

# GEOMETRÍA FUERA DE VISTA: CLASIFICANDO CUADRILÁTEROS CON ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL

Lisset D. González-Salazar y Eric Flores-Medrano

*Esta investigación presenta los efectos que tiene, sobre las clasificaciones de cuadriláteros que realizan estudiantes con discapacidad visual, una serie de actividades acompañadas de un material manipulativo. Se trata de un estudio de corte cualitativo, mediante estudio de caso, con la participación de cuatro estudiantes con ceguera total de entre 10 y 12 años. En esta experiencia evidenciamos que los estudiantes ciegos desarrollan un proceso equivalente al proceso de visualización haciendo manipulaciones de representaciones 3D de cuadriláteros y, mediante procesos de abstracción, construyen definiciones al identificar las características de los objetos y realizan clasificaciones particionales.*

**Términos clave:** Clasificación de cuadriláteros; Discapacidad visual; Educación especial; Inclusión; Materiales manipulativos

Geometry out of sight: classifying quadrilaterals with visually impaired students

*This research presents the effects that a series of activities accompanied by manipulative material have on the classifications of quadrilaterals carried out by students with visual disabilities. This is a qualitative study, by means of a case study, with the participation of four students with total blindness between 10 and 12 years. In this experience we show that blind students develop a process equivalent to the visualization process by manipulating 3D representations of quadrilaterals and, through processes of abstraction, construct definitions by identifying the characteristics of objects and perform partition classifications.*

**Keywords:** Classification of quadrilaterals; Inclusion; Special education; Tactil materials; Visual disability

Desde 1948, en la Declaración Universal de los Derechos Humanos se menciona que toda persona tiene derecho a la educación. El objetivo de la educación es el desarrollo integral del individuo sin hacer distinción alguna, ni social ni racial (Asamblea General de las Naciones Unidas, 1948). Sin embargo, diversos estudios han reportado que sigue habiendo poca atención a la diversidad y se discrimina a las personas por su raza, género y condición social (e.g. Golding, et al., 2018), por mencionar solo algunos factores.

Uno de los grupos mayormente discriminados en cuanto al acceso a la educación es el conformado por las personas con algún tipo de discapacidad (Roy, 2020). Esta discriminación no es un asunto singular, sino sistémico: escuelas no adaptadas, materiales que no consideran necesidades educativas especiales, pocos programas de formación docente enfocados a la atención a la diversidad (e.g. Secretaría de Educación Pública, 2018). En particular, el asunto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de personas con discapacidad visual se ha venido tratando de estudiar y comprender, pero no ha habido suficientes investigaciones ni resultados que puedan incidir en brindar soluciones al problema de dar atención de calidad e inclusión educativa para dichas personas (Avendaño y Díaz, 2014).

El estudio de la geometría es una parte importante del currículo en los diferentes sistemas y niveles educativos y, al mismo tiempo, resulta un gran reto su enseñanza a personas con discapacidad visual, sobre todo por el énfasis que se le ha dado al sentido de la vista en esta asignatura (Velasco y Montes, 2013). Y, aunque existe una variedad de materiales disponibles para la enseñanza y aprendizaje de la geometría para estudiantes ciegos, pocos de estos han tenido un proceso de corroboración rigurosa de su funcionalidad.

La creación de materiales para atender la enseñanza de las matemáticas a personas con discapacidad visual debe basarse en los esquemas compensatorios, es decir, potenciar el uso de sentidos y capacidades (no la vista) y respetar los procesos individuales de aprehensión de conocimientos matemáticos (actitud que de por sí debería de prevalecer en las aulas), buscando, en todo momento, un adecuado desarrollo de competencias matemáticas, en las que los estudiantes descubren y construyen el mundo que los rodea (Vygotski, 1997). Aunado a esto, se requiere el interés del maestro por las diferentes necesidades de los estudiantes, ya que esto propicia la participación en el desarrollo de los contenidos y hace que la inclusión educativa sea real (UNESCO, 1994).

En este artículo se presentan algunos resultados obtenidos en un estudio con personas con discapacidad visual, al implementar una secuencia de tareas para la clasificación de cuadriláteros. El objetivo general de la investigación fue determinar el efecto que tiene, sobre el aprendizaje de personas con discapacidad visual, el desarrollo de una serie de actividades en las que se usa material manipulable con el fin de clasificar cuadriláteros, destacando habilidades y procesos geométricos logrados.

## MARCO TEÓRICO

Si bien reconocemos que la incorporación de materiales manipulables es esencial para el trabajo con personas con discapacidad visual, también somos conscientes de que dichos materiales podrían resultar infértiles si no están enmarcados en una serie de actividades que promuevan un aprendizaje efectivo de las matemáticas que se desean enseñar. Es así como resulta imprescindible basarnos en una lógica de diseño instruccional acorde a los procesos cognitivos que se involucren en el desarrollo de las matemáticas en cuestión.

Siguiendo el trabajo de Guillen (2004), los procesos geométricos en los que nos enfocamos para acompañar la lógica de diseño son visualizar, definir y clasificar. A continuación, describimos cada uno de estos.

El proceso de visualizar abarca el “conjunto de habilidades y procesos necesarios para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual” (Acevedo y Camargo, 2011, p. 24). Hay tres momentos en el proceso de visualizar: (a) la organización, la cual hace referencia a un momento inicial, en el que la información visual es obtenida a partir de los sentidos; (b) el reconocimiento, que abarca el momento de aprovechamiento cognitivo de la información visual; y (c) la representación de información, en la que se comunican los resultados a partir de los dos procesos anteriores (Acevedo y Camargo, 2011). En este sentido, y siguiendo a Hitt (1995), podemos decir que la visualización es una acción que acompaña a la construcción de conceptos y que abarca una actividad analítica y crítica y que se relaciona con la comprensión de conceptos matemáticos.

