PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ESTUDIANTES DE 2º DE PRIMARIA: ESTRUCTURAS Y REPRESENTACIONES

María D. Torres, María C. Cañadas y Antonio Moreno

Este trabajo es parte de una investigación más amplia que se desarrolla en el ámbito del pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria en España. Nos centramos aquí en identificar las estructuras (regularidades identificadas) y las representaciones que aparecen cuando los estudiantes trabajan con tareas de generalización. Involucramos funciones lineales en un estudio de caso dentro del experimento de enseñanza con tres estudiantes de 2º de educación primaria (7-8 años). Destacamos que el número de estructuras y la forma de generalizar la estructura dependen de las tareas planteadas en cada caso, según la función implicada. Las generalizaciones de todos los estudiantes se han representado mediante representaciones verbales y/o numéricas.

Términos clave: Estructura; Generalización; Pensamiento funcional; Representaciones

Functional thinking of 2nd primary student: structures and representations

This work is part of a broader investigation that is being developed in the field of algebraic thinking of elementary school students in Spain. We focus here on identifying the structures (identified regularities) and representations that appear during the generalization process of some students when students work with generalization tasks. For this purpose, we implemented generalization tasks involving linear functions in a case study within a teaching experiment with three students in the 2nd year of primary school (7-8 years old). We emphasize that the number of structures and the way of generalizing the structure depend on the tasks posed in each case. The generalizations of all students have been represented by verbal and/or numerical representations.

Keywords: Functional thinking; Generalization; Representations; Structure

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215-236.

Las directrices curriculares de algunos países como Australia, Canadá, China, Japón, Corea, Singapur o Portugal contienen contenidos explícitos sobre el álgebra en edades tempranas (Merino et al., 2013; Pincheira y Alsina, 2021). En el caso de España (donde se desarrolla esta investigación), el currículo se hace menos explícito en cuanto a elementos algebraicos y recomienda que los estudiantes de primaria sean capaces de “describir y analizar cambios en situaciones, identificar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales” (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 19387). La novedad de estos contenidos en los diseños curriculares justifica la necesidad de que la investigación aporte sugerencias sobre cómo implementar esos contenidos (Ayala-Altamirano y Molina, 2020).

Una de las aproximaciones al pensamiento algebraico recomendada para los estudiantes de los primeros cursos de educación primaria, e incluso infantil, es el pensamiento funcional. Este enfoque considera el uso del álgebra en situaciones concretas, de una forma significativa, con la función como contenido matemático protagonista (Drijvers et al., 2011). El pensamiento funcional se centra en las relaciones existentes entre cantidades que covarían conjuntamente (Blanton y Kaput, 2004). Los antecedentes han demostrado que brindar a los estudiantes la oportunidad de trabajar con tareas de generalización que involucran funciones conduce a una comprensión de la variabilidad conjunta (Brizuela et al., 2015; Cañadas y Brizuela, 2016).

El desarrollo del pensamiento funcional fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011) y ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en educación secundaria (Doorman y Drijvers, 2011). Dos nociones fundamentales con las que abordar el pensamiento funcional, y que tratamos en este estudio, son la generalización y la representación de la generalidad. La capacidad de los estudiantes de educación primaria para generalizar, identificar estructuras y representar las generalizaciones son de interés en el contexto funcional (Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017; Torres, Moreno y Cañadas, 2021).

Consideramos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Tomamos la generalización como un proceso y como un producto (Stephens et al., 2017). En este estudio implicamos tareas de generalización que requieren precisamente de la identificación de una regularidad o estructura a partir de unos casos particulares dados (Pólya, 1966). Las nociones de generalización y de estructura están relacionadas ya que en el proceso de generalización se puede identificar la estructura a partir de casos particulares. Trabajar la generalización en los cursos más elementales permite, por ejemplo, que los estudiantes se alejen de las particularidades que trae consigo el cálculo aritmético, identificando la estructura y las relaciones matemáticas involucradas (Blanton et al., 2011). En este estudio nos preguntamos por cuál o cuáles son las estructuras que evidencian los estudiantes sobre las relaciones entre las variables implicadas en diferentes tareas durante el proceso de generalización. Atendemos a las estructuras evidenciadas durante el trabajo con unos casos particulares y también a las estructuras que generalizan.

La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación (Duval, 2006). En el proceso de generalización que se lleva a cabo en este estudio nos centramos en analizar la forma en la que expresan los estudiantes las relaciones entre las variables implicadas. Los estudiantes pueden representar de diferentes formas estas relaciones. El simbolismo algebraico no es la única forma en que los estudiantes representan el pensamiento funcional, que también puede adoptar la forma de lenguaje natural o incluso gestos (Radford, 2018). En este sentido nos es útil la noción de estructura porque con ella interpretamos, de sus representaciones, las relaciones que evidencian. En este sentido, nos preguntamos: ¿cuáles son las representaciones que usan los estudiantes de educación primaria para expresar la generalización?

Generalización y estructura en un enfoque funcional del *early algebra*

El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Promover el pensamiento funcional de los estudiantes más pequeños puede ayudar a desarrollar habilidades para analizar relaciones entre cantidades y deducir la regla general de una regularidad en una situación dada (Kaput, 2008).

La generalización es un aspecto clave en el pensamiento funcional (Cooper y Warren, 2011; Kaput, 2008). En este estudio atendemos a la generalización como un proceso observando las diferentes estructuras que evidencian los estudiantes al trabajar con diferentes funciones lineales. Una forma de describir cómo los estudiantes relacionan las variables durante el proceso de generalización es a través de la estructura que identificamos en sus respuestas, las cuales nos ayudan a entender cómo estos perciben, organizan y relacionan las regularidades detectadas (Papic et al., 2011). La estructura hace referencia a la forma en la que se organiza la regularidad presente entre las variables de las funciones involucradas (Torres, Cañadas y Moreno, 2021). Se refiere a cómo se operan los valores indeterminados o valores numéricos cuando se usa o representa la regularidad (Ureña, 2021). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Torres, Cañadas y Moreno, 2021; Warren et al., 2013). En este contexto, generalizar consiste en establecer la estructura general existente entre cantidades que covarían.

