

EL INICIO DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO EN EDUCACIÓN INFANTIL

Carmen Batanero, Rocío Álvarez-Arroyo, Luis A. Hernández-Solís y María M. Gea

Se presenta una síntesis de la investigación sobre el razonamiento probabilístico de los niños hasta los 7 años. Tras una breve mención a los trabajos de Piaget e Inhelder y Fischbein, se revisan estos y otros estudios asociados. Analizamos los estudios sobre la comprensión del azar en los niños, su lenguaje probabilístico, la identificación y enumeración de posibilidades, estrategias de comparación de probabilidades y razonamiento combinatorio. El maestro y las familias pueden utilizar esta síntesis para apoyar la educación temprana del razonamiento probabilístico, que beneficiará al niño en su desarrollo, posterior comprensión de la probabilidad y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Términos clave: Educación infantil; Probabilidad; Razonamiento probabilístico

The Beginning of Probabilistic Reasoning in Early Childhood Education

We present a synthesis of the research on up to 7 year-old children's probabilistic reasoning. After a short allusion to Piaget and Inhelder and Fischbein research, these and other investigations are reviewed. We analyse the children's understanding of chance, probabilistic language, identification and enumeration of possibilities, probability comparison strategies, and combinatorial reasoning. Teachers and families can use this synthesis in the early education of probabilistic reasoning, which will benefit the child in his or her development, later understanding of probability and decision making under uncertainty.

Keywords: Early Childhood Education; Probabilistic Reasoning; Probability

Aunque la probabilidad había estado ausente en el currículo español de la educación infantil y primer ciclo de la educación primaria, encontramos actualmente propuestas que sugieren iniciar lo antes posible al niño en el lenguaje probabilístico y las experiencias con juegos y experimentos aleatorios sencillos (Alsina, 2012; Alsina y Vásquez, 2016; Beltrán-Pellicer, 2017).

También algunas orientaciones curriculares sugieren adelantar en lo posible las experiencias de los niños con el azar. Así, los estándares del NCTM (2000) propusieron iniciar la discusión sobre sucesos probables e improbables relacionados con experiencias y juegos del niño en la etapa Pre-K-2 (3-7 años), iniciando ideas sobre probabilidad en los cursos 1º a 3º (6-8 años), según los siguientes contenidos:

- ◆ Describir sucesos probables o improbables y discutir su verosimilitud, utilizando palabras como seguro, imposible o igual probabilidad.
- ◆ Evaluar la mayor o menor posibilidad de resultados en experimentos sencillos y comprobar las predicciones.
- ◆ Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso se puede representar como un número entre 0 y 1.

Sugerencias similares se encuentran en el currículo australiano para niños de 6 y 7 años (ACARA, 2014), que recomienda pedir al niño identificar resultados de situaciones de azar cotidianas y emparejarlas con frases como no sucederá, podría ocurrir y sucederá. En España, aunque en el currículo de educación infantil (MEC, 2007) no aparece específicamente la probabilidad, encontramos contenidos que se pueden desarrollar en contexto de juegos de azar: cuantificación y comparación no numérica de colecciones, utilización de la serie numérica para contar, observación y toma de conciencia del valor funcional de los números y de su utilidad en la vida cotidiana. Hay una breve mención a la probabilidad en el currículo de la Comunidad Autónoma de Andalucía, que plantea la importancia de que el niño anticipe, organice y planifique sus acciones ante actividades en las que el maestro le ayude a verbalizar, “siempre en términos y expresiones cercanas y comprensibles para los pequeños, si una situación es probable o improbable” (Consejería de Educación, 2008, p. 33). Todo ello nos lleva a la pregunta de si un niño puede comprender e intuir algunas ideas de probabilidad en sus primeros años.

El objetivo de este trabajo es realizar una síntesis de la investigación que analiza el razonamiento de los niños hasta los 7 años cuando se enfrentan a juegos y problemas básicos de probabilidad. Nos basamos en algunos trabajos previos, como los de Batanero (2013), Bryant y Nunes (2012), Hernández-Solís et al. (en prensa), Langrall y Mooney (2005) y Jones et al. (2007).

Las investigaciones más influyentes sobre razonamiento probabilístico de niños de diferentes edades fueron desarrolladas por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), cuyos resultados despertaron gran interés tanto en psicólogos como en educadores. Estos trabajos fueron seguidos por estudios posteriores sobre

diferenciación de azar y determinismo por los niños, distribución de resultados en experimentos repetidos, adquisición del lenguaje probabilístico, estimación y comparación de probabilidad y enumeración de casos posibles. Se resumen a continuación los centrados en los niños pequeños y en las ideas elementales de probabilidad que podrían trabajarse en la educación infantil y cursos iniciales de la educación primaria. Finalizamos con algunas recomendaciones para la enseñanza de la probabilidad a niños en edades tempranas.

EMERGENCIA DE IDEAS DE PROBABILIDAD EN NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMER CICLO DE PRIMARIA

Aunque el azar rodea al niño desde que nace, quizá resulte una noción más compleja que otras ideas matemáticas, pues los fenómenos aleatorios no pueden ser manipulados por el niño como sí pueden serlo, por ejemplo, las situaciones que involucran conceptos aritméticos. Por ejemplo, si se lanza cuatro veces un dado y se obtiene los valores 1, 3, 3, 6, al repetir el experimento no es usual que se mantenga esta secuencia de resultados. El niño no puede obtener al lanzar un dado un número; aunque puede experimentar que si a 2 caramelos le agrega 1 se obtendrá 3 y el mismo resultado obtiene sumando manzanas o cualquier otro objeto. Además, la operación es reversible, pues si a los 3 objetos le quita 1 siempre obtiene 2 objetos.

Como la reversibilidad no se da en los experimentos aleatorios, Piaget e Inhelder (1951) justificaron que las nociones de probabilidad se desarrollan más tarde en los niños que las aritméticas o geométricas. Piaget e Inhelder (1951) suponen que hasta la etapa de operaciones formales (12-15 años) el niño no logra comprender la probabilidad, porque asumen una concepción clásica de la misma (proporción entre casos favorables y posibles) y ello implica la necesidad de un razonamiento proporcional y combinatorio que no se logra completamente hasta el período de las operaciones formales.

Fischbein (1975), sin embargo sugiere que estos autores no tomaron en cuenta las ideas intuitivas ni el efecto de la instrucción en los niños. Para Fischbein, las intuiciones son una parte importante de la conducta inteligente del individuo, que tienen certeza intrínseca y auto-evidencia, son resistentes al cambio y a veces son inconscientes. El autor diferencia entre intuiciones primarias, que se adquieren directamente con la experiencia, e intuiciones secundarias, que se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela. Defiende la existencia de intuiciones sobre el azar y la probabilidad en niños muy pequeños, que deben ser educadas pues, de lo contrario, pueden convertirse en intuiciones incorrectas y difíciles de cambiar.