En el contexto de la discapacidad visual, podemos interpretar que visualizar es un proceso razonado que realiza el ciego e involucra una manipulación de la representación de objetos geométricos. Para las personas con discapacidad visual, las manos son el órgano de construcción de imágenes mentales porque le permiten caracterizar espacialmente los objetos geométricos y, mediante un proceso de exploración, construir una imagen integral de este y así lograr una representación mental de la figura (Niño y Vanegas, 2013). Es decir, la percepción háptica les permite tener acceso al objeto como si lo observaran. En este sentido, la visualización no se restringe a la visión, sino que está relacionado con la comprensión que hace el estudiante sobre el objeto en cuestión (Papadaki, 2015).

El proceso de definir, según Leikin y Winicki-Landman (2001), consiste en dar significado y carácter de concepto a un objeto, lo cual va más allá de asignarle un nombre. A priori, más allá de cuestiones relacionadas con la memorización, este proceso, a diferencia del de visualizar, no parece tener diferencias sustanciales entre las personas con discapacidad visual y aquellas sin deficiencia visual. A continuación, señalamos algunas características del proceso de definir que nos fueron de utilidad para el diseño de actividades y para el análisis de las producciones de los participantes.

La primera característica está relacionada con la memorización. Al definir es importante reducir los intentos de proponer una definición de un objeto mediante la memorización de propiedades. Escudero, et al. (2014) mencionan que, en una primera etapa, basta con que los estudiantes identifiquen algunas propiedades y formulen una definición provisional; pero, en etapas posteriores, se debe propiciar que velen por la inclusión de las propiedades necesarias y suficientes para lograr una definición apropiada, lo cual los llevará a modificar gradualmente sus definiciones, acercándolas hacia definiciones comúnmente aceptadas. Este proceso puede ser difícil para personas con discapacidad visual pues, como señalan Aguilar y Camacho (2019), ellos tienden a recurrir a memorizar información, ante la dificultad de representarla en Braille en un tiempo reducido.

La segunda característica tiene que ver con que, en el trabajo con definiciones se identifican dos elementos: la definición del concepto y la imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981). La definición del concepto es “el objeto matemático determinado por una definición formal, mientras que la imagen del concepto es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto” (Silva, 2013, p.28).

Con base en los elementos mencionados, surge una tercera característica: el proceso de definir puede darse en dos sentidos, descriptivamente (a posteriori) o constructivamente (a priori) (Villiers, 1986, 1998). Al definir a posteriori se parte del conocimiento de una definición, pero esta definición se cambia a través de la exclusión, generalización, especialización, sustitución o adición de propiedades; esto permite el desarrollo de la imagen del concepto para formular la nueva definición (Villiers 1998; Freudenthal, 1973). Al definir a priori se construye, a partir del conocimiento de propiedades, una definición. Por lo tanto, la imagen del concepto debería estar desarrollada antes de pasar a la formulación de una definición.

Finalmente, el proceso de clasificar, al igual que en proceso de definir, no encontramos literatura con respecto a dificultades asociadas particularmente a la discapacidad visual. Dicho proceso es concebido como asignar cada caso a un conjunto o clase a la que tiene mayor probabilidad de pertenecer (Foody, 1988). En geometría, clasificar requiere reconocer e identificar elementos y propiedades matemáticas de los objetos que pueden ser usados para hacer la asignación (Gutiérrez, 2006).

Una clasificación puede ser jerárquica o particional. En la clasificación jerárquica, se parte de un conjunto de objetos. Los objetos particulares forman subconjuntos de los objetos generales. En este caso, la clasificación se vale de definiciones económicas, que permiten la contención de unos conjuntos en otros (Villiers, 1994). En la clasificación particional los subconjuntos, o incluso los objetos particulares, se consideran separados entre sí, por lo tanto, se dice que conforman subconjuntos disjuntos (Villiers, 1994). De acuerdo con Escudero-Domínguez y Carrillo (2014), es pertinente explorar las clasificaciones jerárquicas para desarrollar conceptos profundos acerca de las figuras y sus relaciones. En la

escuela básica, es muy común que los estudiantes piensen en los cuadrados y en los rectángulos como conjuntos disjuntos (Barrantes y Zapata, 2008), lo cual evita que se reflexione sobre características compartidas entre ambas figuras. Otra dificultad radica en la determinación de la característica predominante que permita generar conjuntos para lograr realizar clasificaciones con potencialidad matemática (Renzulli y Scaglia, 2007).

Los tres procesos descritos son fundamentales en la construcción efectiva de conceptos geométricos. Las tareas y el material manipulativo que se presenta más adelante tienen el objetivo de propiciar su desarrollo con estudiantes con discapacidad visual lo cual representa un aporte de este estudio a la atención a la diversidad.

## METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter cualitativo, debido al interés de examinar cómo individuos específicos perciben y experimentan los fenómenos para lograr interpretar y dar significado a sus acciones (Hernández, et al., 2014). El estudio está centrado en describir el efecto sobre el desarrollo del pensamiento geométrico de personas con discapacidad visual que, sobre el aprendizaje de la clasificación de cuadriláteros, tiene una secuencia didáctica empleando un material táctil elaborado en 3D.

Al tener en cuenta las particularidades de la población con discapacidad visual, realizamos un estudio de caso intrínseco (Stake, 2005). Esto con el propósito de comprender a fondo cómo se logran (o qué dificulta el logro de) los procesos de visualizar, definir y clasificar por parte de las personas con discapacidad visual de acuerdo con los esquemas compensatorios (Baxter y Jack, 2008) que suelen emplear y sin detrimento de nuestra intención de proponer prácticas inclusivas al estudiarlos en un ambiente exclusivo.