Las definiciones de estructura en la literatura comparten ciertos aspectos, tales como una expresión matemática, una entidad compuesta por elementos, la relación entre los elementos que la componen (signos y operaciones que las relacionan) y el orden de los elementos que componen dicha expresión (Hewitt, 2019; Kieran, 1989). En concreto, estamos interesados en identificar y analizar las estructuras subyacentes en las respuestas de los estudiantes para describir cómo estos organizan las regularidades en problemas que involucran funciones lineales.

Entre los investigadores que exploran la identificación de estructuras podemos destacar los trabajos liderados en Australia por Joanne Mulligan (p.e., Mulligan y Mitchelmore, 2009; Mulligan et al., 2006; Papic et al., 2011). Los investigadores infieren las estructuras interpretadas por los estudiantes al resolver diferentes problemas donde, a través de las representaciones que estos usan, analizan las diferentes formas en las que los niños organizan objetos y conjuntos de objetos, según lo que interpretan de los problemas presentados. Los autores proponen cuatro etapas generales de desarrollo estructural: "pre-estructural, emergente, estructura parcial y desarrollo estructural" (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 42). Otros autores más centrados en el contexto funcional estudian las estructuras en tareas de generalización en estudiantes de educación primaria (p.e., Pinto, 2019). Este autor aborda la noción de estructura con estudiantes de tercero de primaria (8-9 años). Emplearon 17 estructuras diferentes para una misma regularidad entre las variables, $y = 2x + 6$. Siete de ellas adecuadas a la tarea ($y = 2(x + 2) + 2$, $y = 2x + 3 + 3$, $y = x + x + 6$, $y = 2x + 6$, $y = 3(x + 2) - x$, $y = (x + 3) \cdot 2$, $y = (x + 2) + (x + 2) + 2$), mientras que las 11 restantes no lo fueron.

También Torres et al. (2018) en un estudio con seis estudiantes de segundo de educación primaria de 7-8 años identificaron cuatro tipos de estructuras diferentes ($y = x + 3$, $y = x + x$, $y = x + 2$, $y = x + 1$)[1], utilizando una tarea que involucra la función $y = x + 3$en la que se trabajaba con casos particulares dados. La mayoría generalizó verbalmente la estructura correcta, $y = x + 3$, al preguntar sobre la generalización e identificaron la misma estructura para casos particulares y para el caso general, observándose coherencia en sus respuestas. Ambos trabajos representan las estructuras de manera simbólica como una interpretación de lo que los estudiantes transmitieron de manera verbal y/o escrita.

En el estudio de la generalización como proceso destacamos los trabajos de Rivera (2017) y Rivera y Becker (2003), que han sido referentes para la construcción del modelo que utilizamos en el estudio de Torres, Moreno y Cañadas (2021). La diferencia sustancial entre el que mostramos aquí y los anteriores radica en la clasificación de casos particulares empleados que diferencian cada una de las fases en nuestro estudio. A partir de situaciones que involucran diferentes casos particulares y, observando estructuras, se puede llegar a la generalización.

El modelo de Torres, Moreno y Cañadas (2021) comprende tres fases: abducción, inducción y generalización. En cada fase se consideraron diferentes casos particulares propuestos a los estudiantes, las conjeturas planteadas por los estudiantes, las estructuras evidenciadas por los estudiantes y su representación, y la aceptación de una estructura previamente definida por los estudiantes que

1 Hemos traducido a lenguaje algebraico lo que el estudiante representa verbalmente.

definió el límite entre fases. Los casos particulares que facilitamos no son consecutivos para que los estudiantes no se ciñan a una relación de recurrencia que impida la evidencia de la relación funcional. Como sugiere Stacey (1989), los casos cercanos son aquellos que requieren que los alumnos determinen el siguiente término de una serie o uno que pudiera encontrarse contando. Los casos lejanos son los que requieren de una comprensión o de la identificación de la regularidad. Los casos específicos lejanos requieren representar cantidades que no se pueden dibujar o que son difíciles de encontrar contando con las habilidades académicas de los estudiantes. Además de los casos particulares, se plantearon casos indeterminados con cantidades indeterminadas en los que la respuesta dependía del reconocimiento de una relación. Presentamos las diferentes fases del modelo en la Figura 1.