Distinción entre azar y determinismo

Para poder trabajar ideas de probabilidad con los niños es necesario, en primer lugar, asegurar que perciben el azar o aleatoriedad y la diferencia entre sucesos aleatorios y deterministas. Metz (1998a) indica que no sólo la idea de probabilidad interviene en la toma de decisión bajo incertidumbre, sino que también lo hace la aleatoriedad, pues sin su comprensión, las interpretaciones de la variabilidad y los patrones en fenómenos a nuestro alrededor nos llevarían con frecuencia a atribuciones causales espurias. Los niños están rodeados de aleatoriedad en su vida (meteorología, enfermedades, etc.) y sus juegos (sorteos, juegos con dados, ruletas, etc.), pero ¿cuándo llegan a comprender intuitivamente la idea de azar?

Piaget e Inhelder (1951) concibieron la comprensión del azar como complementaria a la relación de causa-efecto y a su vez dependiente de la capacidad combinatoria; por ello, concluyeron que esta no se alcanza hasta la adolescencia, pues para comprender el azar es necesario tomar consciencia de la existencia de distintas posibilidades y ser capaz de enumerarlas para asimilar la impredecibilidad de cada caso aislado. Fischbein (1975) rechaza esta conclusión e indica que la idea de azar está presente antes de los 7 años, ya que los niños de educación infantil diferencian azar y determinismo en juegos o experimentos con dos sucesos equiprobables, aunque no se trate de una comprensión profunda, sino de una intuición, y fallan cuando la situación a evaluar requiere razonamiento combinatorio.

Una característica de los fenómenos aleatorios es la impredecibilidad del resultado de un experimento aislado (aunque se puede predecir la distribución de resultados en una serie grande de experimentos independientes). En contraste con los supuestos de Piaget e Inhelder (1951), para quien la comprensión de la indeterminación e impredecibilidad emerge hacia los 7 años, Fischbein (1975) y otros investigadores muestran que existen unas primeras ideas sobre estos conceptos en edades más tempranas.

Así, para analizar si los niños diferencian los resultados aleatorios y deterministas, Kuzmak y Gelman (1986) proponen dos experimentos a niños de 3 a 8 años con dos dispositivos (figura 1). Un dispositivo es semejante a un bombo de lotería donde mezclan 10 bolas rojas, 10 azules y 10 amarillas, que gira hasta que cae una bola por el orificio. Como el niño no puede saber qué bola caerá, es una situación aleatoria. El segundo dispositivo es un tubo de plástico transparente relleno de bolas (7 rojas, 7 azules y 7 amarillas) ordenadas al azar y que van saliendo por un orificio. Como el niño puede ver el orden de las canicas en el tubo y, por tanto, el color de la siguiente bola que va a ser extraída es un dispositivo determinista. En un primer experimento los investigadores extraen bolas sucesivamente de los dispositivos, preguntando previamente a los niños si pueden predecir el resultado de la siguiente extracción y que expliquen su respuesta. En el segundo experimento se utilizan los mismos dispositivos, pero sin llevar a cabo la extracción de canicas.

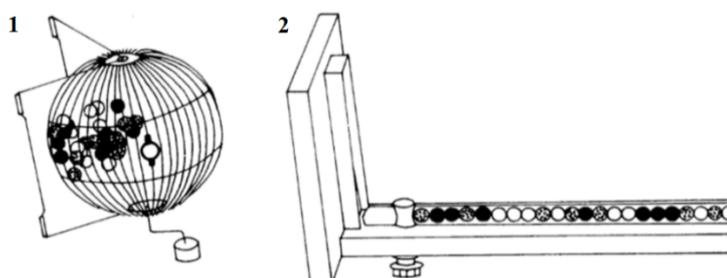


Figura 1. Dispositivos experimentales de Kuzmak y Gelman (1986, p. 561)

En el primer experimento (48 niños, 12 en cada intervalo de edad: 3 a 4, 4 a 5, 5 a 6 y 7 a 8), los niños desde los 4 años responden correctamente, diferenciando el dispositivo determinista y el aleatorio, y a partir de los 5 años explican por qué no se puede predecir en el dispositivo 1 el color de la bola, utilizando frases poco formales como “hay una mezcla de bolas” o “las bolas se mueven y no se puede ver el color que caerá”. En el segundo experimento (24 niños diferentes a los del experimento 1) 7 de los 12 niños de 5 años y 10 de los 12 de 7 años diferencian el dispositivo aleatorio del determinista y muchos dan explicaciones adecuadas de la imposibilidad de predecir el resultado del aleatorio. Puesto que en este segundo experimento los niños no tienen experiencia de los resultados, los autores concluyen que se basan en las características físicas de los dispositivos utilizados para razonar sus respuestas.

Fay y Klahr (1996) describen otros experimentos donde preguntan a los niños de qué colección de objetos se extrae uno dado, mostrando dos colecciones: una determinista, formada únicamente por objetos de un tipo, y otra aleatoria formada por dos tipos de objetos. Sus resultados indican que niños de 4 y 5 años pueden identificar correctamente la selección de cada colección como determinista o aleatoria en la mayor parte de las pruebas que se les hacen. También indican que es más sencillo para los niños identificar las situaciones deterministas que las aleatorias, lo que también ocurre (en situaciones más complejas) en los adultos.

En resumen, hacia los 3-4 años los niños comienzan a diferenciar situaciones deterministas y aleatorias simples y hacia los 5 años desarrollan explicaciones sobre la imposibilidad de predecir los resultados de las segundas, mostrando cierta comprensión intuitiva de la incertidumbre de los fenómenos aleatorios y la imprevisibilidad de sus resultados.

Distribución de resultados en experimentos aleatorios repetidos

Para analizar la comprensión del azar en los niños, Piaget e Inhelder (1951) idearon un experimento utilizando una bandeja con compartimentos en cada uno de sus extremos. En uno de estos extremos sitúan bolas de dos colores (por ejemplo, 4 azules y 4 amarillas) de modo que las del mismo color están contiguas (figura 2). Al mover la bandeja para que las bolas vayan hacia el otro extremo se produce una mezcla de colores y si se repite varias veces el movimiento, la disposición de bolas en los compartimentos, según color, es impredecible. Antes de mover la bandeja,

los investigadores piden a los niños predecir la colocación de las bolas después del movimiento.

Los niños del periodo pre-operacional piensan que las bolas volverán a su posición inicial después de varios movimientos, o que todas las bolas azules se colocarán en la posición inicial de las bolas amarillas y viceversa, respuesta que es interpretada por Piaget e Inhelder como falta de comprensión del azar. Hacia los 7 años se comienza a aceptar que algunas bolas se mezclarán con las del color contrario, por lo que los investigadores concluyen que antes de esta edad sólo se comprende una causalidad determinista.



