ERRORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN INICIAL AL RESOLVER UNA TAREA DE MODELIZACIÓN

Este trabajo describe los errores que han puesto de manifiesto un grupo de 27 estudiantes de la especialidad de Matemáticas del Máster de Formación de Profesorado de Secundaria en una tarea de modelización. A partir de la revisión de los antecedentes, se establece un sistema de categorías de los errores en las distintas fases del proceso de modelización y la coherencia entre las mismas. El análisis de los resultados muestra mayor frecuencia de errores en las fases en las que interviene la situación real original: la fase simplificación para obtener el modelo real y la fase de validación para interpretar los resultados obtenidos. Los tipos de errores manifestados aportan información para la formación de los futuros profesores de matemáticas.

Términos clave: Enseñanza de la modelización; Errores; Formación Inicial; Modelización

Errors of pre-service mathematics teachers solving a modelling task

This work describes the mistakes that a group of 27 students of the Mathematics speciality of the Master's Degree in Secondary Teacher Training have revealed in a modelling task. Based on the literature review, a system of mistake categories is established in the different phases of the modeling process and the coherence between them. The analysis of the results shows a higher frequency of errors in the phases in which the original real situation intervenes: the simplification phase to obtain the real model and the validation phase to interpret the results obtained. The types of mistakes reported provide information for the training of future mathematics teachers.

Key Words: Mistakes; Modelling; Teaching Modeling; Teacher Training

Moreno, A., Marín. M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA 15*(2), 109-136.

La modelización matemática es una estrategia metodológica que permite a los docentes establecer un puente entre las matemáticas escolares y la resolución de problemas reales (OCDE, 2013). A partir de la traducción de problemas reales al mundo matemático el estudiante percibe la aplicabilidad de las matemáticas, y adquiere estos conocimientos como herramientas para su uso fuera del aula.

Distintos autores (Blum et al., 2007; Blum y Niss, 1991) coinciden en que la modelización matemática es el conjunto de traslaciones entre la realidad y las matemáticas. La realidad la entenderemos, como señala Pollak (1979), como el resto del mundo fuera de las matemáticas incluyendo la naturaleza, la sociedad, la vida diaria y otras disciplinas científicas.

Los currículos escolares internacionales reflejan este interés por la modelización matemática e incorporan esta temática (Lingefjärd, 2006). Los Principios y Estándares para la Educación Matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) incluyen la resolución de problemas y las conexiones entre las matemáticas y las ciencias, a partir de la modelización de fenómenos físicos. Esta competencia está vinculada con otras competencias matemáticas como leer y comunicar, diseñar y aplicar estrategias de resolución de problemas o trabajar matemáticamente (Niss, 2003).

Blum (2015) distingue cuatro grupos de justificaciones para la inclusión de la modelización matemática en los currículos: justificación pragmática, formativa, cultural y psicológica. Para el primer grupo, la modelización matemática permite comprender y dominar situaciones del mundo real. Las justificaciones formativas mantienen que el trabajo con tareas de modelización permite desarrollar la competencia modelizar y argumentar. Por otro lado, algunos currículos justifican culturalmente la introducción de la modelización resaltando que las relaciones con la realidad son indispensables para una imagen adecuada de las matemáticas como una ciencia en sentido integral. Otro grupo de currículos, aludiendo a razones psicológicas, mantienen que los ejemplos del mundo real contribuyen a aumentar el interés de los estudiantes por las matemáticas, estructurar el contenido matemático, entenderlo mejor y conservarlo por más tiempo.

Verschaffel et al. (2010), consideran que es necesario prestar atención a las concepciones que los profesores tienen sobre la modelización, la manera en que implementan estos procesos y la manera en la cual establecen conexiones entre las matemáticas escolares y situaciones de la realidad. Por su parte, Escudero-Ávila et al. (2015), consideran que se requiere por parte del profesor de matemáticas conocer el contenido y la razón de ser de ese contenido como objeto de enseñanza, además de manejarlo y trabajarlo matemáticamente. Esto a su vez, plantea una necesidad investigativa para profundizar sobre los dominios que caracterizan el conocimiento que poseen los docentes de matemática, particularmente sobre modelización. Pues según Hein y Beimbengutt (2006) la principal dificultad que presenta la modelización para ser implementada en el aula se centra en la formación de los profesores sobre este tema.

En este sentido, es necesario que el profesor de matemáticas en formación tenga acceso a experiencias de modelización que le brinden una variedad de herramientas, contextos y experiencias reflexivas con esta competencia que le permitan desarrollar prácticas de enseñanza con la modelización (Blum, 2015; Doerr, 2007; Niss et al., 2007). Esas actividades tienen que incluir conocimientos sobre qué es el modelo matemático, cómo puede incorporarse en las lecciones de los profesores y cómo evaluar las actividades de modelización (Gastón y Lawrence, 2015).

La incursión de la modelización matemática en los currículos, las diversas investigaciones en modelización y el desarrollo de una variedad de cursos de modelización matemática insertados en la formación inicial de profesores ha motivado a los investigadores a estudiar las actividades de modelización presentadas en ellos (Villarreal et al., 2018).