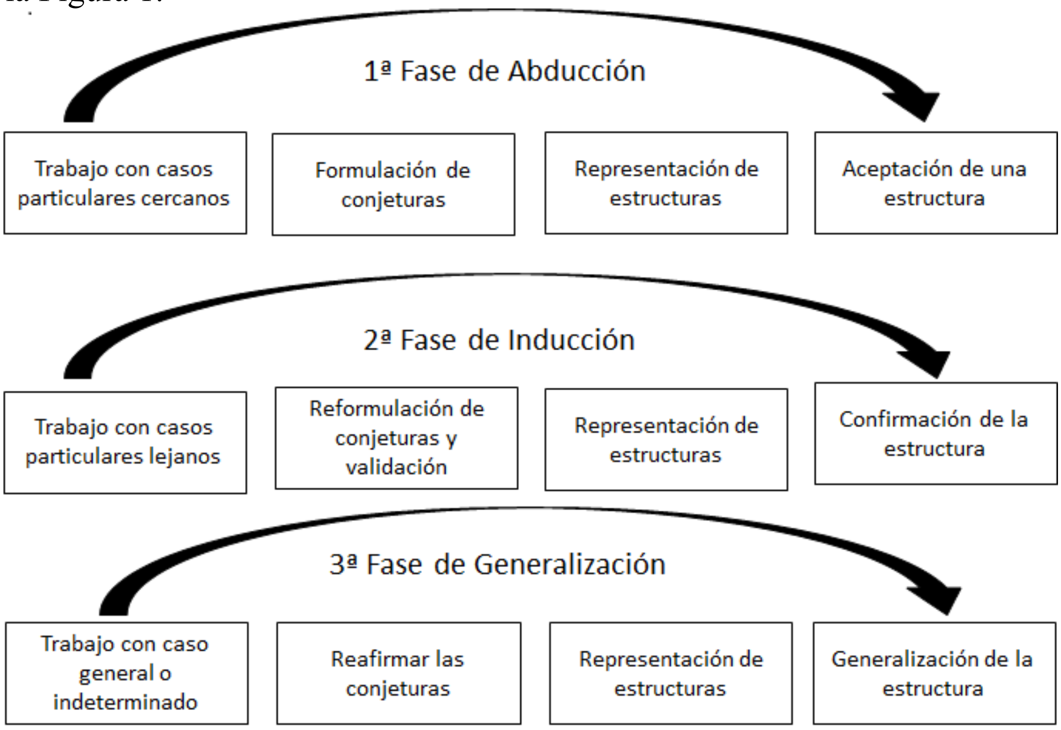


Figura 1. Modelo sobre el proceso de generalización (Torres, Moreno y Cañadas, 2021, p. 15)

La fase de abducción sucede en los primeros casos particulares (casos particulares cercanos). En esta fase se detectan las primeras estructuras. En la fase de abducción es donde se generan hipótesis que no se confirman hasta que no contamos con otros casos particulares, los lejanos (fase inductiva), momento en el que los estudiantes han necesitado identificar una relación entre las variables para poder continuar con el proceso ya que en estas edades quedan desprovistos de herramientas como visualizar claramente la cantidad, contar o dibujar al trabajar con cantidades cada vez más grandes. Es aquí donde observamos la posible confirmación de conjeturas; fase de inducción. Una conjetura se ha confirmado cuando un estudiante evidencia la misma estructura en más de dos ocasiones durante el trabajo con casos particulares lejanos. De esta manera el estudiante hace notar que ha adquirido una consciencia de la regularidad implicada, de la estructura implícita. Finalmente, si se consigue reafirmar la conjetura confirmada mediante los casos indeterminados o el general se obtiene la generalización.

Hemos llamado caso particular cercano cuando se solicita un término siguiente o alguno que puede obtenerse por un conteo, mientras que hemos llamado caso particular lejano a aquellos donde es necesario conocer o identificar el patrón o la función para dar respuesta. Los casos particulares lejanos son aquellos en los que los números representan cantidades que no pueden dibujarse o que dificultan el conteo debido al nivel educativo de los estudiantes. Además de esos casos particulares, al estudiante se le presentan casos indeterminados donde la respuesta está condicionada al reconocimiento de la función.

REPRESENTACIONES

En la tradición investigadora de la Educación Matemática las representaciones tienen gran relevancia por su rol en la construcción del conocimiento matemático (Cai, 2005; Kaput, 1991. El aprendizaje de representaciones matemáticas proporciona a los estudiantes herramientas que aumentan su capacidad de pensar además de ayudar a comunicar ideas matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007).

Tratar la generalización en educación primaria supone aceptar que los estudiantes pueden representar las relaciones identificadas no solo mediante simbolismo algebraico, sino que también lo pueden hacer mediante el lenguaje natural o los gestos (p.e., Radford, 2002). Si bien las letras son esenciales en álgebra, se acepta que los modos de pensamiento y actividad algebraica se pueden expresar de otras maneras. Los tipos de representaciones que pueden utilizar los alumnos de primaria para resolver problemas con funciones lineales incluyen: representación verbal, pictórico, numérico, notación algebraica, tabular y gráfico (Carraher et al., 2008). También podemos encontrar combinaciones de diferentes representaciones (Carraher et al. 2008). Asumimos que la representación verbal es aquella que se hace mediante el lenguaje natural, ya sea oral o escrito (Cañadas et al, 2008). Radford (2003), destaca que la representación verbal en las descripciones de los estudiantes ante casos particulares o el general, funciona como una herramienta útil para promover el uso de otros tipos de representaciones.

Las representaciones pictóricas utilizan únicamente recursos visuales, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Según los antecedentes, la representación pictórica y la verbal suelen ser las predominantes en el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos (Cañadas y Fuentes, 2015). También es usual encontrar la utilización de la representación verbal y la representación numérica para expresar las estructuras evidenciadas entre variables (Torres, Cañadas y Moreno, 2021).

Las representaciones numéricas se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático. Las representaciones simbólicas se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico, siendo las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción para los estudiantes. Así mismo, tenemos en cuenta las representaciones múltiples, que resultan de la combinación de dos o más representaciones diferentes (Kolloffel et al., 2009).

Ureña et al. (2019) estudiaron las representaciones de las generalizaciones de 25 estudiantes de cuarto de primaria (de 9 a 10 años) en torno a una tarea basada en la función $y = x + 2$. Los autores identificaron cuatro formas de representación de la generalización de una relación funcional. Todos los estudiantes usaron la representación numérica, seis estudiantes usaron la representación genérica, siete la representación verbal y tres la simbólica.

En el estudio de Merino et al. (2013) con 20 estudiantes de 10 a 11 años, las representaciones verbales, pictóricas, numéricas y simbólicas son las que tuvieron mayor relevancia. El tipo de representación más usada por los estudiantes fue la verbal, si bien en la mayoría de los casos estas representaciones aparecen como representaciones múltiples, acompañadas de otras numéricas o pictóricas.

Con este estudio pretendemos contribuir a la investigación sobre el pensamiento funcional de estudiantes de 2º de educación primaria abordando la generalización. Los objetivos de investigación de este trabajo son:

- Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes durante las tareas de generalización.
- Describir las representaciones que usan los estudiantes.