Figura 2. Experimento de la bandeja

En otro experimento, preguntaban a los niños cómo pensaban que caerían los primeros copos de nieve sobre el embaldosado de una terraza. Para ello dieron a los niños piedrecitas y un tablero cuadrulado (a modo de copos y embaldosado, respectivamente), pidiendo que representaran con ellos la forma en la que pensaban que caerían esos copos sobre las baldosas al empezar a nevar. Los niños pequeños colocaban exactamente una piedrecita en el centro de cada cuadrado (figura 3a), lo que Piaget e Inhelder (1951) interpretan como ausencia completa de la percepción del azar. Hacia los 7 años los niños comienzan a admitir cierta irregularidad en la distribución, pues siguen colocando una piedra en cada cuadrado, pero no siempre en el centro (figura 3b). Según los autores, sólo en la etapa de operaciones formales se comprenderá que pueden quedar cuadros vacíos, mientras que en otros caen dos o tres copos de nieve.

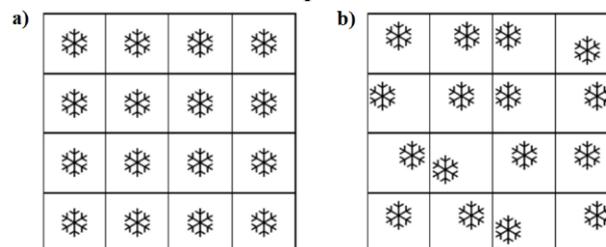


Figura 3. Experimento del embaldosado

Con estos experimentos Piaget e Inhelder concluyen que hacia los 7 años se adquiere cierta capacidad de diferenciar azar y determinismo, aunque de forma incompleta, pues el niño está muy ligado todavía a lo concreto. Pero en realidad, sus ensayos estudian la distribución de un conjunto de resultados en un experimento aleatorio repetido, que es una situación mucho más compleja. En realidad, sus experiencias indican que en torno a los 7 años se comienza a percibir

la irregularidad local de dichos resultados, pero no se llega todavía a percibir la distribución global de los mismos. Conclusiones similares fueron obtenidas por Nikiforidou y Pange (2010) en un experimento en que presentaron a 200 niños de 4 a 6 años una tarea en la que tenían que situar al azar un pequeño número de marcas en una cuadrícula de 5x5, notando una preferencia por una colocación ordenada (y no aleatoria) de las marcas en la mayoría de los niños.

Una aproximación diferente es la de Papparistodemou et al. (2008), quienes experimentan con 23 niños de entre 5,5 y 8 años, con un videojuego diseñado por los autores (figura 4). En el juego aparece un niño espacial situado sobre una línea amarilla, quien sube o baja verticalmente en función del resultado de la “máquina de lotería”. En esta máquina, una bolita blanca se va moviendo continuamente en direcciones aleatorias y cada vez que colisiona con una bola roja/azul se suma 1 punto en la casilla correspondiente, de modo que los niños pueden observar cada resultado aislado y la suma de resultados (posición final del niño espacial).

La tarea consiste en que el niño coloque bolas rojas y azules (en número, tamaño y posición espacial que quiera) dentro de la máquina de lotería para que ésta sea justa, es decir, que no dé ventaja ni al color rojo ni al azul para conseguir que el niño espacial se quede lo más cerca posible de la posición inicial después de una serie de movimientos. Los autores concluyen que incluso los niños de 5 años comprenden la idea de equitatividad (que un color no obtenga más puntos que el otro).

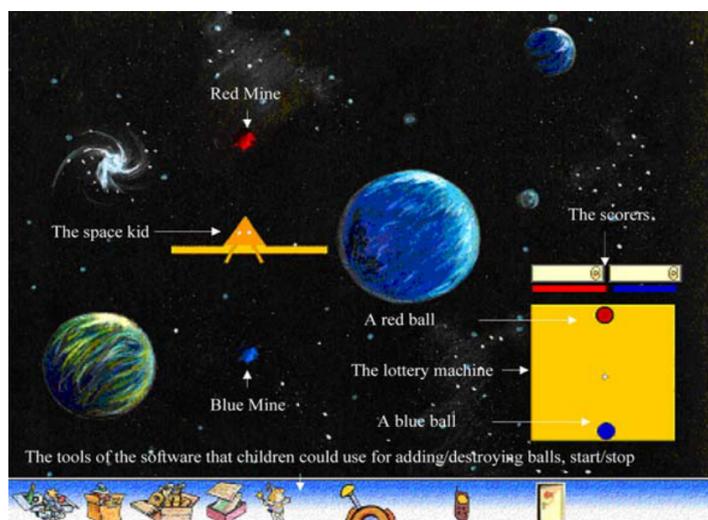


Figura 4. Videojuego utilizado por Papparistodemou et al. (2008, p. 8)

Los niños actúan de dos formas bastante diferentes para conseguir la equitatividad en el juego:

- ◆ Para generar un juego justo, configuran las bolas en la máquina de manera simétrica para asegurar que la bolita blanca alterne colisiones entre bolas rojas y azules. Para ello, construyen la máquina con el mismo número de bolas de cada color y equidistantes de la bolita central (22 de los 23 niños).

- ◆ Asegurando la imparcialidad del juego, mezclan todo lo posible los colores de las bolas en la máquina para hacer que las colisiones en el juego no se puedan controlar ni estén sesgadas (11 de los 23 niños).

En resumen, aunque las primeras investigaciones indicaron que hasta los 7 años no se adquiere la capacidad de imaginar la distribución de un conjunto de resultados aleatorios, el trabajo de Paparistodemou et al. (2008) muestra una cierta intuición de esta distribución y la idea de equitatividad desde los 5 años.

Adquisición del lenguaje probabilístico

El lenguaje probabilístico está unido al desarrollo conceptual, lo que ha llevado a diferentes autores a interesarse por el significado que los niños asignan a las palabras que utilizamos para referirnos al azar o graduar las probabilidades. Así, Vásquez y Alsina (2017) organizan un proceso instruccional de inicio a la probabilidad con 20 niños de 7 y 8 años a cargo de un profesor con experiencia docente y formación en el tema. Los autores analizan los términos y expresiones orales y escritas de los niños a lo largo de la sesión. Sus resultados muestran escasa comprensión del vocabulario asociado al azar y la probabilidad, pues los niños utilizan con frecuencia vocabulario impreciso o incorrecto. Uno de los conceptos que presenta mayor dificultad es el de imposible, que los niños utilizan para referirse a sucesos o situaciones con escasas posibilidades de ocurrir y si llegan a ocurrir, lo atribuyen a la buena o mala suerte. Igualmente, el término seguro se asocia a veces a sucesos de alta probabilidad. No obstante, al preguntar por la posibilidad de extraer un pañuelo de un color determinado de un bolso con pañuelos de varios colores, HodnikČadež y Škrbec (2011) encuentran que el 53% de una muestra de niños eslovenos de 4 y 5 años y entre el 70 y 80 % de otro número similar de niños de 6 a 8 años dieron una interpretación correcta a estos términos, aunque el término imposible fue el más difícil, pues solo un 10% de los niños de educación infantil lo interpreta correctamente.

