamiento algebraico en educación infantil y las habilidades para hacer patrones de repetición. Se finaliza con el EIEM (Alsina, 2020, 2022) como apoyo metodológico y didáctico para el diseño de tareas con patrones de repetición.

El pensamiento algebraico incluye formas de pensar que permiten “analizar relaciones entre cantidades, notar estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir” (Kieran, 2004, p. 149).

En esta misma línea, Blanton y Kaput (2005) conceptualizan dicho pensamiento como una habilidad mental que permea todas las matemáticas, influyendo en la capacidad de los niños para elaborar conjeturas y justificaciones sobre estructuras y relaciones. Desde esta óptica, autores como Miller et al. (2016) y Rittle-Johnson et al. (2017) consideran la capacidad de identificar regularidades en los patrones como un componente crucial del pensamiento matemático en general y del algebraico en particular. Bajo la influencia de estos autores, en este artículo se define el pensamiento algebraico como un modo de pensamiento multimodal que, mediante la focalización de relaciones y cambio, facilita el análisis, la representación, la justificación y la comprensión de la estructura. En este escenario, los patrones se consideran la puerta de entrada hacia los inicios del pensamiento algebraico en la educación infantil y la piedra angular del mismo (Taylor-Cox, 2003). Cuando hablamos de patrón, autores como Bock et al. (2018) sugieren que pueden variar según su regularidad y contenido; y que, de acuerdo a esta afirmación, los patrones pueden presentar unidades que se repiten, que crecen o que se ordenan de manera estructural o simétrica. En este estudio, se adoptan los patrones de repetición, asumiendo que son una secuencia de elementos ordenados de acuerdo a una estructura o unidad replicable determinada que otorga regularidad y previsibilidad (Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019). Diversos estudios contemporáneos señalan que un desarrollo temprano del patrón y una comprensión de su estructura facilita de manera efectiva el rendimiento matemático y favorece la transición entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional (Dumas et al., 2013; Lüken y Sauzet, 2020; McGarvey, 2012; Miller et al., 2016; Wijns Torbeyns, Bakker, et al., 2019). Según Tsamir et al. (2018) la identificación y análisis de patrones podría favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico y brindar una oportunidad temprana para observar y verbalizar generalizaciones, así como facilitar el acceso al registro simbólico. De esta forma, se podrían enraizar aún más las bases del pensamiento matemático en general y del pensamiento algebraico en particular, que se inicia a partir de una conciencia estructural que se desarrolla en los niños a través de patrones (Larkin et al., 2022; Papic et al., 2011; Wijns, Torbeyns, Bakker, et al., 2019).

Una primera aproximación a la enseñanza de patrones de repetición en educación infantil es a través de patrones simples de dos elementos, donde mediante el emparejamiento de un elemento a la vez, conocido como estrategia de alternancia, los niños pequeños pueden, por ejemplo, copiar un patrón realizando comparaciones constantes entre dos elementos (Collins y Laski, 2015; Fyfe et al., 2015). A partir de los 3 años aproximadamente, el pensamiento recursivo permite a los niños ser capaces de observar la relación entre los elementos consecutivos de una secuencia pudiendo predecir el elemento desconocido que prosigue. De acuerdo con Lüken y Sauzet (2020) y Wijns et al. (2019), pensar recursivamente implica anticipar solo el elemento sucesor (el +1) de una secuencia. Es decir, anticipar que, en un patrón con una unidad de repetición (rojo-azul), después del

azul sigue rojo y a continuación azul, repitiendo la secuencia, pero sin ser consciente de la regularidad intrínseca que genera previsibilidad.

Carpenter et al. (2005) exponen que la introducción del álgebra en las primeras edades contribuye además al desarrollo inicial del pensamiento relacional. El pensamiento relacional o pensamiento centrado en las relaciones se define ampliamente como el proceso de hacer comparaciones y reconocer similitudes y diferencias para discernir estructuras y patrones significativos que subyacen a la información (Dumas et al., 2013). Para ser consciente de la estructura que emerge en el patrón de repetición, es necesario centrar la atención en las relaciones que se producen entre los elementos de la unidad de repetición, en lugar de simplemente percibir las características individuales (Lüken y Sauzet, 2020; Miller et al., 2016). De acuerdo con Borriello et al. (2022), las habilidades que centran su atención en la estructura representan una forma de pensamiento relacional, concebido como la capacidad para comparar e identificar semejanzas y diferencias entre elementos y situaciones. Ahora bien, cuando, desde el contexto de los patrones de repetición, los niños pueden ver la estructura subyacente a un patrón de dos o tres elementos, es decir, identificar la unidad de repetición, avanzan hacia los inicios del desarrollo del pensamiento funcional (Wijns, Torbeyns, De Smedt, et al., 2019). “El pensamiento funcional en un contexto de patrón de repetición sería identificar la unidad de repetición y usar la estructura del patrón para predecir cualquier elemento de la secuencia” (Lüken y Sauzet, 2020, p. 3). Este modo de pensamiento se considera como predecesor para comprender estructuras sofisticadas y promover la capacidad de entender cómo varían dos cantidades (Anglada et al., 2022; Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Blanton y Kaput, 2011), cuando se inicia, por ejemplo, el trabajo con patrones de crecimiento y posteriormente las funciones en grados posteriores. Basándonos en estas afirmaciones, consideramos que gran parte de las capacidades anteriormente descritas, se promocionan de manera temprana a partir de observaciones generales y multifacética de la estructura de los patrones de repetición. Esto se corrobora en un estudio longitudinal de Warren et al. (2012) quienes detectaron que los alumnos de primaria presentaban grandes dificultades para reconocer la regularidad implícita en patrones de crecimiento, lo que a su vez obstaculizaba avanzar hacia la generalización. Coincidimos con Threlfall (1999) cuando afirma que antes de que los niños se introduzcan en la enseñanza de patrones más sofisticados deben de haber establecido una comprensión previa de lo que es un patrón y de cómo identificar puntos en común. Por ende, resulta importante poner al alcance de los escolares, situaciones de aprendizaje que movilicen el reconocimiento y la articulación de estructuras y relaciones (Martin et al., 2023).

Desde esta perspectiva, Acosta et al. (2022b) y Pincheira et al. (2022) determinan un orden de dificultad creciente a tareas y habilidades para hacer patrones de repetición, con la intención de avanzar hacia la comprensión estructural de dichos patrones. Este orden se toma como la ruta para establecer una trayectoria de aprendizaje de patrones (Acosta, 2023) con la finalidad de

secuenciar tareas y habilidades para hacer patrones de repetición desde la vinculación con los modos de pensamiento (recursivo, relacional y funcional) que se incluyen dentro del pensamiento algebraico en educación infantil, estableciendo así una progresión de aprendizaje para patrones de repetición a partir de las siguientes habilidades: 1) copiar, 2) interpolar, 3) extender, 4) abstraer o traducir, 5) reconocer la unidad de repetición y 6) crear (Figura 1).

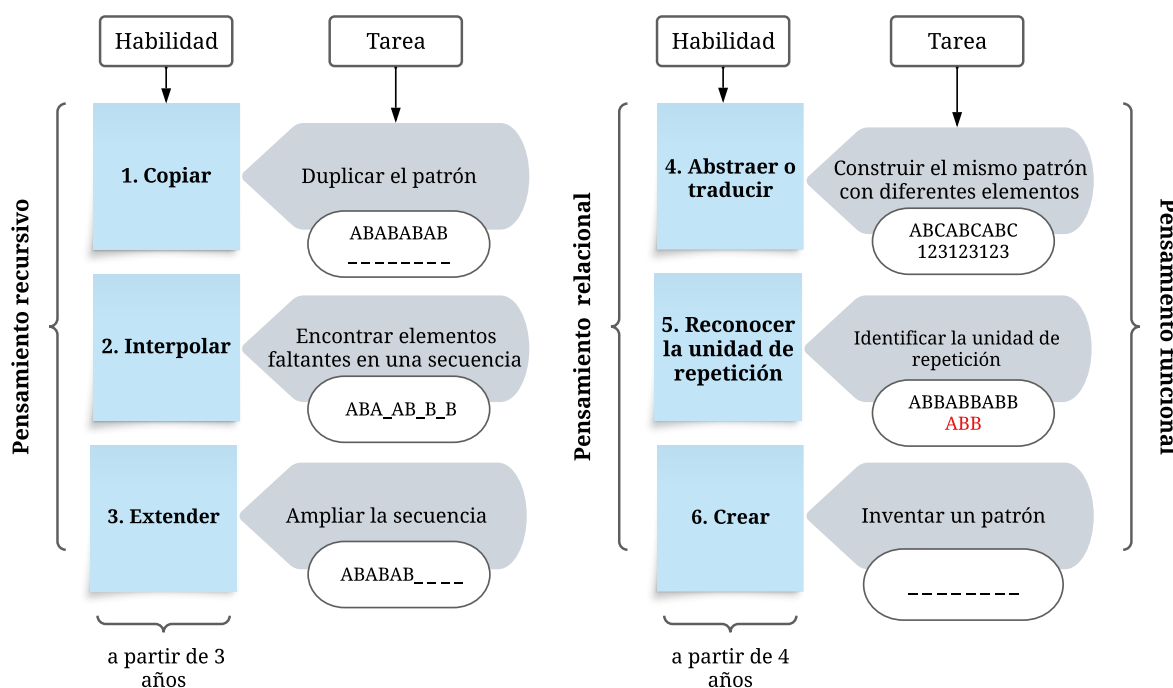


Figura 1. Trayectoria de aprendizaje sobre patrones de repetición

De acuerdo con Rittle-Johnson et al. (2013) las tres primeras habilidades se movilizan en tareas fáciles de resolver; mientras que las tres últimas requieren de la capacidad de dejar de entender el patrón como “una alternancia de dos colores, una sucesión de colores con cierta regularidad” (Lüken, 2018, p. 9) para centrar la mirada en la estructura que lo conforma (Papic et al., 2011). Bajo esta mirada, el reconocimiento de la unidad de repetición determina un orden de dificultad creciente que está en consonancia con el pensamiento recursivo, relacional y funcional. Lüken y Sauzet, (2020), por ejemplo, plantean que la comprensión de la estructura del patrón, parece ser fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano de los escolares, para trascender de un tipo de pensamiento que permite establecer relaciones predictivas entre elementos sucesivos, a otro más sofisticado que promueve la abstracción de la regla subyacente de la seriación (Acosta et al., 2022a).