MÉTODO

Este trabajo es parte de una investigación más amplia. Presentamos un estudio de tipo cualitativo, con carácter exploratorio y descriptivo. Enmarcamos este estudio en el paradigma de la investigación de diseño, en particular, la metodología propuesta es un experimento de enseñanza (Molina et al, 2011). Aplicamos cuatro sesiones de clase a un grupo de 24 estudiantes de 2º curso de Educación Primaria (7-8 años) de un colegio de Granada (España), de los cuales se seleccionaron tres para realizar estudios de caso, dentro del experimento de enseñanza. Dicha selección se debió a que asistieron a todas las sesiones de clase y la maestra los propuso por su buena disposición a colaborar y sus diferentes logros de aprendizaje. Los estudiantes habían trabajado previamente con los números del 0 hasta el 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con y sin llevadas. No habían trabajado con problemas que involucraran funciones lineales, la generalización y tampoco habían hecho uso de diferentes representaciones para manifestar relaciones entre variables. En adelante nombraremos a los estudiantes como E1, E2 y E3, para respetar su anonimato.

Recogida de información

Para cada una de las cuatro sesiones diseñamos una tarea con base en un problema de generalización que involucraba una función lineal. Los contextos de las tareas utilizadas han sido validados al ser tratadas previamente en nuestros antecedentes (Brizuela et al, 2015). Cada sesión estaba compuesta de diferentes partes. En la primera introdujimos el contexto de la tarea y planteamos algunas preguntas relativas a casos particulares (entre 4 y 6 cuestiones) hasta ver que los estudiantes entendían la situación y las preguntas. En la segunda, aplicamos un cuestionario, de manera individual y en papel, con preguntas sobre casos particulares (5 cuestiones) y, siguiendo el modelo de Torres, Moreno y Cañadas (2021), incluimos preguntas sobre otros casos particulares hasta llegar a la generalización. La tercera parte constituía el cierre de las sesiones, momento en el que los estudiantes podían presentar sus respuestas y explicarlas al gran grupo.

En las preguntas realizadas sobre los casos particulares (cercanos y lejanos) hemos evitado números consecutivos para evitar la recursividad como único modo de generalización. Los casos planteados han ido desde cantidades concretas hasta cantidades indeterminadas mediante el uso de términos como “muchos”.

Tres miembros del equipo de investigación estuvieron a cargo de la implementación de las sesiones: un investigador-docente era que guiaba la sesión, otro investigador ayudaba al investigador-docente en la gestión del aula atendiendo las dudas que pudieran surgir durante la cumplimentación de los cuestionarios y otro investigador llevaba la parte técnica sobre la videograbación de las sesiones. La maestra de los estudiantes estuvo presente pero no intervino. Los estudiantes no recibieron *feedback* para no interferir con nuestros objetivos de investigación y con el carácter exploratorio del trabajo. La información que analizamos aquí proviene de los cuestionarios cumplimentados por los estudiantes.

Sesiones de clase

En la Tabla 1 presentamos los contextos de las tareas planteadas en las diferentes sesiones y las funciones involucradas.

El contexto de las dos primeras sesiones fue el mismo porque resultó motivador para los estudiantes. En las sesiones 3 y 4 la función fue la misma y el contexto diferente ya que el contexto del cumpleaños no generó el interés esperado en los estudiantes. Dependiendo de la dificultad en las respuestas de los estudiantes involucramos funciones aditivas y/o multiplicativas.

A continuación, presentamos las sesiones de clase que tuvieron lugar. Todas siguen una estructura basada en un proceso de generalización (Torres, Moreno y Cañadas, 2021).

Los propósitos de las sesiones fueron, acordes con los objetivos de investigación: (a) explorar cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas, b) identificar y describir estructuras evidenciadas por los estudiantes, (c) explorar la generalización de los estudiantes mediante el uso de diferentes representaciones.

Tabla 1
Sesiones de clase

Sesiones	Contexto de la tarea	Función
Parque de atracciones 1	Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.	$y = x + 3$
Parque de atracciones 2	A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.	$y = 1 + 2x$
Cumpleaños	Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay para comer bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.	$y = 2x$
Paradas de tren	Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?	$y = 2x$

Sesión 1. Parque de atracciones 1

Algunos de los casos particulares y el caso general empleados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 2.

Tabla 2
Sesión 1. Preguntas sobre casos particulares y caso general

Casos particulares cercanos y lejanos	Caso general
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 14 viajes? ¿Cómo lo sabes?	Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado.
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 viajes? ¿Cómo lo sabes?	
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes? ¿Cómo lo sabes?	

Sesión 2. Parque de atracciones 2

En esta ocasión preguntamos a los estudiantes por la generalización de dos formas diferentes que hemos distinguido como caso general 1 y caso general 2. El caso general 2 es diferente a los tratados anteriormente, ya que planteamos la pregunta general representando una cantidad indeterminada mediante un dibujo, una mancha, como puede apreciarse en la tercera columna de la Tabla 3. Tanto los casos particulares como los generales fueron planteados como indica la misma tabla.

Tabla 3
Sesión 2. Casos particulares y generales

Casos particulares cercanos y lejanos	Caso general 1	Caso general 2
¿Cuánto pagas por el carnet y 1 viaje? Explícame cómo lo haces.	Isabel paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.	Isabel paga por el carnet y *viajes.* Explica cómo sabe cuánto paga.
¿Cuánto pagas por el carnet y un millón viajes? Explícame cómo lo haces		

Sesión 3. Cumpleaños

Los casos particulares en esta sesión son análogos a los de la sesión 1. Hubo una única pregunta relativa al caso general. Algunos de los casos particulares y el caso general aplicados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 4. Aquí planteamos la pregunta general representando una cantidad indeterminada mediante el símbolo **Ω**.