Respecto al lenguaje numérico y simbólico, mediante un proceso gradual de trabajo con varias situaciones, Vásquez y Alsina (2019) observan un primer acercamiento a la cuantificación de los grados de posibilidad, que busca aceptar que un suceso imposible tendrá una probabilidad de ocurrencia de 0% y otro seguro tendrá probabilidad de ocurrencia de 100%.

Una experiencia relacionada es la de Kazak y Leavy (2018), en la que proporcionan a 16 niños de 7-8 años una escala de probabilidad cualitativa (figura 5) para medir su creencia en la verosimilitud de ciertos sucesos. Se proporciona a los niños por parejas bolsas con gominolas verdes y rosas en diferente proporción, preguntándoles cuál sería la posibilidad de obtener una gominola verde, y también si es seguro o imposible obtener un color dado. Se les pide marcar en la escala (figura 5) lo que esperan que ocurra, situando lo seguro en el extremo derecho y lo imposible en el izquierdo, siendo el centro el caso de equiprobabilidad. También

simular con material manipulativo y el software Tinkerplot la extracción de las gominolas.

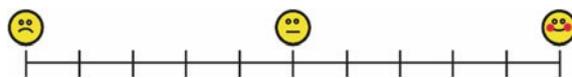


Figura 5. Escala cualitativa de probabilidad (Kazak y Leavy, 2018, p. 42)

Los niños utilizaron palabras relacionadas con el azar, como suerte, o podría ocurrir. Para comparar la posibilidad de extraer una gominola verde de bolsas con diferente proporción de verdes y rojas, los niños usaron frases como “un poco más de suerte” para describir la mayor posibilidad de obtener este color. Los niños mostraron cierta comprensión de la idea de seguro e imposible; por ejemplo, en una bolsa con 2 gominolas verdes y 8 rojas indicaron que no es imposible obtener la gominola verde porque había 2 verdes en la bolsa. Fue también evidente su comprensión de la idea de igual probabilidad, aunque tuvieron dificultad para expresarla con palabras, pero sí supieron hacerlo en la escala de probabilidad.

En resumen, hacia los 4-5 años los niños comienzan a expresar verbalmente sus intuiciones y hacia los 7-8 años cualitativamente su predicción sobre la posibilidad de ocurrencia de un suceso y utilizar términos para graduar esta posibilidad, aunque tienen dificultad con la idea de imposible y seguro, que va desapareciendo con la edad (Shtulman y Carey, 2007).

Comparación y estimación de probabilidades

Una vez que el niño diferencia los sucesos aleatorios y expresa su probabilidad de manera verbal y cualitativamente, surge la pregunta de si es capaz de estimar la probabilidad de un suceso o al menos decidir cuál es más probable entre dos sucesos.

Piaget e Inhelder (1951) consideraron que el niño de educación infantil es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, puesto que no ha adquirido razonamiento proporcional. Sin embargo, Fischbein (1975) indica que el niño de esta edad puede hacer juicios probabilísticos en tareas sencillas que no requieran el uso de fracciones y esta capacidad va mejorando con la edad.

Para analizar el razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades, Piaget e Inhelder (1951) utilizaron fichas de color blanco, algunas con una cruz en su reverso. Dividieron las fichas en dos grupos con composiciones distintas (a,b), donde “a” representaría el número de fichas con cruz en una de sus caras (casos favorables) y “b” el número de fichas sin cruz (casos desfavorables). La tarea propuesta a los niños era decidir en cuál de dos agrupaciones (cuya composición se mostraba inicialmente a los niños) sería más fácil obtener una cruz al tomar una de las fichas con los ojos cerrados.

Se propuso a los niños tareas de diferente dificultad teniendo en cuenta la composición (a₁,b₁) y (a₂,b₂) de los dos grupos de fichas. El período preoperacional se caracteriza porque sólo se opera con una de las variables en cada

agrupación a comparar. Piaget e Inhelder (1951) dividen este período en dos etapas. En la primera (hasta los 3 años y medio), los niños dan una respuesta aleatoria al problema, y a pesar de carecer de capacidad de comparación lógico-aritmética, pueden dar la respuesta correcta en composiciones donde al menos una de las agrupaciones presenta imposibilidad o certeza como $(0,b_1)$ y $(0,b_2)$; $(0,b_1)$ y $(a_2,0)$; $(0,b_1)$ y (a_2,b_2) ; o bien $(a_1,0)$ y $(a_2,0)$. Además, el niño sólo considera los casos favorables, sin tomar en cuenta el total de casos posibles.

En la segunda etapa (hasta los 6 años y medio) se resuelven situaciones de comparación de probabilidades que dependen de una sola variable (consideran sólo dos de los cuatro datos implicados), pero sus valoraciones siguen siendo intuitivas. De forma progresiva desarrollan la comprensión de que el número de casos favorables está asociado con la probabilidad. Algunas veces razonan a partir del término constante en las dos colecciones, por ejemplo $(2,3)$ y $(1,3)$, y no consideran el término variable.

El período de las operaciones concretas se caracteriza por el uso de los cuatro términos, en forma aditiva, sin tener en cuenta las proporciones. También se divide en dos etapas. En la primera (7 y 8 años), los conceptos de fracción y proporción aún no están presentes, pero el niño es capaz de comprender las primeras operaciones lógico-aritméticas y esto le ayuda a tener un mayor éxito en problemas de una variable. Logra realizar comparaciones aditivas, pero falla en los problemas que requieren comparar dos cocientes. En la segunda etapa, que comienza hacia los 10 años, el niño realiza comparaciones aditivas entre los casos favorables y desfavorables, y aunque estas estrategias no son válidas en problemas más complejos, resuelve problemas sencillos de proporcionalidad de forma empírica.

Estas conclusiones fueron analizadas por otros autores con niños pequeños. Así, Yost et al. (1962) se interesaron por la existencia de razonamiento probabilístico en los niños de educación infantil, cambiando ligeramente el método experimental de Piaget e Inhelder basado en respuestas verbales, que pueden ser difíciles a esta edad. Los autores dieron a los niños urnas transparentes con fichas de dos colores en diferente proporción, preguntando cuál de las dos urnas elige para jugar a un juego donde se gana al sacar con los ojos cerrados una ficha de un determinado color (figura 6).