Utilizamos la observación participante (Hernández et al. 2014) de cuatro estudiantes con la finalidad de observar el desarrollo de las actividades y gestionar las discusiones de acuerdo con la planificación; lo anterior, cuidando la autonomía en el desarrollo del trabajo de los informantes. Para recolectar los datos se utilizaron notas de campo y grabación de audio.

El grupo de informantes se compone de cuatro personas con ceguera total, dos estudiantes de quinto de primaria (Luis y José, nombres ficticios) y dos estudiantes de sexto de primaria (Rafael y Ángela, nombres ficticios). Al momento del estudio, tenían un rango de edad entre 10 y 12 años. Habían estudiado nociones de geometría elemental en sus respectivas escuelas y asistían regularmente al Instituto Leyer's Puebla A. C., una organización que brinda rehabilitación, asistencia social para ciegos y personas con déficit visual y proporciona material didáctico para el aprendizaje de esta población.

El material manipulable que empleamos en las actividades fue diseñado como una mejora del presentado en Canchón y González (2018) y se empleó como un medio para lograr la representación de los cuadriláteros, teniendo en cuenta necesidades particulares de los estudiantes y propiciando la posibilidad de representar diferentes objetos geométricos. Se consideraron aspectos como el tamaño de las piezas, la textura, el dinamismo y la funcionalidad para la enseñanza y el aprendizaje.

El material está compuesto por estructuras alargadas que, al ser tiradas por sus extremos, cambian de longitud, las cuales representan segmentos; y por estructuras que permiten unir dos segmentos, que cambian la magnitud de su abertura entre 40 y 180 grados, y que representan ángulos (figura 1). El material fue empleado en cuatro tareas que serán descritas más adelante.



*Figura 1.* Estructuras que representan el segmento y el ángulo

En esta investigación se diseñaron seis tareas teniendo en cuenta tres procesos geométricos: visualizar, definir y clasificar. Dichas tareas se desarrollaron en tres sesiones, cada una de 45 minutos. La modalidad que se empleó en un primer momento fue individual (sesión dirigida, tarea 1) y posteriormente se trabajó en grupo (tarea 2-6). Cada estudiante tuvo contacto con el material y participó en las clases a través de preguntas orientadoras. En la siguiente sección, explicamos brevemente en qué consiste cada tarea y los resultados más relevantes que encontramos en cada una. En la tabla 1 se colocan las tareas y sus objetivos, destacando con cursivas los procesos que se deseaban trabajar en cada una. La facilitadora en la gestión de tareas no es parte del personal de la institución en la que se aplicó y es la investigadora principal de este estudio.

Tabla 1  
*Tareas, objetivos y procesos asociados*

Tarea	Objetivo
Manipulación y reconocimiento del material	Que los estudiantes conozcan el funcionamiento del material a la vez que se establece un estándar conceptual de partida.
Identificación de cuadriláteros	Que, a partir de clasificaciones progresivas basadas en la visualización, los estudiantes distingan los cuadriláteros de los no cuadriláteros.
Identificación de cuadriláteros	Que, a partir de un contraste entre definiciones y visualización, los estudiantes logren identificar los nombres de cuadriláteros.
Identificación de tipos de cuadriláteros	Que, a partir de un contraste entre definiciones y visualización, los estudiantes construyan una clasificación de cuadriláteros basada en un criterio de paralelismo entre los lados de estos.
Discriminación de figuras a partir de características	Que el estudiante identifique características comunes entre distintos cuadriláteros para lograr establecer una clasificación jerárquica.
Transición hacia el uso de materiales 2-D	Que los estudiantes muestren suficiencia en la abstracción de al trabajar con materiales más cercanos a la conceptualización de las figuras.

## RESULTADOS

Hemos organizado esta sección siguiendo la cronología de la aplicación de las tareas para que, además de poder mostrar la propia secuencia, podamos presentar el desarrollo de ideas matemáticas que se propició entre el grupo de estudiantes. La actividad completa constó de 6 tareas y una sesión previa para trabajar los prerrequisitos establecidos para el tema de clasificación de cuadriláteros. Dicho tema fue elegido ya que, de acuerdo con diversos autores (e.g. Prado, 2013), los estudiantes suelen basar sus clasificaciones en la visualización más que en la definición, siendo estos, dos de los procesos que guían este trabajo.

Los prerrequisitos trabajados en la sesión previa son nociones básicas de los objetos geométricos, tales como punto, segmento, recta, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo agudo, ángulo llano, ángulo cóncavo, rectas paralelas y rectas perpendiculares. Para lograr esto se emplearon hojas con el relieve de dichos elementos (en el caso de la recta se advirtió la imposibilidad de representarla en su totalidad). Mediante el sentido del tacto, se busca que los participantes se familiaricen con los objetos geométricos y logren reconocer algunas características de estos, haciendo analogías con objetos ya conocidos.

La primera tarea pretende que los estudiantes manipulen y reconozcan el funcionamiento del material presentado en la figura 1 con la finalidad de que haya fluidez en su manejo durante las siguientes actividades. En un primer momento, usan la estructura que representa el segmento, construyen segmentos congruentes e identifican cuáles no lo son. Después manipulan el ángulo y construyen distintos tipos de ángulos de acuerdo con su medida.

Los estudiantes relacionan el material que representa un segmento con un palo y mencionan que “se puede hacer largo o chiquito” para hacer referencia al cambio de longitud. En esta primera tarea se hace énfasis en la definición de segmento como subconjunto de la recta, el cual se puede medir y tiene dos extremos. Los estudiantes son capaces de construir segmentos de diferentes tamaños y también pueden identificar segmentos congruentes.

Con respecto a la estructura que representa el ángulo, los estudiantes mencionan que “es el signo mayor o menor”. También hacen referencia al cambio de amplitud y utilizan los términos “más abierto o más cerrado” para referirse a esta variación. Cuando forman un ángulo recto se da el siguiente diálogo.