Tabla 4
Sesión 3. Casos particulares y caso general

Casos particulares cercanos y lejanos	Caso general
Si hay 2 personas en el cumpleaños ¿Cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	Los padres de Lucía han recibido una carta de su amigo extraterrestre Marsian. Les ha dicho (en su idioma) que van a ir **Ω** extraterrestres a la fiesta. ¿Puedes escribirle a Marsian los platos que se necesitan?
Si vamos las 20 personas de la clase ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	

Sesión 4. Paradas de tren

En esta sesión la forma de presentar los casos particulares fue diferente. Planteamos ahora una forma tabular de representación con la finalidad de profundizar en la manera en que identifican las estructuras. En la Figura 2 aparece la secuencia de casos particulares en la manera en la que se lo presentamos a los estudiantes en este cuestionario.

En esta sesión organizamos y relacionamos las variables involucradas en el problema mediante una tabla. Los encabezados están en blanco ya que pretendíamos explorar el significado que le atribuyen los alumnos a una tabla de dos columnas (si saben usarla, si relacionan valores por filas o por columnas, cómo nombran a las variables involucradas…). En definitiva, explorar la forma en la que identifican la relación entre cantidades variables. Esta actividad sugería además escribir los encabezados para las variables dependientes o independientes. Nosotros dábamos cantidades iniciales y también les pedíamos que dieran algunos números cada vez más grandes para ver si estaban identificando la relación entre variables. Incluimos las expresiones de "muchas paradas" e "infinitas paradas" como cantidades indeterminadas. La pregunta para el caso general viene dada por: ¿Cómo le explicarías a un amigo cuantas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

Casos particulares cercanos y lejanos	
1	
3	
13	
Proponen números	
Probar con números cada vez más grandes (dependerá de los que hayan propuesto)	
1 millón	
Muchas paradas	
Infinitas paradas	

Figura 2. Casos particulares, sesión 4

Análisis de datos

Tras analizar las respuestas escritas al cuestionario, realizamos un análisis de datos cualitativo. En este análisis hemos atendido únicamente a la información que provenía de los cuestionarios ya que la de las sesiones videograbadas fue muy escueta al no haber participación de los estudiantes. Diseñamos las categorías de análisis relativas a estructuras durante el proceso de generalización (casos particulares y caso general) y representaciones, atendiendo a los objetivos de investigación. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza porque es una manera de evidenciar que son conscientes de la regularidad implícita y que no lo expresan por casualidad. Consideramos que, en estos casos, las respuestas de los estudiantes no son producto de un mero cálculo, sino que responden a un patrón de respuesta, la creación de conciencia de lo que se repite, para varias cuestiones o la generalizan. Describimos las diferentes representaciones utilizadas en cada sesión atendiendo a la clasificación presentada en el apartado de representaciones de este estudio.

En los resultados presentaremos las categorías, a la vez que presentamos ejemplos del trabajo de los estudiantes que las evidencian.

RESULTADOS

Presentamos los resultados sobre estructuras tanto para los casos particulares como para el caso general en cada una de las tareas propuestas. Describiremos también las representaciones utilizadas en las respuestas de los estudiantes.

Estructuras y representaciones

Presentamos el resumen de resultados sobre estructuras en la Tabla 5 en las cuatro sesiones. Expresamos las estructuras que hemos interpretado con notación algebraica, aunque no es la representación empleada por los estudiantes como se observará en los ejemplos posteriores. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras; recogemos las estructuras de cada estudiante en el orden cronológico en el que las observamos.

Tabla 5
Resumen de estructuras evidenciadas

Sesión	Función	Estudiante	En trabajo con casos particulares	En trabajo con caso general 1	En trabajo con caso general 2
Parque de atracciones 1	$y = x + 3$	E1	$y = x + 3$	NR[i]	
		E2	$y = x + 3$	$y = x + 3$	
		E3	$y = x + 3$	NE[ii]	
Parque de atracciones 2	$y = 1 + 2x$	E1	$y = 1 + 2x$	NE	NE
		E2	$y = 1 + x$	$y = 1 + x$	$y = 1 + x$
		E3	$y = 1 + x$	NE	NE
		E1	$y = x + x$	$y = x$	

Tabla 5
Resumen de estructuras evidenciadas

Cumpleaños	$y = 2x$	E2	$y = 2x$	NE
		E3	$y = 2x$	NR
Paradas de tren	$y = 2x$	E1	$y = 2x$	NE
		E2	$y = 2x$	NE
		E3	$y = 2x$	NE

[i] NR= No responde
[ii] NE= No evidencia estructura

En general, todos los estudiantes identificaron alguna estructura en el trabajo con casos particulares; no ocurre lo mismo en el caso general. En la sesión 1 (parque de atracciones 1), los tres estudiantes evidenciaron la estructura $y = x + 3$ en respuestas a preguntas sobre casos particulares. E1 expresó que son 103 lo que tiene que pagar por hacerse socio del parque y comprar 100 viajes: "junto 100 y 3 más". E3 escribió que "suma 3 y 100" para obtener la respuesta. Mostramos un ejemplo de la respuesta de E2 en una cuestión sobre casos particulares en la Figura 3.

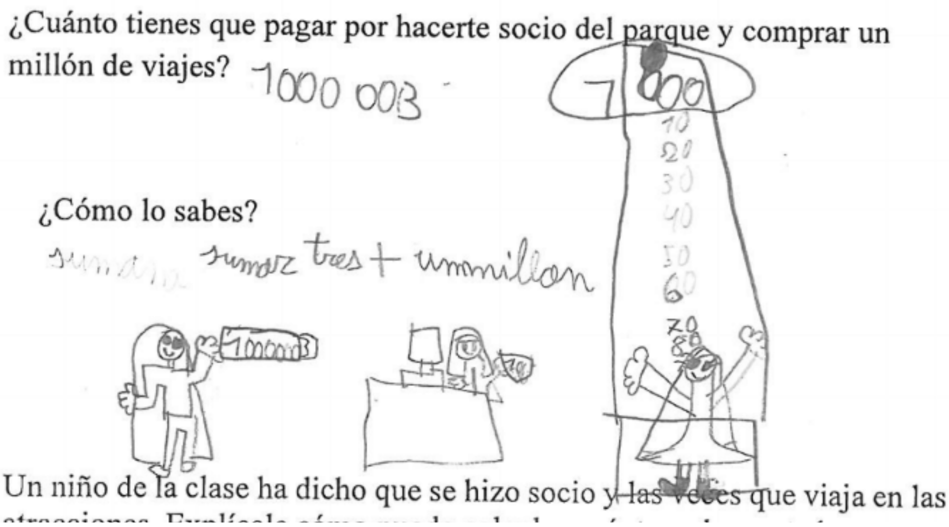


Figura 3. Respuesta de E2 a la pregunta sobre un caso particular (1 millón)