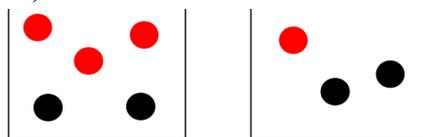


Figura 6. Comparación de probabilidades en urnas

El autor sugiere que la tarea planteada de esta manera (comparar dos urnas con dos colores en cada una) es más sencilla que la propuesta por Piaget e Inhelder (una sola urna y dos tipos de fichas) porque el niño no necesita verbalizar, sino sólo elegir una de las urnas. Utilizan composiciones simples y van aumentando progresivamente la dificultad. Como resultado de la investigación los autores

sugieren que, a partir de los 4 años, los niños tienen intuiciones sobre la probabilidad y pueden elegir la urna que da más probabilidad si la composición es sencilla, y esta intuición mejora con la edad. Goldberg (1966) repite la investigación anterior con 32 niños desde 3 años y 10 meses hasta 5 años y 1 mes e indica que el éxito en la tarea depende mucho de las condiciones. Hay una gran influencia del color favorito, que debe ser controlado en la tarea, y los niños tienen más dificultad cuando el número de casos favorables en las dos urnas es igual y el número de casos desfavorables es diferente que en el caso contrario. También muestran que se producen más errores cuando el número de bolas de cada color es más parecido o, lo que es lo mismo, tienen más éxito cuanto mayor es la diferencia entre el número de bolas de cada color.

Davies (1965) repite el estudio de Yost et al. (1962) con 112 niños de 3 a 9 años, confirmando que hay un progreso en el razonamiento con la edad. Utilizando situaciones en las que el niño recibía una recompensa por la extracción de una bola de determinado color, se observó la preferencia sistemática por las urnas en que la proporción del color pedido era mayor. Concluye que los niños tienen la capacidad de comparar probabilidades en casos sencillos, incluso antes de que el niño sea capaz de dar una explicación verbal a sus elecciones. Además, observa que el niño usa predominantemente la información percibida de forma directa para estimar las posibilidades de ocurrencia. Mientras los niños de 3 años responden correctamente sólo a la mitad de los experimentos no verbales (basta elegir una urna sin explicar por qué), a los 5 años resuelven el 81% de estos experimentos y el 31% también aquellos verbales en los que tienen que explicar su decisión. A los 7 años resuelven todos los experimentos no verbales y el 75% de los verbales.

Hoemann y Ross (1982) trabajan con niños de 4 a 10 años. Para ello utilizan ruletas con sectores de dos colores diferentes y distinta amplitud, preguntando a los niños qué ruleta da mayor posibilidad y cuál tiene más cantidad de un color dado. No encontraron diferencias en las respuestas a las dos preguntas y concluyen que no es necesario comparar proporciones para tener una intuición de la probabilidad. Los niños de 5 años tuvieron una alta tasa de éxito al responder las tareas, mientras que los de 4 años sólo se acercaron al 50%. Los investigadores concluyen que los niños de 4 años no comprenden la proporción, pero esto no les impide algunas intuiciones correctas sobre la probabilidad.

Por otro lado, Falk et al. (1980) realizan una investigación con niños de 4 a 11 años a los que piden comparar probabilidades en contextos de bolas en urnas, ruletas y peonzas, siempre con dos únicos colores en las bolas, sectores de las ruletas y lados de las peonzas. Además, dividen los problemas en tres tipos, según las razones de casos favorables y posibles implicadas, en la forma siguiente: a) la proporción de casos favorables respecto a los posibles es mayor que $1/2$ en un dispositivo y menor en el otro; b) una proporción es igual a $1/2$ y la otra diferente; c) las dos proporciones son o mayores o menores que $1/2$. Sus resultados muestran que a partir de los 6 años los niños manifiestan un razonamiento de tipo probabilístico, eligiendo sistemáticamente el dispositivo con mayor probabilidad.

El error más frecuente en los niños más pequeños es elegir el conjunto con mayor número de casos favorables. Los autores concluyen que la capacidad de calcular proporciones, por sí sola, no implica necesariamente la comprensión de la probabilidad, sino que el niño debe aceptar que en la situación planteada tiene influencia el azar para luego aplicar los cálculos de proporciones; es decir, el azar y la proporción son dos nociones necesarias para comprender el significado de probabilidad.

Falk et al. (2012) tratan de comprobar los resultados anteriores con tres experimentos. En el tercero, con 160 niños de 4 a 11 años, utilizan los problemas de comparación de probabilidades en urnas, analizando las estrategias de los niños. Clasifican las estrategias en una dimensión (si sólo comparan un tipo de elementos en cada urna) o dos dimensiones (si comparan los dos tipos de elementos). De los niños de 4 y 5 años, el 78% usan estrategias de una dimensión, eligiendo la urna con más casos favorables (59%) o menos desfavorables (19%), y el resto estrategias de dos dimensiones. Hacia los 7 años hay un cambio, ya que los niños comienzan a usar más frecuentemente estrategias de dos dimensiones, pero a veces combinan los elementos en forma aditiva. Se detectan diferentes estrategias en niños de la misma edad e incluso en el mismo niño. La explicación de los niños indica el uso de un sistema perceptivo e intuitivo, pues se deciden por el color dominante sin que a veces cuenten los casos favorables.

Nikiforidou (2019) realiza una investigación con 480 niños de entre 4 y 6 años para analizar el efecto del tipo de material utilizado (manipulativo o virtual) y la repetición de la tarea sobre la comparación de probabilidades. Se dieron a los niños tarjetas con dibujos de animales (ratones, tortugas y patos) y se les pidió contarlos y describirlos. Los autores presentaron tres tareas diferentes, variando el número total de animales en las tarjetas (4 o 6) y la relación entre el número de animales de cada tipo (3:1, 5:1 y 4:1:1). En cada tarea, después de poner varias tarjetas boca abajo y mezclarlas, se les pidió sacar una, prediciendo con anterioridad qué animal sería más probable. Más del 70% de los niños respondieron correctamente, siendo más sencillas las tareas con solo dos tipos de animales (espacio muestral más simple). Sus resultados fueron mejores al trabajar con material manipulativo, aunque la repetición de la tarea no mejoró sustancialmente los resultados. Nikiforidou et al. (2013) obtienen la misma conclusión en un trabajo de 90 niños de la idéntica edad, utilizando un contexto de ruletas.

Otras investigaciones apoyan ideas sobre probabilidad en niños aún más pequeños. Así, Denison y Xu (2014) realizan cuatro experimentos con piruletas de dos colores diferentes (por ejemplo, rosa y negro), cada uno con 24 bebés entre 10 y 13 meses. Para realizar sus experimentos, en primer lugar, los investigadores hacen ensayos para confirmar el color preferido por el bebé. Seguidamente, utilizan dos botes transparentes y hacen variar el número de piruletas de los dos colores. Así, en el experimento 1 meten el mismo número de piruletas del color preferido, variando el número de piruletas del otro color (por ejemplo, meten 12 piruletas rosas en cada bote, pero en el primero con 4 negras y en el segundo con

36, de modo que la proporción rosas/negras es 3/1 en el primer bote y 1/3 en el segundo). Luego un investigador saca una piruleta de cada bote y la coloca en una taza, de tal manera que solo se ve el palo (no el color), y pide al bebé que elija una de las dos tazas. El 75% de los niños participantes buscan en la caja correspondiente a la taza con mayor proporción de piruletas de su color preferido. Los investigadores interpretan esta conducta como un indicio de razonamiento probabilístico y proporcional de estos bebés, que no se guían sólo por el número de piruletas del color preferido, sino por la proporción entre el total de piruletas. Los autores concluyen que la sensibilidad a la probabilidad y la capacidad de realizar inferencias probabilísticas están en el repertorio de los niños preverbales.