*Inves:* Van a tocar el siguiente elemento. Está en el renglón de abajo, al lado izquierdo. ¿Qué es eso?

*Ángela:* Es la mitad de un cuadrado.

*José:* Es la familia cuadrilátera. Se parece a una L muy grande [...].

*Inves:* Toquen el siguiente elemento al lado derecho de ese. ¿Qué es?

*Jose:* Es un mayor que.

*Inves:* Estás confundiendo el sentido de la figura, por la forma parece un menor que [...]

*Inves:* Toquemos el siguiente ángulo.

*Luis:* Es un ángulo más grande que la L.

*José:* Es un menor que más grande.

En estas participaciones observamos que los estudiantes toman como referentes elementos conocidos, pero fuera de la geometría. Para el ángulo recto lo hacen corresponder con la letra L y, a partir de este, a los ángulos agudos y obtusos, con los signos de mayor que y menor que, dependiendo de su orientación. Este mismo comportamiento se repitió en la discusión sobre el ángulo llano.

Con base en estas referencias se busca una conceptualización geométrica del ángulo. Cuando se les pide identificar el ángulo como la amplitud entre la intersección de dos semirrectas, los informantes aluden nuevamente a la forma de la L para debatir sobre la amplitud del ángulo en cuestión.

*Inves:* Toquen la parte superior izquierda. ¿Qué sienten?

*José:* Es una cruz.

*Luis:* Es el signo de más.

*Inves:* Sientan que, en esa cruz, o en el signo del más, hay dos segmentos que se están intersecando. ¿Qué quiere decir eso? Que se cortan o se cruzan y me están formando ángulos. ¿Qué tipo de ángulos están formando?

*Ángela:* Ángulos rectos.

*José:* Sí, hay una L.

*Inves:* Estos segmentos que se intersecan y forman ángulos rectos se llaman segmentos perpendiculares. Continuemos, toquen la figura que está a la derecha. ¿Qué sienten? [En este momento los estudiantes están tocando una hoja con relieve que tiene dos segmentos perpendiculares ubicados de manera diagonal].

*José:* Se parece, son los mismos.

*Inves:* ¿Cómo son esos ángulos?

*José:* Como una L, ahora ya no es una cruz es el signo por.

Estos extractos nos permiten evidenciar, coincidiendo con Papadaki (2015), que los niños ciegos describen sus pensamientos geométricos en términos informales o asociándolos con objetos de su vida cotidiana. Este mismo proceso se observa en una experiencia con niños sin deficiencia visual: “las situaciones se relacionaron con el uso de objetos en los cuales el ángulo está presente, y que los estudiantes trabajan cotidianamente en la escuela” (Rotaèche y Montiel, 2017, p. 179).

Otra relación que se establece tiene conexión con el trabajo geométrico y no con el extra-matemático (como fue el caso de la L):

*Inves:* Van a tocar el siguiente elemento. Está en el renglón de abajo, al lado izquierdo. ¿Qué es eso?

*Ángela:* Es la mitad de un cuadrado

En esta tarea y en las posteriores es evidente que, por medio de la percepción háptica, los estudiantes identifican los objetos geométricos y, en este proceso, los pueden relacionar con otros objetos que ya conocen, no necesariamente en un contexto geométrico.

En la segunda tarea los estudiantes deben identificar distintas cualidades o atributos de los objetos geométricos representados en la figura 2. Deben compararlos y construir criterios con el objetivo final de clasificarlos en cuadriláteros o no cuadriláteros y, posteriormente, en cuadriláteros cóncavos y convexos.



*Figura 2.* Material 3D para construir figuras geométricas

Los estudiantes, trabajando en conjunto, atienden a la indicación de formar libremente dos grupos de figuras. El primer grupo formado contiene el rectángulo, el cuadrado, el rombo y el triángulo y el segundo grupo lo forman el pentágono cóncavo, el cuadrilátero cóncavo, el pentágono regular y el trapecio isósceles. Debido a la ubicación espacial de los participantes, ellos deciden nombrar una parte de la mesa como la parte cerca de la ventana y otra como la parte cerca de la puerta, con la finalidad de ubicar las figuras.

*Luis:* La mía es un cuadrado.

*José:* El mío tiene 4 segmentos y 4 vértices.

*Inves:* ¿Quién quiere empezar?

*José:* La mía va a quedar cerca de la ventana [refiriéndose al rectángulo].

*Luis:* La mía también va a quedar cerca de la ventana.

*Inves:* ¿Por qué?

*Luis:* Porque tiene cuatro lados [refiriéndose al cuadrado].

*José:* Esta va a quedar cerca de la puerta [refiriéndose al rombo].

*Inves:* ¿Por qué?

*José:* Porque sus ángulos son diferentes.

*Inves:* ¿Cómo sabes que son diferentes?

*José:* Porque tienen diferente forma [...].

*José:* Esta figura iría cerca de la puerta, porque los ángulos son diferentes [refiriéndose al triángulo].

*Inves:* ¿Los demás están de acuerdo?

*Luis:* Sí, yo estoy de acuerdo [...].

*Rafael:* Como sus ángulos son diferentes, va cerca de la puerta [refiriéndose al pentágono regular].

*Luis:* Este, cerca de la puerta [refiriéndose al pentágono cóncavo].

Como podemos observar, aunque los criterios iniciales son muy generales, la discusión de los estudiantes se encamina principalmente en la distinción entre objetos con ángulos iguales y con ángulos diferentes para formar los dos grupos de figuras. Notamos que los estudiantes establecen características no exhaustivas para diferenciar a los dos conjuntos. En el primer caso, el cuadrado y el rectángulo cumplen con la característica de tener ángulos iguales. Sin embargo, el triángulo, al ser equilátero, no cumple con el lugar asignado, destinado para figuras con ángulos diferentes. Otro caso similar sucede con el pentágono regular dentro de dicho conjunto. Cabe señalar que la partición en dos conjuntos era libre. Una de las posibilidades es tomar a la congruencia de ángulos, tal como lo proponen los estudiantes. Sin embargo, se espera que la discusión lleve hacia la consideración de los cuadriláteros y no cuadriláteros.