Por otro lado, la valoración de los errores matemáticos en los que inciden los estudiantes permite obtener un diagnóstico oportuno sobre la manera en que emplean el pensamiento matemático al enfrentarse a un ejercicio (Rico, 1995). Este autor afirma que el error es una parte importante del aprendizaje de las matemáticas, ya que conociendo cómo interpretarlos, podríamos señalar las posibles deficiencias y dificultades en el aprendizaje de la materia. Socas (1997) además señala que también puede ayudar al docente a comprender la forma en que sus estudiantes interpretan los problemas matemáticos a los que se afrontan en la asignatura.

Sin embargo, el International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME) de 2014 concluyó que la modelización matemática no era una parte esencial en los programas de formación inicial y continua de los docentes.

Las líneas abiertas de investigación proponen avanzar en la conceptualización de la modelización matemática y su interpretación y aplicación al abordar problemas reales (English et al., 2016).

El objetivo de este trabajo es analizar los errores cometidos en una tarea de modelización por estudiantes del máster de formación del profesorado de secundaria especialidad en Matemáticas. El sistema de categorías se establece a partir de la revisión de los antecedentes.

ANTECEDENTES

Investigadores como Biembengut y Faria (2011), Kaiser et al. (2010) y Zeytun et al. (2017) han trabajado en la descripción del conocimiento de docentes, particularmente en identificar dificultades, avances e incluso detectar fases de modelización en profesores en formación y en servicio. Entre los principales resultados se encontraron con dificultades no sólo en la comprensión de las situaciones de modelización, sino en determinar la relación entre la situación de modelización y el conocimiento matemático requerido para su solución. Kaiser et al. (2010), además, hallaron que los futuros docentes efectivamente contaban con conocimiento sobre modelización en diversos niveles, sin embargo, la mayoría no consideraba en el proceso de modelización la fase de validación del modelo. Zeytun et al. (2017) determinaron, además, que sólo algunos docentes utilizaron el contexto original para verificar sus resultados.

Anhalt y Cortez (2016) trabajaron con futuros maestros de matemáticas que asistían a un curso de modelización matemática dentro de un programa de educación matemática. Los futuros profesores mostraron conceptos erróneos sobre lo que es la modelización matemática. Este trabajo desvela que ampliaron y profundizaron su comprensión conceptual de la modelización matemática disipando los conceptos erróneos que tenían.

La comprensión de la modelización matemática es compleja. Widjaja (2013) trabajó con profesores en formación de Indonesia y analizó el trabajo de un pequeño grupo de estudiantes para profesor con una tarea abierta de modelización relacionada con su vida diaria. Tras el análisis de los modelos propuestos, el estudio identificó dificultades de los maestros de matemáticas en formación para identificar las variables que intervenían en sus modelos y las limitaciones que mostraban para validarlos. En el mismo sentido, el trabajo de Villarreal et al. (2015) realizado en Argentina con estudiantes para profesor de matemáticas en el contexto de un curso para educación matemática evidencia que, aunque la creación de escenarios de modelización fomentaba la reflexión sobre el papel de los profesores en esos escenarios, la libre selección de temas no matemáticos al iniciar un proyecto de modelización era un obstáculo para los maestros en formación, aunque luego fuese superado.

La investigación de Crouch y Haines (2007) se centra en estudiantes de enseñanzas superiores. Estos estudiantes ya han trabajado anteriormente con ejemplos de modelización matemática, por lo que no son novatos en este tipo de tareas. Sin embargo, tampoco son expertos y se encuentran limitados por sus capacidades a la hora de organizar y establecer un modelo en un contexto. Organizan los errores y dificultades encontradas en torno a cuatro ideas:

- No mantener coherencia entre el mundo real y el modelo matemático. Muchos estudiantes tienden a dar unos valores inapropiados a los parámetros considerados o utilizar unidades de magnitud incoherentes con el modelo. Esto demuestra la dificultad de muchos estudiantes para mantener la conexión entre el problema que se plantea en el mundo real y el modelo matemático.

- Aplicar un modelo inapropiado. Esta categoría está destinada a los errores que cometen los alumnos debido a no identificar correctamente el modelo a aplicar en ese contexto. En este caso se aprecia una clara ruptura entre el mundo real y el modelo matemático.

- Desarrollo inapropiado de los conceptos y/o procedimientos matemáticos. En esta categoría entran tanto los despistes de los estudiantes, sus intentos por estimar parámetros que se pueden calcular, no dar justificación matemática a las respuestas y realizar mal los cálculos. Este tipo de errores los autores los atribuyen a las prisas que puedan tener los estudiantes por encontrar una respuesta rápida.

- No enlazar el modelo apropiadamente con el problema del mundo real. Esta categoría está destinada principalmente al error de los estudiantes al considerar que la tarea de modelización finaliza cuando se termina de resolver el modelo matemático. No se da por tanto una reflexión ni unos resultados sobre el problema real.