Sin embargo, Girotto et al. (2016), ponen en duda que los descubrimientos de Denison y Xu (2014) indiquen que a partir de los 10-13 meses se puedan realizar decisiones correctas en tareas probabilísticas simples. Para poner a prueba su hipótesis realizan diferentes experimentos con niños de 3 a 5 años. En el primero, presentan a los niños conjuntos de fichas de dos colores (por ejemplo, roja y negra), variando la composición de los conjuntos. Se extraía una ficha de cada conjunto y se ponía en una taza opaca un poco separada de los niños, que no podían ver el contenido, y se pedía a los niños elegir una taza que hiciese más probable obtener la ficha de color rojo. Los autores encuentran que los niños de 3 y 4 años fallan en estas tareas, aunque entendieron la lógica del experimento ya que en los casos en que uno de los conjuntos de fichas corresponde al suceso seguro (todas las fichas rojas) y el otro el suceso imposible (todas las fichas negras), todos los niños eligieron la taza con la ficha roja (correcta); sin embargo, cuando la composición de los conjuntos contiene casos favorables y desfavorables, sólo los niños de 5 años toman decisiones correctas. Los niños menores prefieren el conjunto con más casos favorables, aunque con menor probabilidad.

Para explicar la diferencia con el estudio de Denison y Xu (2014), los autores indican que el fallo puede no deberse a la falta de capacidad de percibir el azar, sino por no lograr concebir la naturaleza aleatoria de los resultados sobre los que tienen que hacer una elección. Los niños pudieron creer que estos resultados fueron debidos a la acción del experimentador. Aunque los bebés estaban en la misma condición que los niños del estudio, se piensa que los bebés pueden no percibir intenciones de engañar en las acciones de los demás. Por otro lado, en tareas de comparación de probabilidades en urnas con composición proporcional, pero pocos casos favorables y posibles, HodnikČadež y Škrbec (2011) obtienen éxito en el 49,9% de los niños de 4-5 años, cifra que crece hasta alcanzar el 73,2% en niños de 7-8 años.

Kafoussi (2004) realiza un proceso de enseñanza con 15 niños de 5 años en contexto lúdico, utilizando material manipulativo, así como historias y marionetas. Presentada cada tarea, los niños hacen predicciones, se comprueban a través de la experimentación y se compara con las predicciones, discutiendo las posibles diferencias con los niños. Se centra tanto en la probabilidad de un suceso simple como en la comparación de probabilidades e incluso en la probabilidad

condicional. Por ejemplo, para la probabilidad simple pide predecir el color más fácil de salir en una caja con bolas de colores o en una ruleta con áreas de varios colores; para comparar probabilidades emplea dos urnas con fichas de colores; y respecto a la probabilidad condicional, la autora pide a los niños adivinar qué color de globo saldrá de una caja donde ha metido 2 amarillos, 2 azules y 2 verdes, una vez que han sacado previamente uno de los globos y visto su color.

Antes del experimento de enseñanza las entrevistas muestran que muchos niños predicen sistemáticamente el color que más les gusta, sin tener en cuenta la experiencia y en todos los casos es difícil para los que dan una respuesta correcta explicar sus razones. A veces están influenciados por aspectos subjetivos, como la posición de las fichas en las urnas. También les resultan más sencillos los contextos con trompos o ruletas que con urnas y fichas. Al finalizar el experimento, 13 niños dan argumentos cuantitativos para justificar sus respuestas en probabilidad simple y comparación de probabilidades, y todos dan una respuesta correcta en la tarea de probabilidad condicionada. Es decir, aceptan que un suceso está influenciando por los resultados de un experimento previo en un muestreo sin reemplazamiento. Sus resultados indican que los niños de 5 años pueden progresar considerablemente en su razonamiento probabilístico cuando se les involucra en tareas probabilísticas simples, superando sus interpretaciones subjetivas y desarrollando un pensamiento cuantitativo incipiente.

De este conjunto de referencias se deduce que incluso bebés podrían aceptar la naturaleza aleatoria de algunos experimentos o juegos y elegir entre dos situaciones la que tiene más casos favorables o, si es evidente, la mayor proporción de casos favorables. A partir de los 3 años comienzan a comparar probabilidades, pero prefieren sistemáticamente el conjunto con más casos favorables. Sus estrategias van mejorando con la edad, y hacia los 6-7 años son capaces de usar los casos favorables y desfavorables cuando las proporciones a comparar son sencillas.

Enumeración de posibilidades y razonamiento combinatorio

Una de las competencias requeridas para comprender la probabilidad es ser capaz de imaginar todas las posibilidades en un experimento, relacionada con el razonamiento combinatorio. Piaget e Inhelder (1951) indican que los niños de educación infantil solo pueden enumerar algunas combinaciones o variaciones usando ensayo y error y repitiendo elementos en casos muy sencillos. Para ello proponen a los niños formar todos los pares diferentes a partir de fichas de dos o más colores (variaciones), formar todas las mezclas posibles de líquidos de dos o más colores (combinaciones) y ordenar de todos los modos posibles conjuntos pequeños de elementos (permutaciones). Fishbein (1975) defiende que es posible enseñar técnicas de enumeración al niño con ayuda de la instrucción y el recurso del diagrama en árbol, aunque en sus experimentos los niños tienen 8-10 años de edad.

English (1991) realiza un estudio con 50 niños de 4,5 a 9,8 años, después de familiarizarlos con material manipulativo. Se pide formar todas las posibles combinaciones de pares de prendas de muñecas (por ejemplo, pantalones y camisetas) según color de las prendas, comenzando con dos colores diferentes para cada prenda y subiendo a 3 colores de cada una; y según número de botones de las prendas (de 1 a 5 botones) todas con igual color. Para ello, los niños disponen de un número suficiente de muñecas y más prendas de las necesarias, de modo que sea posible observar si los niños repiten o no la misma combinación de elementos.