Ahora bien, ¿cómo se planifica una secuencia de enseñanza que contemple dicha dificultad creciente de manera eficaz? ¿Cómo podemos abordar ciertas habilidades para hacer patrones que requieran de un mayor grado de abstracción

desde un contexto cercano al alumnado? Desde esta perspectiva, se asume el EIEM (Alsina, 2020, 2022) como apoyo metodológico y didáctico durante el diseño de tareas con patrones de repetición. Dicho enfoque se compone de tres niveles de enseñanza: informal, intermedio y formal, tal como se detalla en la Figura 2:

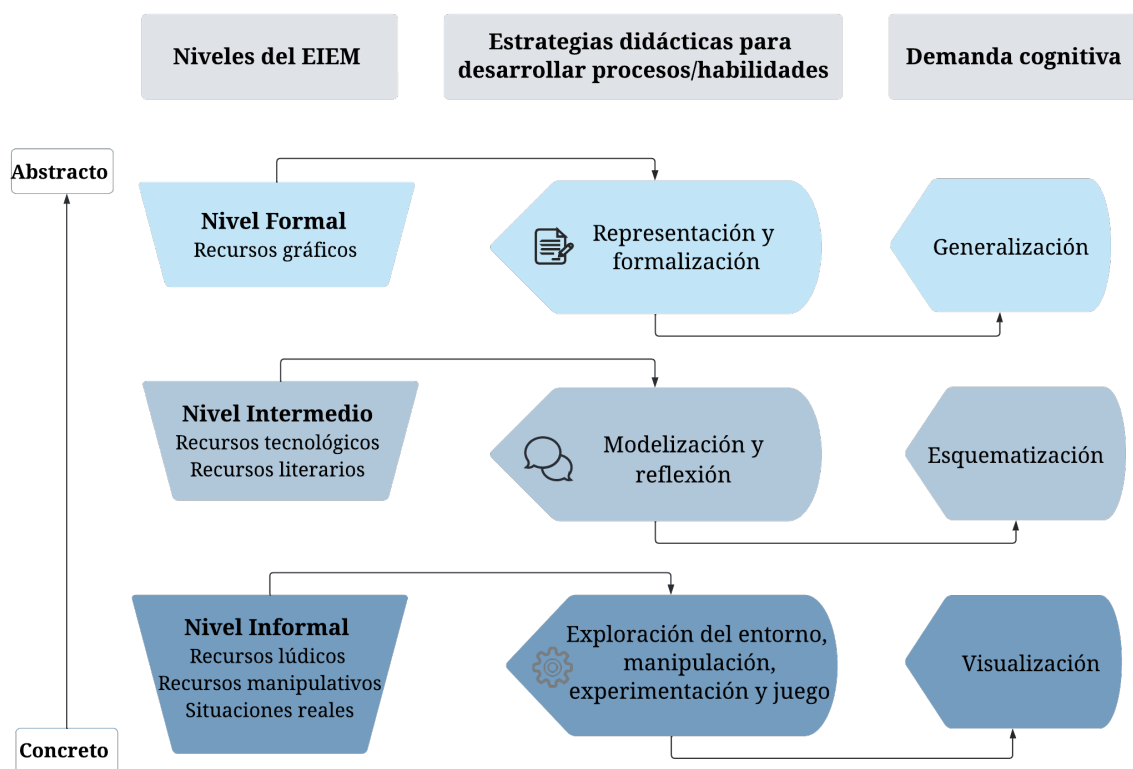


Figura 2. Niveles del EIEM, estrategias didácticas para desarrollar procesos/habilidades y demanda cognitiva (Alsina, 2020, 2022)

En la Figura 2 se observa que los niveles de enseñanza avanzan de lo concreto a lo abstracto, de lo particular a lo general, presentando diferentes tipos de contextos, recursos y estrategias didácticas para desarrollar procesos/habilidades de las que emergen distintas demandas cognitivas. En el nivel informal se encuentran los contextos que se deberían “consumir” diariamente: las situaciones reales, la manipulación de diversos materiales y el uso de juegos y tareas recreativas. En estos contextos, la exploración del entorno, la manipulación, la experimentación y el juego favorecen la visualización de las ideas matemáticas de forma concreta. En los niveles intermedios, se hace alusión a los contextos que deberían usarse algunas veces, como los recursos literarios y tecnológicos. En este caso, a través de la modelización y la reflexión, se conduce a la progresiva esquematización del conocimiento matemático. Finalmente, en el nivel formal, aparecen aquellos contextos que deberían usarse de forma ocasional, como las fichas y los libros de texto. En estos contextos, pues, mediante la representación y la formalización se avanza hacia la generalización. Freudenthal (1991) en sus contribuciones

argumentó que la instrucción matemática a menudo carece de éxito porque los alumnos aprenden a proyectar manipulaciones simbólicas abstractas antes de estar capacitados para otorgarles sentido. Décadas más tarde, autores como Reinke y Casto (2022) reivindican que el contexto de la tarea matemática debe ser considerado como un ancla conceptual que proporcione sentido y significancia a las nuevas ideas matemáticas. Por tanto, consideramos que el ELEM proporciona oportunidades de aprendizaje con apoyo en múltiples contextos que, en el caso de la enseñanza de patrones de repetición, permite avanzar de manera sólida y comprensible hacia habilidades más sofisticadas que requieren reconocimiento de la estructura de manera funcional.

MÉTODO

Este estudio forma parte de una investigación longitudinal de tres años que se realizó con los mismos participantes a la edad de 3, 4 y 5 años. Dicho estudio se enmarca en una investigación basada en el diseño, *Design-based research* [DBR]), con carácter básicamente cualitativo que persigue la comprensión y mejora de la realidad educativa a partir del estudio de la complejidad y singularidad de contextos naturales de aprendizaje (Molina, 2021), apostando por la generación de estrategias que promuevan una mejora de la praxis docente (Bakker, 2019).

En cada ciclo de iteración longitudinal, se realizan microanálisis transversales que nos permiten reajustar el diseño de la intervención. En consonancia con los objetivos que se presentan en este estudio, y en el marco de estos microanálisis transversales, se ha optado por hacer uso del método mixto combinado con la investigación exploratoria. Creswell y Plano Clark (2018) exponen que la fusión de datos cualitativos y cuantitativos permite desarrollar una comprensión holística y matizada del objeto de investigación.

En la Figura 3, se puede apreciar el proceso de iteración desarrollado y las cuatro fases que se han considerado durante cada año de intervención. Este estudio se focaliza en el segundo ciclo de iteración, cuando los participantes cursaban el 2º curso de infantil (4-5 años).