Es así como se direcciona la tarea y se les propone hacer otra clasificación con un criterio distinto:

*Inves:* ¿Existe otro criterio [de clasificación]?

*Ángela:* Figura cuadrada y como triángulos.

*José:* Por las partes.

*Inves:* ¿Así podemos hacer los dos grupos?

*Ángela:* No, porque no todos son figuras cuadradas.

*Inves:* José, ¿qué quieres decir con “por las partes”?

*José:* Lados y vértices.

*Inves:* Ok, José propone tener en cuenta los lados y los vértices, pero ¿cómo formamos los dos grupos?

*Ángela:* ¿Los contamos?

Deciden contar los lados de cada figura y se da el siguiente diálogo:

*Luis:* El mío tiene tres lados [triángulo].

*Rafael:* El mío cinco [pentágono convexo].

*José:* Cuatro lados [cuadrado].

*Ángela:* El mío cinco [pentágono cóncavo].

*Rafael:* El mío va con el de la Ángela.

*Inves:* Tomen otra figura [Cuadrilátero cóncavo].

*José:* Este es...

*Ángela:* Pues tiene dos picos, pero... tiene cuatro lados, va con el de tuyo, José.

*Inves:* Les voy a poner las otras figuras en el centro de la mesa ustedes elijan y organícenlas.

*Luis:* No hay más triángulos.

*José:* Este es un rectángulo, va aquí.

*Ángela:* Cuatro lados, es en el grupo de José [Rombo].

*Rafael:* Este también [Trapezio isósceles].

Al finalizar la organización, les quedan tres grupos: objetos con tres lados, objetos con cuatro lados y objetos con cinco lados. La investigadora menciona que van a estudiar los cuadriláteros. Se les propone clasificar los cuadriláteros en dos conjuntos, teniendo en cuenta sus propiedades.

*Inves:* Bueno, ahora solo tenemos el grupo de los cuadriláteros, que son figuras de cuatro lados y cuatro ángulos. Les voy a agregar otros cuadriláteros. Se los estoy poniendo en el centro de la mesa, deben volver a agruparlos en dos grupos.

*Ángela:* ¿Con vértices o con lados? [...]

*José:* Yo no sé, todos se parecen.

*Luis:* Sí, son iguales [...]

*Rafael:* Este es diferente [refiriéndose al cuadrilátero cóncavo].

*Inves:* ¿Por qué?

*Ángela:* Claro que no, tiene cuatro ángulos y cuatro segmentos.

*Rafael:* Pero tiene forma diferente.

*Inves:* ¿Por qué tiene forma diferente?

*Rafael:* Se siente, no es cerrada.

En esta discusión, los estudiantes comienzan a plantearse la posibilidad de establecer subdivisiones añadiendo nuevas características. Rafael intenta expresar tal característica para diferenciar al cuadrilátero cóncavo del resto, sin embargo, al expresar que es una figura no cerrada no logra tener el apoyo de algún otro compañero.

En la tercera tarea, los estudiantes usan las definiciones de la tabla 2 para identificar cuál o cuáles objetos geométricos representados con el material satisfacen la definición.

Tabla 2  
*Definiciones adoptadas para los cuadriláteros*

Figura	Definición adoptada
Cuadrado	Figura geométrica con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.
Rectángulo	Figura geométrica con cuatro ángulos iguales.
Rombo	Figura geométrica con cuatro lados iguales.
Romboide	Figura geométrica con lados y ángulos opuestos iguales.
Cuadrilátero cóncavo	Figura geométrica con uno de sus ángulos interiores mayor a $180^\circ$ .
Trapezio isósceles	Figura geométrica con solo un par de lados paralelos y los lados no paralelos miden lo mismo.
Trapezio rectángulo	Figura geométrica con un par de lados paralelos y exactamente dos ángulos rectos.

*Fuente:* Elaboración propia a partir de Gascón (2003) y Samper, Molina y Echeverry (2013)

Los estudiantes identifican las representaciones correctamente. La única dificultad que se les presenta es para identificar el cuadrilátero cóncavo ya que no lograron visualizar el ángulo interno mayor de  $180^\circ$ .

Ante la indicación de señalar las figuras que tienen todos sus ángulos iguales, los estudiantes identifican que el cuadrado y el rectángulo cumplen con esa propiedad. Sin embargo, cuando se menciona que justo esa es la definición que se adoptó para el rectángulo, entonces retiran el cuadrado y mencionan que solamente para esa definición irá el rectángulo. Si bien podría tenerse una lectura de que el proceder de los estudiantes es correcto ya que se estaba realizando una actividad de relacionar figuras con definiciones y no se mencionaron las características suficientes para definir al cuadrado, también podríamos interpretar que se presenta una resistencia a la clasificación jerárquica, lo cual se verá más adelante.

La cuarta tarea consistía en clasificar los objetos geométricos representados a partir de una o varias de sus características, formando grupos para, posteriormente, dar nombre a cada conjunto. Los participantes escuchan las siguientes instrucciones: “Agrupen cuadriláteros que tengan dos pares de lados opuestos paralelos (paralelogramos); agrupen cuadriláteros que no tengan lados, ni ángulos iguales (trapezoides); agrupen cuadriláteros que tengan únicamente dos lados paralelos (trapezios) y agrupen cuadriláteros con uno de sus ángulos interiores mayor a  $180^\circ$  (Cuadrilátero cóncavo)”. La única dificultad que los estudiantes presentan fue la visualización de los ángulos cóncavos.