Los niños comienzan seleccionando al azar las prendas para vestir las muñecas, sin ninguna sistematicidad. Seguidamente, aparece un procedimiento de tanteo, donde se selecciona al azar, pero se comprueba si una pareja dada ya estaba formada, en cuyo caso se descarta. Más adelante se realiza un procedimiento cíclico donde, formada una pareja, se intercambia el color de las prendas (por ejemplo, si se tiene camiseta azul y pantalón rojo, se busca una camiseta roja con pantalón azul). Poco a poco las estrategias adquieren mayor sistematicidad hasta mantener un término constante (como la camiseta roja) que van combinando con el resto de elementos (todos los pantalones), para luego fijar otro término (la camiseta azul) y hacer lo mismo con el resto hasta formar todas las posibles parejas. La autora indica que los niños de 4 a 6 años utilizan siempre una misma estrategia, preferentemente el tanteo o selección al azar, aunque se les plantee una tarea diferente. Pero hacia los 7 años, se selecciona la estrategia en función de la tarea planteada y pueden resolver el problema mediante una estrategia sistemática con un número pequeño de elementos.

En su experimento, Kafoussi (2004) plantea cinco tareas sobre espacio muestral donde pide a los niños describir todos los posibles resultados de una situación aleatoria como, por ejemplo: “¿qué puede pasar si se lanza un dado de diferentes colores?” Inicialmente los niños son capaces de listar todas las posibilidades en experimentos simples (como lanzar el dado), pero no en experimentos compuestos (sacar dos bolas a la vez de una urna). Después de la enseñanza, 8 de los 15 niños son capaces también de enumerar todos los resultados en el experimento compuesto, aunque de forma no sistemática.

En resumen, la capacidad combinatoria tarda más en desarrollarse que las descritas en los apartados anteriores, principalmente por su relación con el razonamiento multiplicativo como indica Zapata-Cardona (2018). Aunque los niños pequeños pueden comenzar a realizar enumeraciones usando tanteo para resolver problemas muy simples, hacia los 6 años, mediante la instrucción, es cuando hay una mejora notable en las estrategias combinatorias de los niños (Zapata-Cardona, 2018).

Conclusiones

Aunque las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) sobre razonamiento probabilístico concluyeron que éste no se desarrolla hasta la adolescencia, más

recientemente se han descrito ideas sobre el lenguaje y conceptos de probabilidad en niños más pequeños. Como sugieren Kuzmak y Gelman (1986):

Si bien algunos aspectos de la comprensión de los fenómenos aleatorios pueden estar presentes a una edad temprana, incluso los adultos carecen de comprensión de ciertos aspectos [...] Por tanto, la secuencia de desarrollo que da como resultado una comprensión madura de los fenómenos aleatorios es larga, comienza en los años preescolares y se extiende hasta la edad adulta (p. 566).

Las investigaciones reseñadas indican que niños de 3-4 años comienzan a diferenciar situaciones deterministas y aleatorias y a los 5 años comienzan a comprender la imprevisibilidad de los resultados aleatorios. Aunque pueden mostrar ciertas ideas de equitatividad en esta misma edad, hasta los 7 años no logran describir todo el conjunto de posibilidades del espacio muestral y tienen dificultad para concebir una distribución aleatoria en un plano (Nikiforidou y Pange, 2010; Piaget e Inhelder, 1951). Esto se debe a que la capacidad combinatoria tiene un desarrollo posterior que comienza sobre los 6-7 años, donde los niños únicamente logran realizar enumeraciones con un número pequeño de objetos, y siempre mediante ensayo y error.

Entre los 4-5 años los niños empiezan a usar el lenguaje de probabilidad, que se va refinando progresivamente, y a partir de los 7-8 años logran expresar la mayor o menor probabilidad de un resultado, aunque tienen dificultad con los términos 'imposible' y 'seguro'.

La capacidad de comparar la probabilidad de un mismo suceso en dos experimentos sencillos comienza con niños muy pequeños y pueden elegir el que tiene más casos favorables sistemáticamente desde los 3 años. Poco a poco el niño constata el papel de los casos desfavorables en la probabilidad y a los 6-7 años puede comparar probabilidades si no se requiere razonamiento proporcional.

Estas habilidades de los niños indican que es posible introducir algunas nociones de probabilidad desde muy corta edad. En la siguiente sección se presentan algunas ideas para trabajar este tema con los niños.

SUGERENCIAS PARA LA INTRODUCCIÓN DE LA PROBABILIDAD A NIÑOS DE EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMER CICLO DE PRIMARIA

Las investigaciones descritas indican que la enseñanza de la probabilidad debe comenzar lo antes posible para poder desarrollar la intuición del niño. En consecuencia, el docente debe proponer situaciones probabilísticas en su aula para introducir una forma de pensar diferente a otras ramas de las matemáticas y ayudar así a superar las intuiciones erróneas primitivas sobre la aleatoriedad. Más aún,

porque es posible relacionar este tema con juegos y con situaciones en la vida diaria del niño (Nikiforidou, 2018).

Metz (1998a; 1998b) resalta la importancia de comprender la aleatoriedad y la necesidad de desarrollar en los niños cinco intuiciones necesarias para la comprensión de la probabilidad:

- ◆ Aceptación de la incertidumbre e indeterminación del resultado. Una forma rudimentaria de esta comprensión es la distinción entre sucesos predecibles que se dan con certeza y sucesos impredecibles, que puede darse sobre los 4-5 años (Fay y Klahr, 1996; Kuzmak y Gelman, 1986).
- ◆ Percepción de la magnitud relativa en la incertidumbre, como por ejemplo, la distinción entre sucesos raros y frecuentes. Según Metz (1998b) los niños de educación infantil logran esta distinción, que progresa en los primeros años de la escuela primaria cuando adquieren progresivamente habilidad para cuantificar diferentes clases de elementos y contar los elementos de cada clase (por ejemplo, casos favorables y desfavorables), así como comparar su tamaño en conjuntos pequeños.
- ◆ Comprender la relación parte-todo, para visualizar los casos favorables como una parte de todos los casos posibles. Metz (1998b) indica que ya con 5 años los niños tienen esta intuición, que se va desarrollando a lo largo de la educación primaria.
- ◆ Estimar la mayor o menor verosimilitud de un suceso. Como hemos visto a lo largo del trabajo, algunas investigaciones (ej., Davies, 1965; Falk, Yudilevich-Assouline y Elstein, 2012; Piaget e Inhelder, 1951; Yost, Siegel y Andrews, 1962) indican que el niño puede comparar probabilidades sin necesidad de requerir razonamiento proporcional, por lo que es relevante que el docente lo tome en cuenta para la planificación educativa.
- ◆ Predecir la distribución esperada de los resultados del experimento aleatorio. Las investigaciones analizadas no muestran esta capacidad en los niños hasta los 7 años (Piaget e Inhelder, 1951), aunque sí se percibe cierta intuición al respecto desde los 5 años (Paparistodemou et al., 2008). No obstante, promover en los niños las otras cuatro habilidades para las que están preparados facilitará la adquisición de este último requisito en los años posteriores.

Sobre la forma de trabajar con el tema, las siguientes orientaciones didácticas para primaria de Batanero y Godino (2004) son válidas también para educación infantil:

- ◆ Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
- ◆ Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
- ◆ Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.