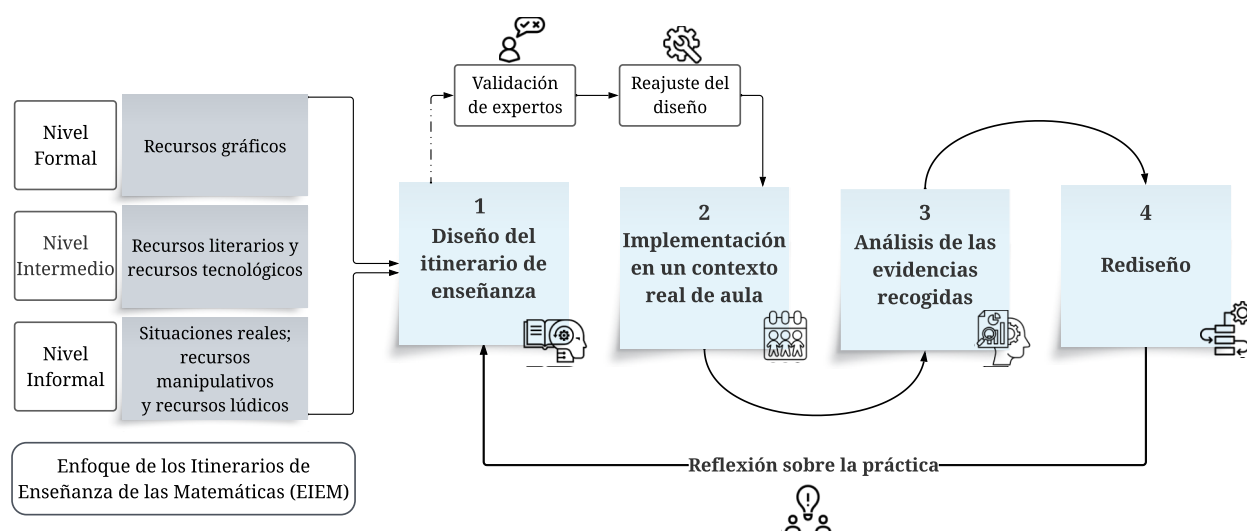


Figura 3. Proceso que enmarca los tres ciclos de iteración del DBR de nuestro estudio longitudinal

Participantes

La muestra está conformada por 24 alumnos, 12 niños y 12 niñas de un centro público de la provincia de Girona, España, cuya media de edad es de 4 años y 9 meses ($DE= 5$ meses). Se ha seleccionado este grupo a través de un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal (Fernández et al., 2014), puesto que los criterios de selección han sido determinados por la posibilidad de acceder a este grupo; por la continuidad y seguimiento longitudinal de la maestra tutora; y por estar considerado un centro con baja movilidad de matrícula en cursos de educación infantil.

Cabe señalar que los participantes están familiarizados con los patrones de repetición, ya que los niños previamente habían estudiado patrones simples [AB] (Acosta y Alsina, 2020). Además, de acuerdo con las directrices nacionales vigentes en el momento de la implementación (Decret legislatiu [Decreto Legislativo] 181/2008), los participantes presentan conocimientos sobre: a) números hasta el 10, b) reconocimiento de atributos; c) comparaciones, ordenaciones y clasificación de colecciones de objetos atendiendo a uno o más criterios cualitativos y/o cuantitativos; d) procesos de representación, comunicación y resolución de problemas a través de talleres de experimentación; y e) reconocimiento de iniciales propias.

Para la realización del trabajo de campo y el registro audiovisual y fotográfico de las sesiones, se obtuvo previamente el consentimiento informado de las familias.

Diseño y procedimiento

El diseño de la intervención se basa en los planteamientos del EIAM (Alsina, 2020, 2022) para diseñar un itinerario de enseñanza de patrones de repetición, la revisión

de la literatura y el análisis de currículos internacionales que consideran el abordaje del álgebra desde la educación infantil.

Dicho itinerario consta de 9 tareas enmarcadas en los distintos contextos de enseñanza que conforman el EIEM (Alsina, 2020, 2022). De manera intencionada se incluyen seis tareas para el nivel informal (situaciones reales [SR], recursos manipulativos [RM] y recursos lúdicos [RL]); dos para el nivel intermedio (recursos literarios [RLIT] y recursos tecnológicos [RT]); y una para el nivel formal (recursos gráficos [RG]). Precisamente, una de las orientaciones del EIEM, en sintonía con la literatura sobre educación matemática infantil, es priorizar la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades a partir de contextos informales.

Cada una de las tareas diseñadas se han sometido a un juicio previo de expertos externos, pertenecientes mayoritariamente al Grupo de Trabajo “Investigación en Educación Matemática Infantil” (IEMI), de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), que ha valorado mediante un cuestionario: a) el grado de correspondencia; b) la formulación y el uso del lenguaje matemático; y c) la pertinencia del proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones de repetición para escolares de 4 años.

El análisis de la validación ha considerado tres etapas: I) reducción de datos; II) disposición de datos; y III) elaboración y verificación de conclusiones, según Miles y Huberman (1994). De acuerdo con la reducción de datos, se han establecido categorías que han permitido sintetizar y agrupar las aportaciones de los expertos. Durante este proceso, a través del programa *Atlas.ti*, se asignan categorías iniciales que se van refinando hasta obtener las categorías definitivas. Una vez reducidos los datos, se analizan las aportaciones de los expertos con el objetivo de extraer conclusiones. Dichas conclusiones, en la etapa de elaboración y verificación, permiten establecer semejanzas y diferencias para contrastar las contribuciones con la literatura de referencia.

La implementación del itinerario validado, se desarrolla durante un total de 18 sesiones presenciales de 50 minutos cada una, puesto que el grupo se divide en dos de manera aleatoria con la intención de ofrecer una atención personalizada e individualizada. Es importante exponer que cada sesión cuenta intrínsecamente con las siguientes fases: I) presentación de la tarea enmarcada en el contexto; II) interacción, exploración y desarrollo de la tarea diseñada, y III) representación y reflexión. En la fase III de cada sesión, los escolares representan el patrón de memoria sin tener el modelo frente a ellos. El objetivo de esta fase es observar y analizar la manera en que los participantes perciben la unidad de repetición y como se inician en la comprensión de la estructura del patrón, siendo capaces de representarlo mediante un dibujo y de explicar lo que han representado.

En la Figura 4 se detallan las técnicas de recogida de información utilizadas.

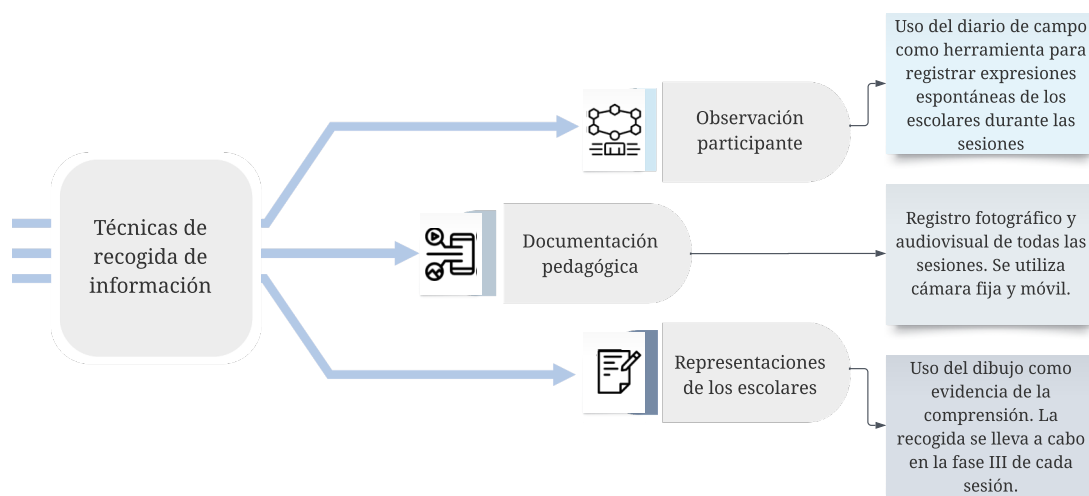


Figura 4. Técnicas que facilitan la recogida de evidencias

ANÁLISIS DE LOS DATOS TRAS LA IMPLEMENTACIÓN

En consonancia con los objetivos del estudio, se lleva a cabo de manera combinada un análisis cuantitativo y cualitativo de los datos obtenidos.

El análisis cuantitativo se realiza mediante estadística descriptiva de las representaciones obtenidas en la fase III. Para ello, se describen las variables categóricas según el porcentaje de casos en cada contexto y se categoriza como “correcto” cuando la representación no presenta errores e “incorrecto” cuando la producción presenta error en su estructura. Con la intención de eliminar el sesgo que genera una presencia jerarquizada de tareas (T1 y T2) en el nivel informal, versus el resto de niveles, se categorizan los resultados del primer nivel, siguiendo el diagrama de la Figura 5.

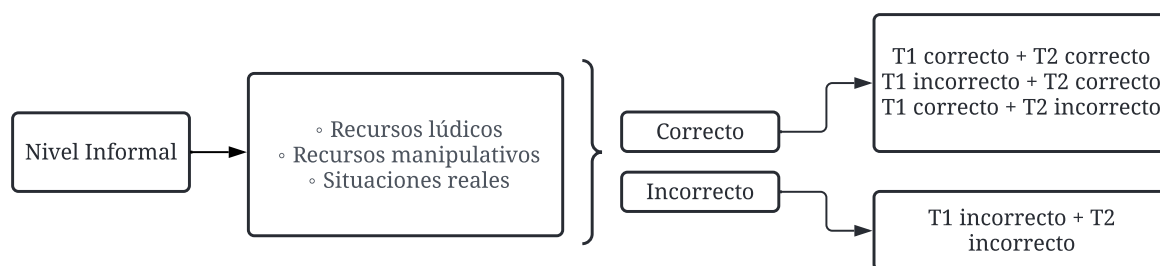


Figura 5. Diagrama de flujo con el proceso de categorización de los resultados obtenidos en el nivel informal

El análisis cualitativo se desarrolla a partir del discurso que utilizan los escolares para centrar o no su atención en la estructura. Para dicho análisis se divide la muestra del estudio mediante un proceso de muestreo estratificado, tomando el

Índice de Competencia Matemática (ICM) de los escolares. Este ICM fue obtenido previamente a la intervención a través de la aplicación del test Tema 3 de Ginsburg y Baroody (2003). En la Tabla 1 se muestran los resultados agrupados por intervalos de ICM.