E2 es el único estudiante que generalizó en esta sesión expresando: "porque siempre tengo que sumar 3 + un número". E1 no respondió a esta cuestión y E3 lo hizo sin dar evidencia de haber identificado estructura. La respuesta de E3 al caso general fue: "dándole el precio".

En cuanto a las representaciones usadas por estos tres estudiantes podemos identificar dos tipos: verbal y numérica. Ambas pueden observarse en el ejemplo de la figura 2. La representación verbal vino dada por el lenguaje natural escrito:

"sumar tres + un millón". Dentro de esta representación encontramos el signo más (+), representando la adicción de cantidades. Podemos apreciar que en este caso los dibujos que realiza no contienen el significado de lo que sería una representación pictórica.

En la sesión 2, solo E1 evidenció la estructura correcta del problema en los casos particulares. Al preguntarle cuánto paga por el carnet y 20 viajes, E1 escribe: "sumo 20+1 y me salen 21". Cuando le preguntamos cuánto paga por el carnet más un millón de viajes, E1 contestó: "Sumo 1000000+1 y me salen 2000001". E2 y E3 contestaron a las preguntas sobre los casos particulares evidenciando la misma estructura $y = 1 + x$, incorrecta en este contexto. E2 contestó al caso particular sobre los 20 viajes y de la siguiente forma: "21, porque hay que sumar 1 y 20". E3 igualmente contestó: "21, sumando 20 y 1".

En cuanto a los casos generales, E2 generalizó mediante la estructura $1 + x$. En el caso general 1 expresa: "61 porque muchos pueden ser 60 más 1 son 61". En el caso general 2, E2 expresó: "6 porque puede que haya cinco y 1+5 son 6". Hizo referencia a la cantidad indeterminada representada por una mancha mediante un valor concreto. En la Figura 4 puede verse este ejemplo.

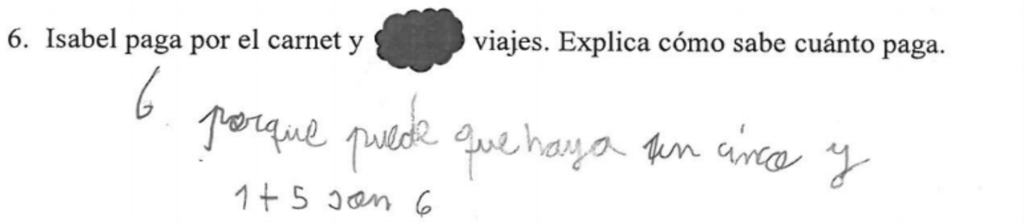
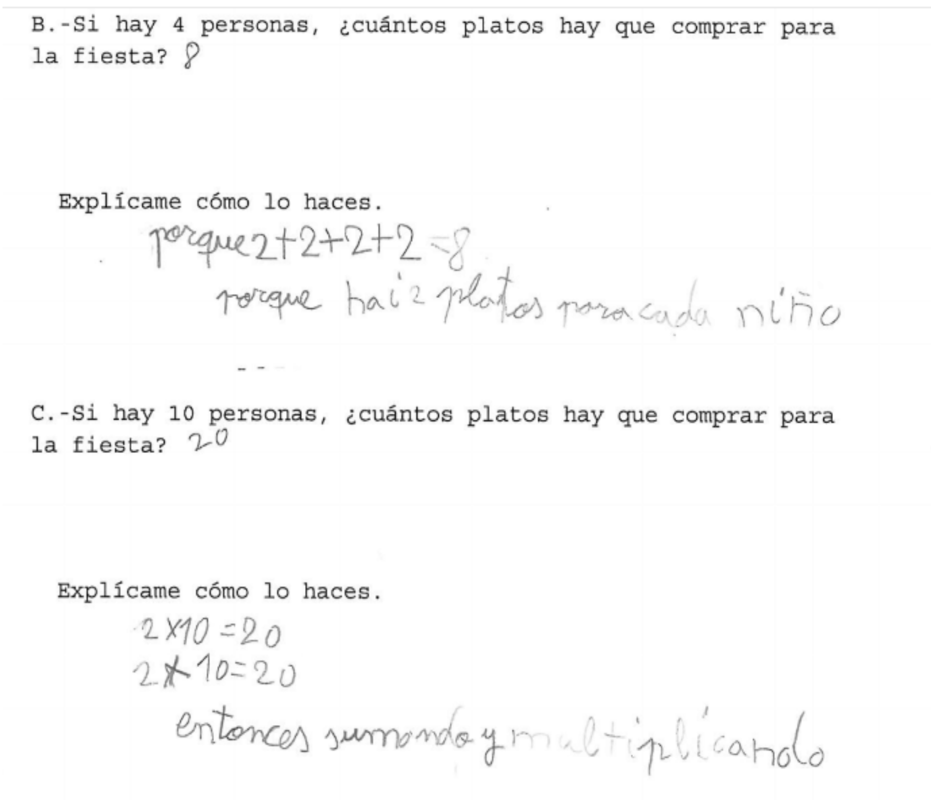


Figura 4. Respuesta de E2 a la pregunta sobre el caso general 2

E1 y E3 no evidenciaron la estructura al preguntarles por el caso general. Por ejemplo, E1 al preguntarle por el caso general 1 y 2 escribió 201.