- ◆ Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
- ◆ Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras (p. 755).

Alsina y Vásquez (2016), adicionalmente, presentan una propuesta de tareas para fomentar la alfabetización probabilística (Gal, 2005) en la educación infantil y primaria. Para la etapa de 3 a 6 años la principal finalidad, de acuerdo a los autores, es aprender el lenguaje probabilístico partiendo de situaciones cotidianas, animando a los niños a que realicen juicios de probabilidad sobre su futura ocurrencia. Puesto que el contexto influye fuertemente en las estrategias de los niños, los autores proponen trabajar con diferentes contextos, incluyendo situaciones de la vida del niño y juegos con diferentes dispositivos como fichas, monedas, dados o ruletas. Para los 6-8 años proponen la cuantificación de la posibilidad de los resultados. En este sentido, es importante resaltar que los niños pequeños trabajan mejor las actividades sobre azar con material tangible que con recursos virtuales (Nikiforidou, 2010, 2019). Otras propuestas complementarias y materiales didácticos para la educación infantil se presentan en Alsina (2017) y para niños a partir de 6 años en Godino et al. (1987).

AGRADECIMIENTOS

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033 (MICIN) y Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas*, 7, 4-22.
- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en educación infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon*, 95, 25-48.
- Alsina, Á., y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN*, 48, 41-58.
- Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Statistics and Probability (ACMSPO24)*.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu, (Eds.) (2013). *Atas do III Encontro de probabilidades*

- e estatística na escola*. Braga: Centro de Investigação em educação da Universidade do Minho.
- Batanero, C. y Godino, C. (2004). Estocástica: estadística y probabilidad. En J. D. Godino (Ed.), *Didáctica de la Matemática para maestros* (pp. 405-455). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.
- Beltrán-Pellicer, P. (2017). Una propuesta sobre probabilidad en educación infantil con juegos de mesa. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 6(1), 53-61.
- Bryant, P. y Nunes, T. (2012). Children's understanding of probability: A literature review (full report). London: Nuffield Foundation.
- Consejería de Educación. (2008). Orden de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Infantil en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 169, 17- 53.
- Davies, H. (1965). Development of the probability concept in children. *Child Development*, 99, 29-39.
- Denison, S. y Xu, F. (2014). The origins of probabilistic inference in human infants. *Cognition*, 130(3), 335-347. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.12.001>
- English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 451-474. <https://doi.org/10.1007/BF00367908>
- Falk, R., Falk, R. y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181-204.
- Falk, R., Yudilevich-Assouline, P. y Elstein, A. (2012). Children's concept of probability as inferred from their binary choices-revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 207-233. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9402-1>
- Fay, A. L. y Klahr, D. (1996). Knowing about guessing and guessing about knowing: Preschoolers' understanding of indeterminacy. *Child Development*, 67, 689-716.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer.
- Giroto, V., Fontanari, L., Gonzalez, M., Vallortigara, G. y Blaye, A. (2016). Young children do not succeed in choice tasks that imply evaluating chances. *Cognition*, 152, 32-39. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2016.03.010>
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos teóricos y propuestas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Goldberg, E. (1966). Probability judgment by preschool children. *Child Development*, 37(1), 157-167.
- Hernández-Solís, L. A., Gea, M. M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (en prensa) Investigación sobre el razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades. *BEIO*.

- HodnikČadež, T. y Škrbec, M. (2011). Understanding the concepts in probability of pre-school and early school children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7(4), 263-279.
- Hoemann, H. y Ross, B (1982). Children's concepts of chance and probability. En C. J. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition* (pp. 93-121). Springer Verlag.
- Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 909-955). Information Age Publishing y NCTM.
- Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 29-39.
- Kazak S. y Leavy A.M. (2018) Emergent reasoning about uncertainty in primary school children with a focus on subjective probability. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris y E. Papanastasiou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education*. (pp. 34-54). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_3
- Kuzmak, S. D. y Gelman, R. (1986). Young children's understanding of random phenomena. *Child Development*, 57(3), 559-566.
- Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 95-119). Springer.
- Metz, K. E. (1998a). Emergent understanding and attribution of randomness: Comparative analysis of the reasoning of primary grade children and undergraduates. *Cognition and Instruction*, 16(3), 285-265.
- Metz, K. E. (1998b). Emergent ideas of chance and probability in primary-grade children. En S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in Grades K-12* (pp. 149-174). Erlbaum.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de educación infantil. *Boletín Oficial del Estado*, 4, 474-482.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Nikiforidou, Z. (2018) Probabilistic thinking and young children: theory and pedagogy. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, y E. Papanastasiou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education* (pp. 21-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_3
- Nikiforidou, Z. (2019). Probabilities and preschoolers: Do tangible versus virtual manipulatives, sample space, and repetition matter? *Early Childhood Education Journal*, 47, 769-777. <https://doi.org/10.1007/s10643-019-00964-2>
- Nikiforidou, Z. y Pange, J. (2010). The notions of chance and probabilities in preschoolers. *Early Childhood Education Journal*, 38(4), 305-311. <https://doi.org/10.1007/s10643-010-0417-x>

- Nikiforidou, Z., Pange, J. y Chadjipadelis, T. (2013). Intuitive and informal knowledge in preschoolers' development of probabilistic thinking. *International Journal of Early Childhood*, 45(3), 347-357. <https://doi.org/10.1007/s13158-013-0081-6>
- Paparistodemou, E., Noss, R. y Pratt, D. (2008). The interplay between fairness and randomness in a spatial computer game. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13(2), 89-110. <https://doi.org/10.1007/s10758-008-9132-8>
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). La genése de l'idée de hasard chez l'enfant. Presses Universitaires de France.
- Shtulman, A. y Carey, S. (2007) Impossible or improbable? How children reason about the possibility of extraordinary claims. *Child Development*, 78, 1015-1032. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01047.x>
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de educación primaria. *Bolema*, 31(57), 454-478. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a22>
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae*, 21(3), 131-154. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215>
- Yost, P., Siegel, A. y Andrews, J. (1962). Non verbal probability judgement by young children. *Child Development*, 33(4), 769-780.
- Zapata-Cardona L. (2018) Supporting young children to develop combinatorial reasoning. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education*. (pp. 257-272). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_15

Carmen Batanero
Universidad de Granada, España
batanero@ugr.es

Rocío Álvarez-Arroyo
Universidad de Granada, España
rocioaarroyo@ugr.es

Luis A. Hernández Solís
Universidad Estatal a Distancia, Costa
Rica
lhernandez@uned.ac.cr

María M. Gea
Universidad de Granada, España
mmgea@ugr.es

Recibido: Diciembre de 2020. Aceptado: Marzo de 2021

doi: 10.30827/pna.v15i4.22349



ISSN: 1887-3987