Tabla 1

Frecuencia de escolares en cada intervalo de ICM

Intervalos de ICM	Interpretación según test TEMA 3	$f(x)$
>70	Muy pobre	7
70-79	Pobre	6
80-89	Por debajo de la media	1
90-110	Medio	8
111-120	Por encima de la media	2
121-130	Superior	0
<130	Muy superior	0

De acuerdo con la información de la Tabla 1, se seleccionan los ocho escolares que se ubican dentro del rango 90-110 de ICM y se analizan los modos de pensamiento que movilizan en el nivel informal del EIEM. Para ello, tal como se muestra en la Figura 6, se articula un proceso de reducción y categorización, donde se asignan marcas de posición a fragmentos relevantes obtenidos a partir de la descomposición en unidades de análisis de las sesiones grabadas. Una vez detectado dicho fragmento, se procede a su transcripción y codificación.

La codificación de los datos ha considerado el uso de las categorías de Lüken (2018) asignando puntuaciones del 0 al 3. En este sentido, la primera categoría se codifica como (0); la segunda se relaciona con el pensamiento recursivo y se codifica como (1); la tercera y la cuarta se vinculan con el pensamiento relacional asignando (2) y la quinta con el pensamiento funcional, codificándose con (3). Para garantizar la confiabilidad de los datos, los autores han seguido una doble codificación cruzada e independiente de los fragmentos de análisis seleccionados, han discutido desacuerdos referidos al proceso de codificación y, finalmente, han establecido consensos.

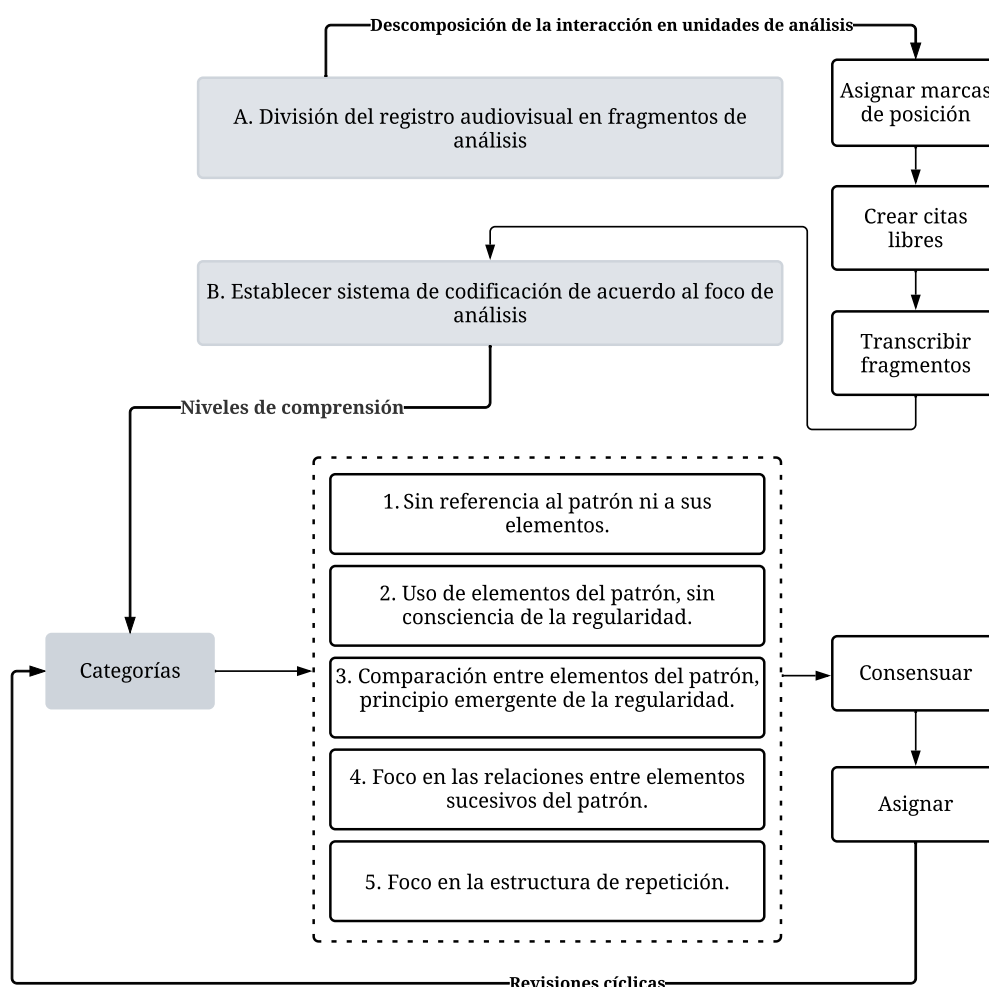


Figura 6. Diagrama de flujo con el proceso de categorización de los resultados obtenidos en el nivel informal (Elaboración propia a partir de las categorías de Lüken, 2018)

RESULTADOS

Considerando los objetivos de este estudio, por un lado, se diseña, valida e implementa un itinerario de enseñanza para patrones de repetición que contempla tres niveles: a) nivel informal (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos), b) nivel intermedio (recursos literarios y tecnológicos) y c) recursos gráficos. Por otro lado, se analiza el efecto de dicha enseñanza en cada contexto y los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal.

Validación del itinerario de enseñanza

Las evaluaciones recibidas mediante el juicio externo de expertos se procesan a través del *Atlas.ti* estableciendo categorías que contribuyen a la reducción de datos: a) aspectos didácticos (AD), b) gestión de la enseñanza (GE), y c) lenguaje matemático (LM). Durante el proceso de análisis y selección de evidencias para

cada categoría establecida se ha producido un fenómeno de condensación, es decir, se ha detectado una reiteración de las mismas ideas. En consecuencia, solo se han seleccionado las pruebas más representativas de cada categoría. Las evidencias se han codificado, asignando un número a cada experto (de E1 a E8) tal y como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2
Evidencias de la validación

Categoría	Tarea	Evidencia
AD	SR 1	a) E4: Iniciaría la actividad con una imagen donde se pudiese ver varios elementos, por ejemplo, una fachada donde se muestren toldos distintos, de manera que el niño pueda situar de manera global los elementos de la realidad.
	RLIT	b) E8: Aconsejo que los personajes sean muñecos o animales con volumen o algún tipo de soporte visual más allá del cuento.
GE	SR1	a) E5: ¿por qué no dejar que los niños construyan realmente un toldo?
	SR2	b) E1: Yo igual lo que les diría es que modelasen arbustos y árboles con plastilina
	RM4	c) E2: [...] me parece interesante que, una vez trabajada la actividad usando las cartulinas plastificadas (material concreto), se plantee su descripción verbal y que después ellos pudieran pasarlo al papel (cada uno con el registro que desee).
	RT	d) E3: Una vez que el niño/a completa la tarea, conviene hacer que explique a los compañeros o docente el proceso seguido.
LM	SR2	a) E6: usáis como lenguaje para describir el ajardinado “redondeado-redondeado-alto” [...] la terminología utilizada para designarlo no parece adecuada, pues ambos, en cierto sentido, son redondeados. Diferente sería designarlos en función de su altura o grosor, “bajo-bajo-alto” o como “grueso-grueso-esbelto.
	RL	b) E7: ¿Se está utilizando de manera sinónima el término seriación y patrón?

En función de las valoraciones recibidas se ha rediseñado y reajustado el itinerario de enseñanza con la intención de ofrecer orientaciones metodológicas y didácticas nacidas desde la teoría y en consonancia con la práctica. En relación con las modificaciones introducidas en la categoría “aspectos didácticos” se decide: a) incluir el uso de la aplicación *Google Maps* para observar diferentes toldos de

zonas aledañas al colegio; y b) utilizar personajes físicos para dramatizar el cuento que se explica en el contexto de recursos literarios. En la categoría de “gestión de la enseñanza” se incluye: a) la construcción cooperativa del toldo identificado a través de *Google Maps*; b) el uso de plastilina para poder construir el mismo patrón con diferente elemento; c) la representación en papel de la seriación identificada tras cada tarea; y en la actividad de recursos tecnológicos, se introducen preguntas específicas que contribuyan a compartir el conocimiento que se genera de manera individual: ¿qué elementos debes escoger para ampliar la seriación? ¿Cómo sabes que ahora toca este que has seleccionado? ¿Hay alguna parte que siempre se repite? Estas preguntas se establecen tomando como referencia las aportaciones de Blanton (2008, p. 103):

(...) la enseñanza del pensamiento algebraico a menudo consiste más en preguntar que en decir. Hacer buenas preguntas les da a los niños la oportunidad de organizar su pensamiento y construir ideas matemáticas. Cuando un maestro les dice a los niños qué representación usar o cómo simbolizar una relación funcional o cómo justificar una conjetura particular, disminuye la posibilidad de que los niños desarrollen su propio pensamiento.