En este caso, los tres estudiantes utilizaron las representaciones numéricas y la verbal de manera conjunta, en de la misma forma que puede verse en la figura 3.

En la sesión 3, E2 y E3 evidenciaron la misma estructura cuando trabajan con casos particulares $y = 2x$. E1 evidencia la estructura aditiva $y = x + x$. E2 es un caso destacable en esta sesión ya que a partir de los casos particulares cambia la estructura $y = 2x$. Podemos apreciarlo en la Figura 5.


B.-Si hay 4 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? 8

Explícame cómo lo haces.
porque 2+2+2+2 = 8
porque hai 2 platos para cada niño

C.-Si hay 10 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? 20

Explícame cómo lo haces.
2x10 = 20
2x10 = 20
entonces sumando y multiplicando

Figura 5. Respuesta de E2 a los casos particulares

En el caso general, E1 evidenció estructura $y = x$, escribe que necesitarán Ω platos. Expresa: "Ω significa que van a venir Ω extraterrestres". E2 no evidencia la estructura en el caso general y E3 no responde a esta pregunta. Las representaciones usadas por los alumnos en esta sesión han sido de tipo verbal y numérica.

En la sesión 4, los estudiantes evidenciaron la misma estructura cuando trabajan con casos particulares $y = 2x$. Ejemplo de ello lo vemos con el estudiante E3 en la Figura 6.

De esta manera interpretamos que la estructura evidenciada por los estudiantes ha sido $y = 2x$. En el caso general, no observamos que los alumnos hayan identificado algún tipo de estructura al preguntarle por cuántas personas llevará el tren tras muchas paradas.

En cuanto a las representaciones tenemos que las usadas han sido en este caso y de nuevo las representaciones numérica y verbal. Por otro lado, a través de la representación tabular que utilizamos en la tarea, interpretamos que, aunque E1, E2 y E3 no sugieren títulos para los encabezados (el investigador que guía la sesión es quien les dice lo que tienen que escribir), reconocen lo que significa cada número de la tabla.

Numero de pasadas	Numero de personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
45	90
90	180
1.000	12.000
muchas pasadas	

Figura 6. Casos particulares por el estudiante E3

A modo de resumen podemos decir, que el análisis de los datos de las cuatro sesiones arroja que en la sesión 1 y 4, todos los estudiantes identificaron correctamente la estructura empleada en cada uno de los contextos, en preguntas sobre casos particulares. Las relaciones implicadas en estos contextos han sido: $y = x + 3$, $y = 2x$. En las sesiones 2 y 3 ($y = 1 + 2x$, $y = 2x$), los estudiantes E2 y E3 han identificado correctamente la estructura de la función en los casos particulares. Solo el estudiante E1 ha identificado la estructura correcta en la sesión 2 para los casos particulares donde involucramos la función $y = 1 + 2x$.

En los casos generales la situación es diferente. Tan solo generaliza la relación funcional correctamente el estudiante E2 en la sesión 1. En las demás sesiones los estudiantes de este estudio, en su mayoría, no generalizan ninguna estructura que podamos interpretar salvo en las sesiones 2 y 3 donde E2 y E1 evidencian una estructura que no se corresponde con la relación funcional implicada. En otras sesiones no contestan a las preguntas planteadas para el caso general.

CONCLUSIONES

Hemos observado evidencias de pensamiento funcional en estos estudiantes de segundo curso de Educación Primaria cuando atendemos a la forma de expresar las regularidades que encuentran (estructuras) en las situaciones vistas y a la forma de representar las generalizaciones que evidencian.

La estabilidad de la estructura es fundamental en el proceso de generalización. La cantidad de estructuras correctas identificadas por los estudiantes (sobre todo en los casos generales) ha sido menor que las encontradas en el estudio previo de Cañadas et al. (2008). En esta ocasión el análisis de los datos ha provenido únicamente de las respuestas escritas de los estudiantes a los cuestionarios aplicados en cada una de las sesiones. Lo que quiere decir que no ha habido oportunidad de profundizar más en las respuestas de los estudiantes mediante el uso de entrevistas.

Encontramos unos resultados que difieren de los del trabajo de Pinto (2019) cuando atendemos a la variedad de estructuras evidenciadas. Nosotros encontramos mayor coherencia en las respuestas dadas debido a que se dan pocas estructuras diferentes para una misma regularidad. La dificultad para tratar con unas funciones y otras parece evidente. La función aditiva $y = x + 3$ no presenta problema en su identificación en los casos particulares. Tampoco presenta mayor problemática la función $y = 2x$, función multiplicativa. Sin embargo, la función $y = 1 + 2x$, aditiva y multiplicativa ha presentado una mayor dificultad en su identificación en los casos particulares dados. Encontramos que los estudiantes han tendido a evidenciar la estructura $y = 1 + x$ en la mayor parte de los casos estudiados en la sesión 2 (parque de atracciones 2).

En cuanto a las sesiones que comparten la misma función (sesión 3 y 4) encontramos que los estudiantes han evidenciado más dificultad al generalizar la estructura en la sesión 4, la correspondiente a las paradas de tren. En la sesión del cumpleaños es un estudiante el que expresa la generalización mediante una estructura que no es la correcta.

La comparación entre los resultados obtenidos entre las sesiones 1 y 2 durante los casos particulares y el caso general advierten de que la estructura aditiva con la multiplicativa de una misma función dificulta la tarea de generalización en estos estudiantes de segundo de primaria. Igualmente observamos que los contextos involucrados en las sesiones 3 y 4 que han sostenido la misma función arrojan diferencias. Para los casos particulares la evidencia de cantidad de estructuras correctas ha sido mayor en la sesión sobre las paradas de tren, pero esta cantidad ha sido menor en cuanto al caso general. Esto puede deberse a la diferencia de los contextos implicados o la forma de introducir la situación usando la representación tabular. Por tanto, esto constituye una línea de investigación centrada en comparar diferentes contextos y usos de diferentes representaciones para presentar las tareas usando las mismas funciones y viceversa, para valorar la medida en la que esto afecta a la identificación de la estructura implícita.