En la quinta tarea se les propone un conjunto de oraciones y los participantes tienen que mencionar si son verdaderas o falsas. Las respuestas obtenidas están en la tabla 3, junto con las justificaciones dadas.

Tabla 3

*Respuestas y justificaciones sobresalientes a las afirmaciones en la tarea 5*

N	Afirmación	Verdadero	Falso	Justificación
1	El cuadrado es un rectángulo.		X	Ángela: Porque una figura es una y la otra es otra.
2	El cuadrado, rectángulo y rombo son paralelogramos.	X		Ángela: Tienen paralelas.
3	Un rectángulo es un rombo.		X	Luis: No, el rectángulo no se parece al rombo.
4	El cuadrado es un rombo.	X		José: Sí, porque, si lo giramos, sí puede ser.
5	El romboide es un rombo.		X	Rafael: El rombo tiene sus cuatros lados iguales y el romboide no.
6	El rectángulo es un cuadrado.		X	Rafael: No, porque no tiene todos sus lados iguales.
7	El rombo es un cuadrado.		X	Ángela: No tiene la forma.
8	El rombo es un romboide.		X	Rafael: No, porque un rombo es un rombo y el romboide es otra figura.
9	El cuadrado es un trapecio.		X	Rafael: Es que el trapecio no tiene lados iguales y, aparte, hay varios tipos de trapecio y no se parecen al cuadrado.
10	El trapecio isósceles es un paralelogramo.		X	Ángela: No, por las paralelas, en ese grupo solo van los que tienen dos pares de lados paralelos.
11	El rombo es un trapecio.		X	Ángela: El rombo tampoco va en ese grupo de los trapecios.

Observamos que los estudiantes justifican su respuesta haciendo uso de diferentes aspectos:

- ♦ Las definiciones: están presentes en las justificaciones 5, 6 y 9. Sin embargo, hacen referencia a comparar las longitudes de lados, pero ninguno menciona las diferencias en cuanto a los ángulos.

- ◆ Las características para clasificarlas en un determinado grupo: se evidencia en las justificaciones 2, 10 y 11. Los estudiantes mencionan las paralelas para hablar de paralelogramos. También identifican las figuras geométricas que pertenecen o no a una clasificación.
- ◆ La forma de los cuadriláteros: este uso está en las justificaciones 1, 2, 4, 7 y 8. Es el criterio con mayor uso, y es algo razonable, teniendo en cuenta los estímulos a los que han sido sometidos los estudiantes, no solo en estas sesiones, sino a lo largo de todo su trayecto escolar.

Ante algunas de las justificaciones la investigadora intenta persuadir a los estudiantes sobre la veracidad del enunciado "el cuadrado es un rectángulo". En el siguiente extracto se evidencia el debate realizado:

*Inves:* El cuadrado es un rectángulo.

*Ángela:* No.

*Inves:* ¿Seguros?, ¿quién me dice la definición [de cuadrado]?

*José:* Tiene cuatro ángulos rectos y cuatro lados iguales.

*Inves:* Y la definición de rectángulo es...

*José:* Tiene cuatro ángulos rectos.

*Ángela:* Y tienen sus lados este y este iguales, y este y este iguales [señalando ángulos opuestos entre sí].

*Inves:* Lo que estás diciendo, Ángela, es que los lados opuestos de un rectángulo son iguales.

*Ángela:* Sí, por eso no puede ser [el cuadrado un rectángulo].

*Inves:* Pero en la definición que planteamos no hablamos de longitud de lados, solo dijimos que tiene sus cuatro ángulos rectos. ¿Entonces?

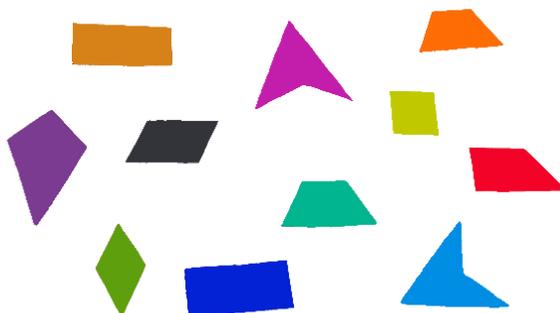
*Luis:* Entonces sí sería verdadero.

*Ángela:* No, porque el rectángulo no puede ser cuadrado tendríamos que cortar un pedazo y ahora sí. No maestra, tendríamos que alargarlo, por su forma.

Evidenciamos que los participantes tienen una noción sobre el rectángulo que lo diferencia del cuadrado. Además, añaden una propiedad al rectángulo como si fuera parte de la definición. Se podría pensar que los estudiantes alguna vez aprendieron como definición de rectángulo que este es una figura geométrica con dos pares de lados opuestos congruentes, pero que los lados adyacentes tienen diferente medida, y todos sus ángulos rectos y, en este caso, para su justificación, están usando la definición de memoria, sin darle un sentido a la que se propuso en la sesión.

De manera general, se observa que los estudiantes tienen una conceptualización basada en la imagen conceptual y hacen caso omiso al concepto definición. Esto es natural ya que el tacto es el sentido que ha tenido mayor énfasis; son sus manos el principal órgano para percibir el mundo que los rodea. Aunque se usaron definiciones para que ellos identificaran propiedades y pudieran hacer una correspondencia entre su imagen conceptual y el concepto definición, algunos de los participantes no pudieron establecer el nexo.