Finalmente, en la categoría de “lenguaje matemático” se introducen los siguientes cambios: a) se adopta la terminología “bajo-bajo-alto”; y b) se unifica el criterio de patrón para referirse a la unidad de repetición y seriación para la versión extendida del patrón.

En la Tabla 3 se expone la versión final del itinerario de enseñanza de patrones de repetición para escolares de 4 años.

Tabla 3

Tareas de cada nivel de enseñanza

Nivel informal	Situaciones reales (SR)	<p>1. Se visualizan diferentes calles de nuestra ciudad con <i>Google Maps</i> y se pide a los niños y las niñas que identifiquen seriaciones en los elementos. Mediante buenas preguntas, se les invita a observar las fachadas de las casas, los edificios y los comercios. Una vez identificadas las seriaciones, se representan conjuntamente los respectivos patrones mediante tarjetas de colores.</p> <p>2. Se muestra una imagen de un jardín con una seriación de diferentes arbustos que sigue un patrón (AB; AAB) y, a través del diálogo, se invita al alumnado a describir cómo están colocados los arbustos, con el objetivo de analizar el patrón. Finalmente, se les propone que representen el mismo patrón con plastilina.</p>
	Recursos manipulativos (RM)	<p>3. Se propone a los escolares que amplíen las secuencias con las piezas de Pattern Blocks (Geomosaico), siguiendo el patrón indicado en las tarjetas: (AB), (AAB) o (ABB).</p> <p>4. Se ponen a disposición de los niños y las niñas tarjetas plastificadas con varias seriaciones. Se les invita a completar o extender la seriación con la ayuda de pinzas de ropa de colores.</p>
	Recursos lúdicos (RL)	<p>5-6. Se proponen dos juegos de actividad motriz para promover la anticipación de eventos a partir de la interiorización de la secuencia presente en dos canciones: 1) Canción popular y 2) <i>I'm so happy</i></p> <p>https://www.youtube.com/watch?v=T2qXSMENrQA</p>
Nivel intermedio	Recursos literarios (RLIT)	<p>7. Con el cuento infantil "El caracol y la menta". Se invita a los escolares a escuchar activamente la historia y a anticipar la secuencia temporal de acciones que se repite en cada diálogo de los personajes del cuento infantil.</p>
	Recursos tecnológicos (RT)	<p>8. Se propone el juego en línea "En serie" en el que cada escolar continúa o completa la seriación propuesta.</p> <p>https://clic.xtec.cat/projects/enserie/jclic.js/index.html</p>
Nivel formal	Recursos gráficos (RG)	<p>9. A través de una tarea escrita previamente diseñada con diferentes tipos de toldos, se invita a los escolares a ampliar la seriación. Un toldo sigue el patrón (AB) y el otro (AAB).</p>

Efecto de la enseñanza de patrones de repetición en cada contexto y modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal

Los resultados con respecto al efecto de las tareas que componen el itinerario de enseñanza de patrones de repetición muestran como el éxito de la comprensión de la tarea disminuye a medida que se avanza hacia contextos más abstractos. A continuación, en la Figura 7 se observan los resultados agrupados por contextos de enseñanza que conforman el EIEM.

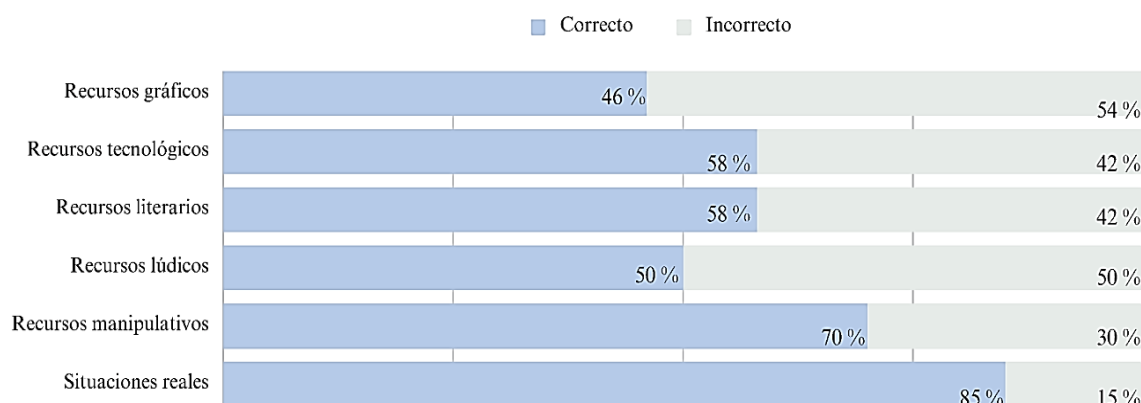


Figura 7. Resultados obtenidos en cada contexto de enseñanza del itinerario

A partir de los datos que muestra la Figura 7, se aprecia un grado de éxito en la comprensión y resolución de la tarea del 85% para situaciones reales; 70% para recursos manipulativos y 50% recursos lúdicos. En relación con la categoría “incorrecto” se observa como el porcentaje aumenta de manera relevante entre contextos de un mismo nivel, situándose en 15%, 30% y 50% para situaciones reales, recursos manipulativos y recursos lúdicos, respectivamente. En los recursos literarios y tecnológicos en ambos contextos el 58% de casos realizaron de manera correcta la tarea, ocupando el 42% de los participantes la categoría “incorrecto”. Finalmente, en los recursos gráficos se observa como aumenta el error en las producciones escritas de los escolares, situándose en un 54% frente a un 46% de soluciones correctas.

De manera general, los resultados obtenidos por nivel de enseñanza se resumen en la Figura 8.

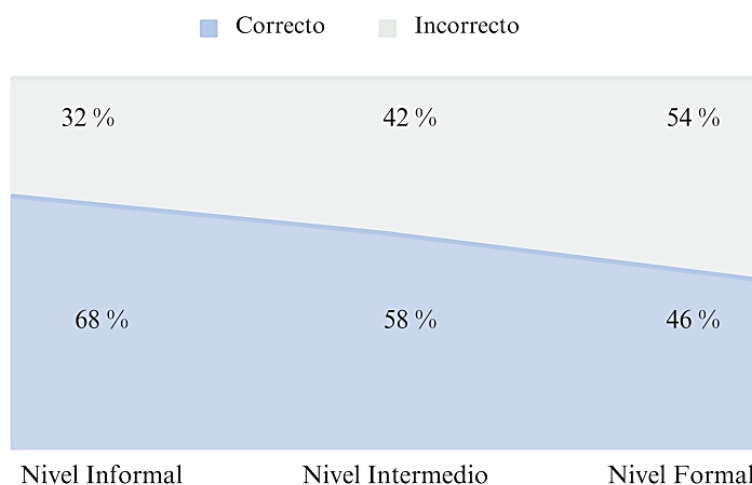


Figura 8. Resultados de casos válidos agrupados por nivel de enseñanza del EIEM

Como se puede observar en la Figura 8, el 68% de los escolares realizaron de manera correcta las tareas diseñadas en el nivel informal, frente a un 58% y 46% para los niveles intermedio y formal, respectivamente. De manera transversal se evidencia como el éxito de la resolución y comprensión de las tareas disminuye a medida que se avanza hacia contextos más abstractos.

Estos resultados se combinan con el análisis cualitativo del discurso utilizado por los ocho escolares con un ICM medio según el test TEMA 3 de Ginsburg y Baroody (2003) para evidenciar los modos de pensamiento algebraico que movilizan durante la fase II y III de las sesiones desarrolladas en el nivel informal.

Tabla 4

Distribución de los indicadores según los modos de pensamiento algebraico movilizados en cada contexto del nivel informal

Indicador*	SR1	SR2	RM1	RM 2	RL1	RL2
	(n=8)	(n=8)	(n=8)	(n=8)	(n=8)	(n=8)
Modos de pensamiento algebraico	0	0	0	0	1	1
	1	1	3	2	6	6
	2	7	5	4	2	0
	3	0	0	2	0	0

*0= sin referencia al patrón ni a sus elementos; 1=pensamiento recursivo; 2= pensamiento relacional 3= pensamiento funcional

De acuerdo con la información mostrada en la Tabla 4, se interpreta de manera longitudinal (entre contextos) que la movilización del pensamiento recursivo (indicador 1) tuvo mayor presencia en los contextos RM2, RL1 y RL2. En cambio, el pensamiento relacional (indicador 2) obtiene mayor presencia en los contextos

SR1, SR2 y RM1. El pensamiento funcional (indicador 3) se evidencia solo por dos escolares en la tarea de RM1. De manera general se aprecia como los ocho escolares seleccionados muestran mayor evidencia de pensamiento recursivo que de funcional en el nivel informal del EIEM.

En la Tabla 5 se presentan fragmentos de análisis para cada contexto de enseñanza del nivel informal. El fragmento seleccionado corresponde al modo de pensamiento algebraico con mayor presencia dentro de cada contexto. En la transcripción se asigna (D) a las intervenciones del docente y (E) a la de los escolares.

Evidencias recogidas en el nivel informal: SR1

Durante la fase II (documentación pedagógica), se produce la siguiente interacción apoyada en la Figura 9.