Tanto en la sesión 3 como en la sesión 4 ningún estudiante consigue generalizar. En la sesión 2 hubo dos formas de preguntar sobre la generalización para acercarse a ella. Ambas han obtenido los mismos resultados por parte de los estudiantes y usan un valor concreto sin una lógica determinada para referirse a las cantidades indeterminadas representadas por nosotros mediante “muchos viajes” o mediante un dibujo que representaba la cantidad de viajes. Sin embargo, en la sesión 3 sobre el cumpleaños ha sido un estudiante el que ha empleado el símbolo Ω en su respuesta sin recurrir a un valor concreto. Este uso puede darse por repetición, el estudiante lo ha visto escrito en el enunciado de la tarea.

En cuanto a las representaciones empleadas por los estudiantes en las cuatro sesiones han sido en todos los casos representaciones verbales y/o numéricas como apuntaban los trabajos de nuestros antecedentes (p.e., Cañadas y Fuentes, 2015; Merino et al., 2013; Ureña et al., 2019), en estas edades tempranas. El sistema de representación verbal apareció usualmente vinculado con la representación numérica. Al incluir la representación tabular en la última sesión hemos observando que los alumnos han sido capaces de relacionar la variable dependiente e independiente mediante ese medio.

Coincidimos en que una introducción temprana a una perspectiva funcional puede fomentar una visión profunda del concepto de función (Martínez y Brizuela, 2006). Dadas las representaciones habituales por los estudiantes en este estudio y las diferentes estructuras identificadas en una tarea de generalización, ponemos de manifiesto que los estudiantes de estas edades tienen la capacidad y herramientas necesarias para trabajar este tipo de tareas en el aula de primaria.

Una apuesta interesante es la de seguir trabajando en cómo los diferentes contextos y las distintas funciones implicadas afectan en la manera en la que los estudiantes se acercan a la generalización. Esta información nos ayudará a caracterizar el pensamiento funcional en los estudiantes en estas edades y nos brindará las herramientas con las que diseñar una instrucción eficaz en el sentido funcional de esta investigación.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Además, ha contado con el apoyo de una beca de referencia BES-2017-080124 otorgada por el gobierno de España.

Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). *International Journal of Science and Mathematics Education, 18,* 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5.

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5. NCTM.

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939.

Cai, J. (2005). US and Chinese teachers' constructing, knowing and evaluating representations to teach mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 135-169.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, *34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes delpensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. (2016). *Powerful ideas in elementary school mathematics*. En L. English y D. Kirshner (Eds.), Handbook of international research in Mathematics Education. Third edition (pp. 191-218). Routledge.

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, *40*(1), 3-22.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai (Ed.), Early algebraization. Advances in mathematics education (pp. 187-214). Springer.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119-135). Sense Publishers.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 103-131.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Patterns and formulas. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education* (pp. 89-100). Sense Publishers.

Hewitt, D. (2019). "Never carry out any arithmetic": the importance of structure in developing algebraic thinking. Paper presented at The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. V. Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Springer.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C.Kieran (Eds.), Research issues in the learning and teaching of algebra (Vol. 4, pp. 33-56). NCTM.

Kolloffel, B., Eysink, T. H. S., De Jong, T. y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatory from an interactive computer simulation. *Instructional Science, 37*(6), 503-517.

Martínez, M. y Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(4), 285-298.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer.

Merino, E., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, A. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). SEIEM.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [Royal Decree 126/2014 of February 28, which establishes the basic curriculum of Primary Education]. *BOE, 52*, 19349-19420.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544.

Mulligan, J., Prescott, A. y Mitchelmore, M. (2006). Integrating concepts and processes inearly mathematics: the australian pattern and structure mathematics awareness project(PASMAP). En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedingsof the 30th conference of the International Group for the Psychology of MathematicsEducation* (Vol. 4, pp. 209-216). PME.

NCTM. (2007). *Principios e normas para a matemática escolar.* A.P.M e I.I.E.

Papic, M., Mulligan, J., y Mitchelmore, M. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237.

Pincheira, N. G. y Alsina, À. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180.

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3º a 6º de Educación Primaria en un contexto funcional del álgebra escolar*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/handle/10481/71860.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1.

Rivera, F. (2017). Abduction and the emergence of necessary mathematical knowledge. En L. Magnani y T. Bertolotti (Eds.), *Springer handbook of model-based xcience*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30526-4_25.

Rivera, F.D. y Becker, J. (2003). The effects of figural and numerical cues on the induction processes of preservice elementary mathematics teachers. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (pp. 4-63 -70). University of Hawaii.

Stacey, K. (1989) Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies Mathematics, 20*, 147-164.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. y Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education. Third handbook of research in mathematics education.* (pp. 386–420). NCTM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia, 35(*2), 1-16. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16.

Torres, M. C., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9*, 1109. https://doi.org/10.3390/math9101109.

Ureña, J. (2021). *Representaciones de generalización y estrategias empleadas en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales. Una investigación con estudiantes de primaria y secundaria.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://digibug.ugr.es/handle/10481/66412?show=full.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Journal for the Study of Education and Development, 42*(3), 570-614, https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84.

María Dolores Torres
Universidad de Granada, España
mgtorres@ugr.es

María C. Cañadas
Universidad de Granada, España
mconsu@ugr.es

Antonio Moreno
Universidad de Granada, España
amverdejo@ugr.es

Recibido: Enero de 2022. Aceptado: Abril de 2022
doi: 10.30827/pna.v16i3.23637

ISSN: 1887-3987