La sexta tarea consiste en identificar, en un material plano (ver figura 3), las figuras manipuladas previamente en el material 3D y agrupar en paralelogramos, trapecios, cuadriláteros cóncavos y convexos. Observamos que los participantes reconocen cada figura (cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, trapecio isósceles, trapecio rectángulo), pueden clasificarlas en paralelogramos y trapecios, y pueden identificar cuáles son cuadriláteros cóncavos y convexos. El cambio de material tridimensional a bidimensional no conlleva ninguna dificultad para reconocer las figuras, lo cual nos permite cuestionarnos sobre el efecto que tiene, sobre la comprensión de los estudiantes con discapacidad visual, el uso de materiales aparentemente lejanos a la conceptualización abstracta de los objetos analizados.



*Figura 3.* Cuadriláteros construidos en material plano

## CONCLUSIONES

La enseñanza y el aprendizaje son fenómenos de estudio en los que podemos destacar el papel principal del estudiante con sus características particulares. Las condiciones de diversidad no deberían de ser un obstáculo para propiciar el logro del éxito educativo entre los estudiantes, sino un reto que se debería enfrentar desde diferentes frentes, incluida la investigación.

En este artículo reportamos la viabilidad del diseño e implementación de una secuencia de tareas que puede ser desarrollada con estudiantes con discapacidad visual. Resaltamos que el material manipulable es un recurso que ayuda a todos los estudiantes a manipular las figuras geométricas y cuestionarse acerca de sus propiedades.

Si bien es cierto que, haciendo uso del material y por medio del tacto, el estudiante logra trabajar el proceso de visualizar los objetos geométricos e identifica sus propiedades, también es cierto que se requiere de una mayor reflexión y un trabajo más profundo en torno a los procesos para confirmar sus ideas intuitivas, con la finalidad de construir conceptualizaciones que sean integrales. También queremos resaltar que el trabajo con el material 3D requiere que se ponga especial cuidado en aquellas características que no se heredan hacia las figuras, es decir, es necesario un cuidadoso proceso de abstracción de los conceptos en construcción, lo cual, en la secuencia, aparece en la actividad 6.

En cuanto a los procesos de definir y clasificar, se evidencia que los estudiantes le dan mayor valor a lo que perciben que a las definiciones. Específicamente, en las definiciones jerárquicas consideramos que los participantes tienen experiencias previas, las cuales se basan en una clasificación particional. Notamos que los estudiantes recurren a su memoria y a esas experiencias educativas, las cuales no les permiten aceptar o validar el cambio de definición.

Los estudiantes pueden realizar clasificaciones bajo distintos criterios, sean correctos o no, lo cual da cuenta del proceso de visualización de características similares en diferentes objetos. Además, cuando les decimos una característica, los estudiantes pueden señalar aquellas figuras que la cumplen. Sin embargo, no aceptan que dos figuras de distinta forma puedan tener una misma definición. Es decir, en este caso los estudiantes no logran construir (ni aceptar) una clasificación jerárquica.

Aunque en nuestra experimentación trabajamos exclusivamente con estudiantes con discapacidad en un ambiente no escolar (la persona que fungió como instructora no es profesora habitual de los participantes), asumimos que el material y el diseño de la secuencia promueven el trabajo en aulas inclusivas. A continuación, detallamos los argumentos para tal aseveración:

- ◆ El material puede ser utilizado por personas con y sin discapacidad visual.
- ◆ El material es ergonómico, de fácil manejo y seguro.
- ◆ La secuencia fue diseñada atendiendo a experiencias previas esperables, tanto escolares como extraescolares, aludiendo a una visualización basada en formas palpables y su abstracción como figuras planas a través de la exploración de sus características, pero también dicha visualización se puede realizar mediante el sentido de la vista.
- ◆ No se requiere de una preparación adicional (más allá de la relativa al lenguaje para dirigirse a los estudiantes con discapacidad visual) por parte del profesorado para poder gestionar las tareas. Incluso, los propios estudiantes pueden regular los detalles de la tarea apoyándose mutuamente.

Los elementos anteriores nos plantean el debate sobre si lograr la inclusión de personas con discapacidad puede provocar una visión que homogenice los procesos de aprendizaje y enseñanza soslayando las características particulares de

cada individuo, sobre todo de aquellos con necesidades educativas especiales. Siguiendo a Medina-García (2018), la inclusión permite precisamente el reconocimiento y atención de las necesidades educativas especiales. Asimismo, se espera que la inclusión se dé a partir del aprovechamiento de los esquemas compensatorios en tales casos (Vygotski, 1997). Al dar acceso a aulas regulares a personas con necesidades educativas especiales, sin buscar un involucramiento desde sus realidades se le conoce como integración y es descrito y criticado por diversos autores (e.g. Paldeliadu y Lampropoulou, 1997; Bleiklie, 2007; Damm, 2009).

Cabe señalar que el material que ha sido central en este artículo, al representar un segmento y un ángulo, nos permite el trabajo con diversos temas de la geometría plana que incluyan dichos elementos. Consideramos que sería pertinente utilizarlo para la enseñanza-aprendizaje de conceptos geométricos en edades tempranas ya que se evidencia que permite a los estudiantes visualizar las figuras y comparar unas con otras lo cual es una característica de los primeros estadios de comprensión geométrica (Van-Hiele, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1998). Pero también permite el análisis de características y la discriminación de propiedades para la construcción de definiciones y conceptos, propios de edades más avanzadas, sin soslayar que dichos desarrollos requieren de actividades adecuadas enfocadas en una reflexión y construcción de la geometría y no en una memorización de esta.