Figura 9. Tarea relacionada con toldos de la vida cotidiana

Docente: Si ahora tenemos una tira de color amarillo, una marrón y una amarilla.
¿Qué tira colocaremos a continuación?

Escolar: Una marrón

Docente: ¿Por qué una marrón y no una amarilla?

Escolar: Porque es amarillo, marrón, amarillo, marrón, amarillo, marrón.

(...)

Docente: ¿De qué color es la cartulina que está en medio de dos amarillas?

Escolar: Marrón.

Docente: ¡Muy bien! ¿Sabes cuáles son los colores que se repiten?

Escolar: amarillo y marrón (...).

Docente: ¿Puedo poner una cartulina azul en esta seriación?

Escolar: ¡No!

Durante la fase III (representación y diario de campo), el alumno representa la seriación explorada durante la construcción conjunta del toldo, reconociendo los dos elementos de repetición (amarillo-marrón) (Figura 10).



Figura 10: Representación del patrón AB

El modo de pensamiento algebraico evidenciado es el pensamiento relacional.

Evidencias recogidas en el nivel informal: SR2

Durante la fase II (documentación pedagógica), se produce la siguiente interacción apoyada en la Figura 11.



Figura 11. Tarea sobre colocación de arbustos en jardines

Docente: ¿Cómo estaban colocados los arbustos de la foto?

Escolar: Así [señalando la seriación con la plastilina].

Docente: ¿Cómo lo has hecho para no equivocarte?

Escolar: Poniendo dos bolas y un palo, dos bolas y un palo, dos bolas y un palo, dos bolas y un palo...

Docente: ¿Por qué, dos y uno?

Escolar: Porque había dos juntos iguales y el otro era más grande, dos iguales y uno más alto.

Durante la fase III, el alumno representa en un papel la colocación de los arbustos exponiendo que para no equivocarse contaba dos y uno, dos y uno, dos y uno (Figura 12).



Figura 12. Representación del patrón AAB

El modo de pensamiento algebraico manifestado es relacional.

Evidencias recogidas en el nivel informal: RM1

Durante la fase II (documentación pedagógica), se produce la siguiente interacción apoyada en la Figura 13.



Figura 13. Tarea con material manipulativo

Escolar: ¡Mira, yo he descubierto una cosa!

Docente: A ver nos explicas tu descubrimiento.

Escolar: Sí, esta seriación con piezas verdes y azules es igual a esta otra hecha con piezas amarillas y rojas. (...)

Docente: ¿Y por qué dices que son iguales?

Escolar: Porque los dos tienen dos figuras iguales y una diferente.

Docente: Muy bien, es cierto, las dos cartulinas tienen representado el mismo patrón: Dos figuras iguales y una diferente.

Durante la fase III, el alumno explica que dibuja un camino igual que el de las tarjetas, con dos figuras iguales (rectángulos rosas) y una diferente (círculo naranja). (Figura 14).



Figura 14. Representación del patrón AAB

El modo de pensamiento algebraico manifestado es pensamiento relacional y pensamiento funcional.

Evidencias recogidas en el nivel informal: RM2

Durante la fase II (documentación pedagógica), se produce la siguiente interacción apoyada en la Figura 15.

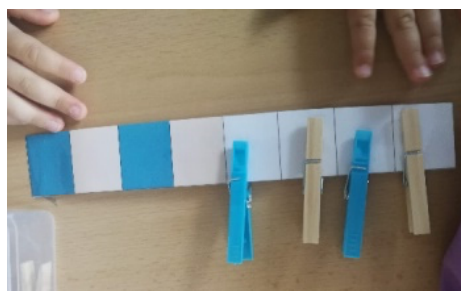


Figura 15. Tarea con material manipulativo

Escolar: ¡Mira!

Docente: ¡Los has completado! Y, ¿cómo lo has hecho?

Escolar: Poniendo las pinzas

Docente: ¿Cómo sabías cuál tocaba poner?

Escolar: Había cuadrado azul, color carne, cuadrado azul, color carne, cuadrado azul, color carne, y luego todo blanco.

Docente: Entonces, ¿por qué pusisteis la pinza azul en el primer cuadrado blanco?

Escolar: Porque antes había color carne.

Docente: ¿Y después del color azul?

Escolar: La pinza sin color, la de color... de color madera.

Docente: ¿Seguro que es la correcta?

Escolar: Creo que sí... Va un color-otro color, un color-otro color.

Durante la fase III, el escolar explica que ha dibujado azul, blanco, azul, blanco, azul, blanco, igual que como estaba en la tarjeta (Figura 16).



Figura 16. Representación del patrón AB

El modo de pensamiento algebraico manifestado es pensamiento relacional.

Evidencias recogidas en el nivel informal: RL1

Durante la fase II (documentación pedagógica), se produce la siguiente interacción apoyada en la Figura 17.



Figura 17. Tarea enmarcada en el contexto de recursos lúdicos

Docente: Ahora ¿qué toca hacer?

Escolar: Cantar.

Docente: ¿Y después?

Escolar: Toca correr, cantar, correr, cantar, correr, cantar, correr. (...)

Docente: ¿Cuáles son las dos acciones que siempre se repiten?

Escolar: Correr, cantar, correr, cantar, correr...

Docente: Entonces las dos que se repiten, ¿cuáles son?

Escolar: ¿Jugar?

Durante la fase III, el escolar expone que ha representado cuando cantaban y cuando corrían (Figura 18).

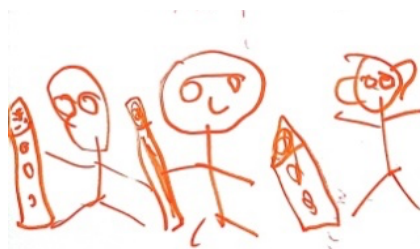


Figura 18. Representación de las acciones identificadas durante el juego
El modo de pensamiento algebraico manifestado es pensamiento recursivo.

Evidencias recogidas en el nivel informal: RL2

Durante la fase II (documentación pedagógica), se produce la siguiente interacción apoyada en la Figura 19.



Figura 19. Tarea relacionada con un juego de acción motriz

Docente: ¿Escribimos un código secreto para recordar la coreografía de la canción?

Escolar: (canta la canción ejecutando las acciones de: reír, reír y cantar, reír, reír y cantar).

Durante la fase III, el escolar dibuja la seriación reír-reír-cantar, reír-reír-cantar designando con ayuda de los compañeros los elementos de la representación. (Figura 20).

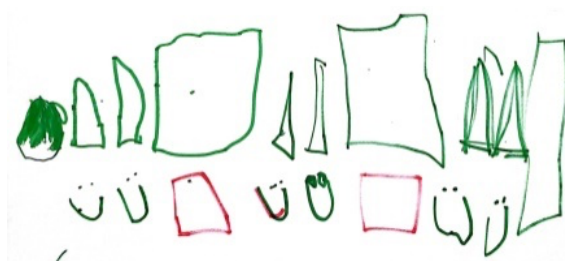


Figura 20. Representación de las acciones identificadas

El modo de pensamiento algebraico manifestado es pensamiento recursivo.

Síntesis

Como se aprecia en los epígrafes anteriores, por un lado, en las tareas de SR1, SR2 y RM1 se observan evidencias que responden al pensamiento relacional. Es decir, el alumnado identifica con la ayuda del docente los elementos que otorgan regularidad a la seriación descartando aquellos que no cumplen con la regla. En este sentido, resulta importante destacar como los escolares van focalizando su atención en las relaciones que se producen entre los elementos que conforman la unidad de repetición (Lüken y Sauzet, 2020; Miller et al., 2016) para adentrarse en el pensamiento relacional. Además, en algunos casos (RM1) se manifiesta de manera explícita una relación de equivalencia entre unidades de repetición constituidas por diferentes elementos, observándose así indicios de pensamiento funcional. Por otro lado, la presencia del pensamiento recursivo se ubica en las tareas de RM2, RL1 y RL2. Como se ha evidenciado en los resultados (Figura 7), a pesar de ser los RL un contexto concreto, los escolares han presentado dificultades para comprender la estructura intrínseca del juego y la secuenciación iterativa que se producía en cada caso.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este estudio se ha diseñado, validado e implementado un itinerario de enseñanza para patrones de repetición con la finalidad de describir los efectos de dicha enseñanza en cada contexto del EIEM y evidenciar los modos de pensamiento algebraico que se movilizan en el nivel informal del itinerario.

Considerando los resultados obtenidos tras la implementación de las tareas, se observa que cuanto más cercano y concreto ha sido el contexto de enseñanza, más fácil ha sido para los escolares lograr el éxito de la tarea, incluso en aquellas que movilizan habilidades más complejas. De manera general, se observa una diferencia relevante del 22% de éxito entre el nivel más concreto (informal) y el más abstracto (formal); y de manera más específica, una diferencia del 39% de producciones correctas entre el contexto de situaciones reales y recursos gráficos. Resulta importante destacar que, en contextos más concretos, los alumnos incluso pudieron avanzar hacia la identificación de la unidad de repetición e iniciarse en su generalización, lo cual se consideran hitos importantes en el momento de introducir el álgebra en las aulas (Vergel et al., 2022). Mientras que en los contextos más abstractos presentaron mayor dificultad. Estos resultados evidencian el rol de los contextos concretos y las posibilidades que ofrecen para acceder al pensamiento algebraico. Tal como exponen Hunter y Miller (2022) visualizar e identificar estructuras son acciones que ayudan a los escolares a abstraer y generalizar para poder ingresar en el mundo del pensamiento algebraico. Con ello, se refuerza la idea de que la enseñanza de patrones de repetición requiere de un nivel de abstracción mental que debe ser acompañado, a través de la exploración, manipulación y experimentación, para fomentar de manera eficaz la

transición del pensamiento recursivo al relacional y funcional. En consonancia con nuestros datos, pues, parece que el itinerario de enseñanza validado y la gestión docente ha reforzado el razonamiento verbal, la comunicación y expresión del conocimiento de los escolares y a su vez, ha estimulado su proceso de aprendizaje mediante la interacción con diferentes contextos de enseñanza. En esta línea, el contexto donde se enmarca la tarea puede ser considerado como un andamiaje conceptual y procedimental que proporciona una comprensión consolidada de nuevos contenidos matemáticos (Hunter y Miller, 2022). Cuando los escolares comprenden, transfieren y generalizan, conectan las ideas matemáticas desde un escenario sólido y eficaz.

En relación con los modos de pensamiento algebraico que se han movilizado en cada contexto de enseñanza del nivel informal del EIEM, el estudio realizado ha puesto de manifiesto como los escolares, con el apoyo docente necesario, comienzan a percibir una seriación no como la alternancia de elementos, sino como una estructura que se rige por una norma de repetición. De aquí la importancia de la gestión docente en incitar, a través de preguntas, reflexiones más propias del pensamiento relacional y funcional, es decir, de argumentos para describir conjeturas explícitas centradas en habilidades más sofisticadas para hacer patrones. Esta conclusión apoya la idea de Papic et al. (2011) quienes también observaron que, sin una intervención directa, los escolares de estas edades no identifican de manera autónoma la unidad de repetición que origina la seriación. A dicha conclusión, Rittle-Johnson et al. (2013) añadieron que es necesario el uso de explicaciones instructivas para reforzar la abstracción del patrón. Esta cuestión explicaría en este estudio la poca presencia explícita de pensamiento funcional. No podemos obviar que, según Rittle-Johnson et al. (2013) el reconocimiento de la unidad de repetición se manifiesta de manera exitosa a partir de los 4-5 años. Como expone Du Plessis (2018) promover habilidades cognitivas relacionadas con la identificación de la unidad de repetición, favorece los procesos de predicción, anticipación, busca de regularidades y, por ende, la expresión de la generalización. Desde esta misma óptica, Mulligan et al. (2020) defienden que reconocer la unidad de repetición repercute en el desarrollo del razonamiento multiplicativo y algebraico. Bajo esta mirada, es necesario ser consciente que la demanda cognitiva de la habilidad de copiar, interpolar o extender no es la misma que para tareas como abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición o crear, que sí requieren de una percepción más abstracta y funcional del patrón, así como de sus unidades de repetición. Por tanto, resulta conveniente que los docentes utilicen estrategias de instrucción basadas en preguntas que vehiculen el proceso de enseñanza-aprendizaje de los patrones (Castro-Rodríguez y Castro, 2016), que hagan uso de un lenguaje comprensible que facilite la asimilación de estos procesos complejos (Erath et al., 2021) y que prioricen el uso de contextos de enseñanza que permitan explorar de manera tangible la estructura del patrón.

Estos hallazgos, en su conjunto, contribuyen a poner al alcance del profesorado de las primeras edades herramientas y recursos que sirvan de

inspiración para: a) planificar la enseñanza de los patrones de repetición como un recorrido de lo particular a lo general contemplando diferentes contextos de enseñanza; b) considerar una trayectoria de aprendizaje que contemple habilidades para hacer patrones con un orden de abstracción creciente, para así dotar de comprensión y significación los inicios del pensamiento algebraico, evitando un tratamiento de los patrones exclusivamente de reproducir o extender, sin identificar la unidad de repetición (Acosta, 2023) gestionar la intervención docente en consonancia con las orientaciones teóricas sobre las habilidades para hacer patrones, descritas por autores como Acosta et al. (2022b); Clements y Sarama (2015); Larkin et al. (2022); Lüken y Sauzet (2020); Pincheira et al. (2022); Rittle-Johnson et al. (2013); Wijns, Torbeyns, De Smedt et al. (2019); d) promover de manera guiada y acompañada el reconocimiento de la unidad de repetición de una seriación, para fomentar la transición del pensamiento recursivo al relacional y funcional; y e) promocionar el uso de preguntas intencionadas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014) que inviten a generar conocimiento compartido con el grupo de iguales, para promocionar el diálogo entre iguales y retroalimentar el proceso de aprendizaje de los escolares (Berciano-Alcaraz et al., 2022), evitando así, preguntas que no comporten razonamiento, ni justificación y que se contesten con un “sí” o un “no”.

Como limitaciones de nuestro estudio, es importante declarar que los datos que se generan no pretenden ser generalizables a universos de mayor magnitud (Hernández et al. 2010), sino sumarse al cuerpo de investigación sobre patrones y pensamiento algebraico convirtiéndose en una vía de inspiración que guíe la acción futura mediante la reflexión (Radford y Sabena, 2015). Además, es importante mencionar, que el uso diferido, a través de imágenes, de situaciones reales en la primera etapa del itinerario de enseñanza puede haber influido en las respuestas de los escolares, puesto que no se ha podido comprobar si los errores hubieran disminuido con el desarrollo de las tareas en un contexto real directo. Todas estas cuestiones nos permiten iniciar un nuevo ciclo de iteración para el diseño de un itinerario para 5 años, y así poder analizar, tanto transversalmente como longitudinalmente, la influencia de los contextos en el proceso de enseñanza de patrones de repetición. Sería interesante también en una línea futura analizar los modos de pensamientos que se movilizan en otros niveles del EIEM, así como el tipo de error a partir de las aportaciones de Collins y Laski (2015) y Rittle-Johnson et al. (2013).

A modo de conclusión, se apuesta por un proceso de enseñanza-aprendizaje que aproveche todas las oportunidades y potencial que ofrecen los patrones de repetición. En esta dirección, se sugiere una implementación que siga un curso de lo concreto a lo abstracto, en donde se movilicen habilidades para hacer patrones con una dificultad creciente; es decir, donde se promocionen las habilidades propias del pensamiento recursivo (copiar, interpolar y extender), pero que también se avance hacia aquellas que promueven el pensamiento relacional y funcional (abstraer o traducir, reconocer la unidad de repetición y crear)

diversificando el uso de contextos de enseñanza. Desde esta óptica, la búsqueda y el uso de la generalización se considera un hito y una característica del pensamiento algebraico necesaria para fomentar un aprendizaje desde el terreno de lo concreto hacia lo abstracto (Acosta y Alsina, 2022; Cañadas et al., 2008; Papic et al., 2011; Pincheira y Alsina, 2021; Torres et al., 2022). Bajo esta mirada, el álgebra temprana en general, y los patrones matemáticos en particular, se configuran como una ruta para involucrar a los escolares, en la observación, el razonamiento y el reconocimiento de estructuras matemáticas abstractas (Blanton y Kaput, 2011). Es decir, un camino que se inicia con la enseñanza de patrones de repetición promocionando el peregrinaje entre el pensamiento recursivo, relacional y funcional, incluyendo así una planificación minuciosa con oportunidades para explorar, manipular e identificar propiedades concretas y avanzar hacia la generalización de estructuras.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue respaldado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España bajo la Subvención para Formación de Profesorado Universitario (FPU16-01856). Agradecemos la predisposición de la escuela Pericot de Girona y a Mireia Moran, maestra de los escolares participantes. Los autores desean agradecer, además, a la editora y revisores por su ayuda en la mejora del artículo.