## REFERENCIAS

- Acevedo, J. y Camargo, L. (2011). El Tetris como mediador visual para el reconocimiento de movimientos rígidos en el plano (rotación y traslación). *Tecné, Episteme Y Didaxis: TED*, 32, 23-36. <https://doi.org/10.17227/ted.num32-1857>
- Aguilar, P. y Camacho, F.Y. (2019). Desarrollo de una aplicación móvil para el fortalecimiento de la memoria en personas con discapacidad visual. En F. J. Álvarez, M. A. Carreño, y J. A. Sandoval (Eds.). *Avances sobre reflexiones, aplicaciones y tecnologías inclusivas* (pp. 48-54). CONAIC.
- Asamblea General de las Naciones Unidas. (1948). *Declaración Universal de los Derechos Humanos* (Resolución 217 A (III)). [https://undocs.org/es/A/RES/217\(III\)](https://undocs.org/es/A/RES/217(III))
- Avendaño, C. y Díaz, J. (2014). The Educational Integration Process from the Perspective of Five Young College Students with Visual Disabilities from Concepción. *Estudios Pedagógicos*, 40(2), 27-44. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052014000300003>
- Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71. <http://hdl.handle.net/11162/28601>

- Baxter, P. y Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers. *The qualitative report*, 13(4), 544-559.
- Bleiklie, I. (2007). Systemic Integration and Macro Steering. *Higher Education Policy*, 20, 391-412. <https://doi.org/10.1057/palgrave.hep.8300166>
- Campo, J.E.F. (1996). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. Organización Nacional de Ciegos Españoles.
- Canchón, L. V. y González, L. (2018). *Geometría fuera de vista* [Tesis de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. <https://bit.ly/3lXZnJ5>
- Damm, X. (2009). Representaciones y actitudes del profesorado frente a la integración de niños/as con necesidades educativas especiales al aula común. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 3, 25-35.
- Escudero-Domínguez A. y Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276). SEIEM.
- Escudero, I. M., Gavilán-Izquierdo J. M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Relime*, 17(1), 7-32. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1711>
- Foody, G. M. (1988). The effects of viewing geometry on image classification. *International Journal of Remote Sensing*, 9(12), 1909-1915. <https://doi.org/10.1080/01431168808954989>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel Publishing.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*, 44, 25-34.
- Golding, J., Bretscher, N., Crisan, C., Geraniou, E., Hodgen J. y C. Morgan (Eds). (2018). *Research Proceedings of the 9th British Congress on Mathematics Education*. [www.bsrlm.org.uk/bcme-9/](http://www.bsrlm.org.uk/bcme-9/)
- Guillen, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, 16(3), 103-125.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. *Special Issue Elements of Geometry in the Learning of Mathematics*, 20(2-3), 27-46.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6a. ed.). Mcgraw-Hill.

- Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Educación Matemática*, 7(1), 63-75.
- Leikin, R. y Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 3, 62-73.
- Medina-García, M. (2018). *La educación inclusiva como mecanismo de garantía de la igualdad de oportunidades y no discriminación de las personas con discapacidad. Una propuesta de estrategias pedagógicas inclusivas* [Tesis de doctorado, Universidad de Jaén]. <http://hdl.handle.net/10953/>
- Niño, Á. y Vanegas F. (2013). Enseñanza de la geometría en población invidente y de baja visión. *Revista Científica*, 354-357.
- Paldeliadu, S. y Lampropoulou, V. (1997). Attitudes of special and regular education teachers towards school integration. *European Journal of Special Needs Education*, 12, 173-183. <https://doi.org/10.1080/0885625970120301>
- Papadaki, C. (2015). Working with visually impaired students: Strategies developed in the transition from 2D geometrical objects to 3D geometrical objects. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.). *Proceedings of the CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 564-570). Faculty of Education and ERME.
- Prado, M. P. (2013). *Dificultades y errores manifestados por estudiantes de 1º de E. S. O. durante el aprendizaje de Geometría Plana* [Tesis de máster, Universidad Pública de Navarra]. <https://bit.ly/3kMbecE>
- Renzulli, F. y Scaglia, S. (2007). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de EGB3 y futuros profesores de nivel inicial. *Educación Matemática*, 22(2), 3-19.
- Rotaache, R. A. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática*, 29(1), 171-199. <https://doi.org/10.24844/em2901.07>
- Roy, S. M. (2020). Social exclusion and discrimination of children with special needs. *Alochana Chakra Journal*, IX(V), 1601-1610.
- Samper, C., Echeverry, A. y Molina, O. (2013). *Elementos de Geometría: aprendizaje y enseñanza de la geometría* (2ª ed.). Editorial Universidad Pedagógica Nacional Fondo (Eds.). Universidad Pedagógica Nacional.
- Secretaría de Educación Pública (2018). *Aprendizajes clave para la educación integral*. Autor.
- Silva, L. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. <https://bit.ly/3m3GNiN>
- Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. En N. K. Denzin e Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (p. 443-466). Sage Publications Ltd.

- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, (12), 151-169.
- UNESCO. (1994). *Declaración de Salamanca y marco de acción para las necesidades educativas especiales*. UNESCO. <https://bit.ly/2AA6K3B>
- Van-Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Velasco, I. y Montes, E. (2013). Propuesta para la enseñanza del álgebra geométrica a estudiantes con discapacidad visual, a través de la adaptación de material inclusivo. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 291-298). Universidad Pedagógica Nacional.
- Villiers, M. de (1986). *The role of axiomatization in mathematics and mathematics teaching*. University of Stellenbosch. <https://bit.ly/3dxQcbd>
- Villiers, M. de (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, 14(1), 11-18.
- Villiers, M. de (1998). To teach definitions in geometry or teach to define. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 248-255). University of Stellenbosch.
- Vygotski, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología*. Obras Escogidas V. Visor Dis.

Lisset D. González-Salazar  
Benemérita Universidad Autónoma  
de Puebla  
[lissetgonzalez2019@gmail.com](mailto:lissetgonzalez2019@gmail.com)

Erick Flores-Medrano  
Benemérita Universidad Autónoma de  
Puebla  
[eric.floresmedrano@correo.buap.mx](mailto:eric.floresmedrano@correo.buap.mx)

Recibido: 18/05/2021. Aceptado: 09/07/2021

doi: 10.30827/pna.v16i1.21240



ISSN: 1887-3987