REFERENCIAS

- Acosta, Y. (2023). *Inicios del pensamiento algebraico en educación infantil a través de los patrones de repetición* [Tesis doctoral, Universitat de Girona]. Tesis Doctorals en Xarxa (TDX). <https://www.tdx.cat/handle/10803/253>
- Acosta, Y. y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood*, 45(1), 14-29. <https://doi.org/10.1177/1836939119885310>
- Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Influencia del contexto de enseñanza en la representación de patrones en educación infantil. *Alteridad*, 17(2), 166-179. <https://doi.org/10.17163/alt.v17n2.2022.01>
- Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022a). El pensamiento algebraico en educación infantil: Estrategias didácticas para promover y evaluar las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 11(2), 1-37. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37>
- Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022b). Tareas y habilidades para hacer patrones de repetición en libros de texto de educación infantil. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 22, 91-110. <https://doi.org/10.35763/aiem22.4193>

- Alsina, Á. (2020). El enfoque de los itinerarios de enseñanza de las matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-158. <https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018>
- Alsina, Á. (2022). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3 a 6 años)*. Graó.
- Anglada, M. L., Cañadas, M. C. y Brizuela, B. M. (2022). Identificación de estructuras por niños de cinco años en una tarea que involucra funciones lineales en sus formas directa e inversa. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 149-157). SEIEM.
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 15(3), 211-241. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109>
- Bakker, A. (2019). *Design research in education*. Routledge.
- Berciano-Alcaraz, A., Salgado-Somoza, M. y Jiménez-Gestal, C. (2022). Alfabetización computacional en educación infantil: Dificultades y beneficios en el aula de 3 años. *Revista Electrónica Educare*, 26(2), 1-21. <https://doi.org/10.15359/ree.26-2.15>
- Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraisation: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Springer.
- Bock, A. M., Cartwright, K. B., McKnight, P. E., Patterson, A. B., Shriver, A. G., Leaf, B. M., Mohtasham, M. K., Vennergrund, K. C. y Pasnak, R. (2018). Patterning, reading, and executive functions. *Frontiers in Psychology*, 9(1802). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01802>
- Borriello, G. A., Flynn, M. E. y Fyfe, E. R. (2022). Developmental differences in children's and adults' strategies on a repeating pattern task. *Early Childhood Research Quarterly*, 59, 300-310. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2021.12.012>
- Cañadas, M. C., Castro Martínez, E. y Castro Martínez, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151 <https://digibug.ugr.es/handle/10481/4392>
- Cañadas, M. C., Blanton, M., y Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking / Número especial sobre el pensamiento algebraico temprano. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 469-478. <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569>

- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 37(1), 53-59. <https://doi.org/10.1007/BF02655897>
- Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 87-107). Ediciones Pirámide.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools.
- Collins, M. A. y Laski, E. V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, 32, 204-214. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.04.004>
- Creswell, J. W. y Plano Clark, V. L. (2018). *Designing and conducting mixed methods research* (Vol. 3). Sage.
- Decret legislatiu 181/2008, de 9 de setembre, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del segon cicle de l'educació infantil. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya (DOGC)*, 5216, of 9 September 2008. <https://portaldogc.gencat.cat/utillsEADOP/PDF/5216/1017382.pdf>
- Dumas, D., Alexander, P. A. y Grossnickle, E. M. (2013). Relational reasoning and its manifestations in the educational context: A systematic review of the literature. *Educational Psychology Review*, 25(3), 391-427.
- Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J. y Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM – Mathematics Education*, 53(2), 245-262. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2>
- Fernández, C., Baptista, P. y Hernández, R. (2014). *Metodología de la investigación*. Editorial McGraw Hill.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Fyfe, E. R., McNeil, N. M. y Rittle-Johnson, B. (2015). Easy as ABCABC: Abstract language facilitates performance on a concrete patterning task. *Child Development*, 86(3), 927-935. <https://doi.org/10.1111/cdev.12331>
- Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2003). *Test of early mathematics ability-third Edition*. Pro Ed.
- Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (Vol. 5). McGraw-Hill.
- Hunter, J. y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM – Mathematics Education*, 54(6), 1349-1362. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y>

- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8, 139-151.
- Larkin, K., Resnick, I. y Lowrie, T. (2022). Preschool children's repeating patterning skills: Evidence of their capability from a large scale, naturalistic, Australia wide study. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-16. <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2056320>
- Lüken, M. M. (2018). Repeating pattern competencies in three- to five-year old kindergartners: A closer look at strategies. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank y C. Benz (Eds.), *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education* (pp. 35-53). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_3
- Lüken, M. M. y Kampmann, R. (2018). The influence of fostering children's patterning abilities on their arithmetic skills in grade 1. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank y C. Benz (Eds.), *ICME-13 Monographs. Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education: Vol. I* (pp. 55-66). Springer. <https://pub.uni-bielefeld.de/record/2918871>
- Lüken, M. M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: A mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 28-48. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452>
- Martin, R., Viseu, F. y Rocha, H. (2023). Functional thinking: A study with 10th-grade students. *Education Sciences*, 13(4), 335. <https://doi.org/10.3390/educsci13040335>
- Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32. <https://doi.org/10.1007/BF03217543>
- McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 310-337. <https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717380>
- Miles, M. y Huberman, M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2.^a ed.). Sage.
- Miller, M. R., Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M. y Fyfe, E. R. (2016). The Influence of relational knowledge and executive function on preschoolers' repeating pattern knowledge. *Journal of Cognition and Development*, 17(1), 85-104. <https://doi.org/10.1080/15248372.2015.1023307>
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: Un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.
- Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. En L. D. English y J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29-45). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6440-8_3

- NCTM. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268. <https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237>
- Pincheira, N., Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: Un análisis desde los libros de texto. *PNA*, 17(1), 1-24. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522>
- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 157-182). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7
- Reinke, L. T. y Casto, A. R. (2022). Motivators or conceptual foundation? Investigating the development of teachers' conceptions of contextual problems. *Mathematics Education Research Journal*, 34(1), 113-137. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00329-8>
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., Hofer, K. G. y Farran, D. C. (2017). Early math trajectories: Low-income children's mathematics knowledge from ages 4 to 11. *Child Development*, 88(5), 1727-1742. <https://doi.org/10.1111/cdev.12662>
- Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E., y McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development*, 14(3), 376-396. <https://doi.org/10.1080/15248372.2012.689897>
- Taylor-Cox, J. (2003). Algebra in the early years? Yes! *Young Children*, 58(1), 14-21.
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. En A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). Continuum.
- Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R. y Levenson, E. (2017). Preschool teachers' variations when implementing a patterning task. *CERME 10*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01938920>
- Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: Estructuras y representaciones. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 16(3), 215-236. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637>
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E. S. y Barkai, R. (2018). Early childhood teachers' knowledge and self-efficacy for evaluating solutions to repeating pattern tasks. En I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank y C. Benz (Eds.), *Contemporary research and perspectives on early childhood*

- mathematics education* (pp. 291-310). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73432-3_15
- Twohill, A. (2018). Observations of structure within shape patterns. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-Year-Olds* (pp. 213-235). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_9
- Vergel, R., Radford, L. y Rojas, P. J. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético “sofisticado” y proto-formas de pensamiento algebraico: Una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(74), 1174-1192. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11>
- Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. (2012). Repeating patterns: Strategies to assist young students to generalise the mathematical structure. *Australasian Journal of Early Childhood*, 37(3), 111-120. <https://doi.org/10.1177/183693911203700315>
- Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Four-year olds’ understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, 49, 152-163. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.06.004>
- Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Young children’s patterning competencies and mathematical development: A review. En K. M. Robinson, H. P. Osana y D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical learning and cognition in early childhood* (pp. 139-161). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Yeni Acosta
Universitat de Girona
yeni.acosta@udg.edu

Ángel Alsina
Universitat de Girona
angel.alsina@udg.edu

Recibido: octubre, 2022. Aceptado: junio, 2023

doi: 10.30827/pna.v18i2.25256



ISSN: 1887-3987

MODES OF ALGEBRAIC THINKING IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION: EFFECTS OF A TEACHING ITINERARY OF REPETITION PATTERNS

Yeni Acosta and Ángel Alsina

Algebraic thinking is assumed to be a multimodal mode of thinking that, by focusing on relationships and changes, facilitates analysis, representation, justification and understanding of structure. From this point of view, repetition patterns are considered the gateway to the beginnings of algebraic thinking in early childhood education, since the understanding of the structure of the pattern seems to be fundamental to transcend from a type of thinking that allows establishing predictive relationships between successive elements, to a more sophisticated one that promotes the abstraction of the underlying rule of seriation. From this framework, a Design-Based Research is developed with 24 Spanish 4-year-old students to design, validate and analyse the effects of a teaching itinerary of repetition patterns, which includes tasks at different levels: 1) informal contexts, which allow visualising mathematical ideas in a concrete way (real situations, manipulatives and games); 2) intermediate contexts, which through exploration and reflection lead to the progressive schematization and modelling of mathematical knowledge (literary and technological resources); and 3) formal contexts, in which the representation and formalization of mathematical knowledge is worked with conventional procedures and notations to complete in this way the learning from the concrete to the symbolic (graphical resources). In addition, the modes of algebraic thinking (recursive, relational and functional) mobilised by 8 students with an average Mathematical Competence Index (MCI), according to the TEMA 3 test, are analysed in the most specific contexts of the itinerary. In line with the objectives of the study, a quantitative and qualitative analysis of the data is carried out on the basis of participant observations, pedagogical documentation and student representations based on drawings. On the one hand, the quantitative results with the 24 students show a 22% difference in success between concrete and abstract contexts, which is evidence that the resolution and comprehension of the tasks with repetition patterns decreases as more formal teaching contexts are used. On the other hand, the qualitative results of the discourse used by the 8 schoolchildren show that they focus their attention on observing the relationship between consecutive elements, rather than on detecting the underlying structure that is repeated regularly, so that recursive rather than functional thinking is more present. It is concluded that the teaching of repetition patterns must guarantee the transition between recursive, relational and functional thinking. In this sense, it is necessary to set tasks from the concrete to the abstract, which activate patterning skills with increasing difficulty: first, recursive thinking skills (copying, interpolating and extending) and, progressively, skills that promote relational and functional thinking (abstracting or translating, recognising the unit of repetition and creating).