En la investigación de Socas et al. (2016) el mayor número de errores cometidos se deben a dejar incompleta la resolución del proceso de modelización y porque solo representan gráficamente la situación. Muchos de ellos consideran que faltan datos a la hora de afrontar el problema. Una gran cantidad de alumnos responden sin buscar una razón lógica o no han sido lo suficientemente persistentes como para buscar una estrategia para resolverlo.

En Anaya et al. (2006) se han detectado y analizado las dificultades de los estudiantes de ingeniería en el diseño de estrategias para la modelización de situaciones. En particular se ha puesto el foco en la formulación del modelo, la elección de las representaciones internas y las interacciones asociadas entre el modelo matemático y la situación-problema real. Destacan la dificultad para establecer el modelo al buscar qué conocimiento matemático de entre los que poseen se adapta mejor a la situación que se plantea y buscar correctamente las herramientas matemáticas que puedan ser adecuadas. En aquellos casos sin experiencia en problemas de modelización, no se establece ningún tipo de control para analizar la interacción entre el modelo y la situación real.

La formación previa de los futuros profesores de matemáticas (FPM) los presupone como expertos en modelización, más allá de noveles o modelizadores intermedios en términos de Crouch y Heines (2007), si bien puede que no hayan recibido formación específica sobre el propio proceso de modelización.

MARCO TEÓRICO

A continuación, se matizan los fundamentos teóricos relativos al proceso de modelización y a los errores.

El proceso de modelización

La modelización matemática es un proceso complejo, puesto que, tal y como lo evidencia Niss (2012), intervienen aspectos como el sentido de realidad, el concepto de modelo, modelo matemático, ciclo de modelización y competencias de modelización, entre otros.

Blomhøj (2004) considera como modelo matemático una relación entre objetos matemáticos y sus conexiones con una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Biembengut y Hein (2004) lo establecen como un conjunto de relaciones y símbolos vinculados a cualquier rama de las matemáticas, en donde el tipo de conocimiento que se desarrolla en dicha rama genera instrumentos sustanciales para las aplicaciones matemáticas.

Gómez y Rico (2002) por su parte, denominan modelo a una terna (estructura, fenómeno, relación) en la que "la estructura expresa el fenómeno de acuerdo con el establecimiento de una relación en la que se identifican aquellas características estructurales del fenómeno que se pueden representar con conceptos y propiedades de la estructura en cuestión" (p.39).

A partir de estas definiciones, se entenderá modelo matemático para este trabajo, como una terna en la que interviene el fenómeno de naturaleza no matemática, una relación matemática en la cual intervienen objetos matemáticos (conceptos y propiedades) y sus conexiones que representan características estructurales del fenómeno. Al proceso de obtención de un modelo matemático se le llama modelización matemática.

El proceso de modelización no es inmediato, sino que demanda de manera implícita o explícita un recorrido en el establecimiento de relaciones y conexiones entre una situación real y una idea matemática. Este recorrido ha sido ampliamente discutido, analizado y estructurado, y depende en gran medida de la perspectiva que se establezca de realidad, de modelo y de modelo matemático.

La modelización se puede definir en términos de los objetivos subyacentes a su implementación. Kaiser y Sriraman (2006) establecen varias visiones que predominan en las discusiones internacionales sobre modelización: (a) Realista, cuyo objetivo central es resolver problemas del mundo real, entender el mundo real y la promoción de competencias de modelización; (b) Modelización contextual, la cual se relaciona a temas y objetivos psicológicos en la resolución de problemas; (c) Modelización Educativa cuyo propósito es pedagógico; (d) Modelización Socio-crítica, la cual se centra en objetivos pedagógicos pero con una crítica comprensión del entorno, esta perspectiva ha tenido principalmente un carácter de emancipación; finalmente, la Modelización epistemológica o teórica cuyo objetivo es el desarrollo o promoción de teorías.

De esta manera, nuestro estudio se ubica en un proceso de modelización educativa, en la que buscamos caracterizar los errores cometidos por docentes en formación al transitar desde un fenómeno o situación real a un modelo matemático. Morgan y Morrison (1999) afirman que el aprendizaje de los procesos de modelización matemática requiere estudiar cuatro cuestiones básicas: la construcción del modelo, examinar cómo funciona, qué representa y cómo aprendemos de él. De ahí que nuestro estudio investigue sobre las respuestas que, a estas cuestiones, dan los futuros profesores que tendrán la responsabilidad de promover el aprendizaje del proceso de modelización.

La mayor parte de los autores coinciden en un esquema de diferentes fases del proceso de modelización a partir del esquema de modelización propuesto por Blum y Niss (1991): (a) análisis del problema real, (b) simplificar el problema real, (c) matematizar, (d) resolver el problema matemático, (e) interpretar las soluciones obtenidas, (f) reflexión de los resultados y validación del proceso, y (g) presentación de las conclusiones.

Nuestro trabajo se centra en las siguientes fases en el ciclo de modelización que aparece en la figura 1.

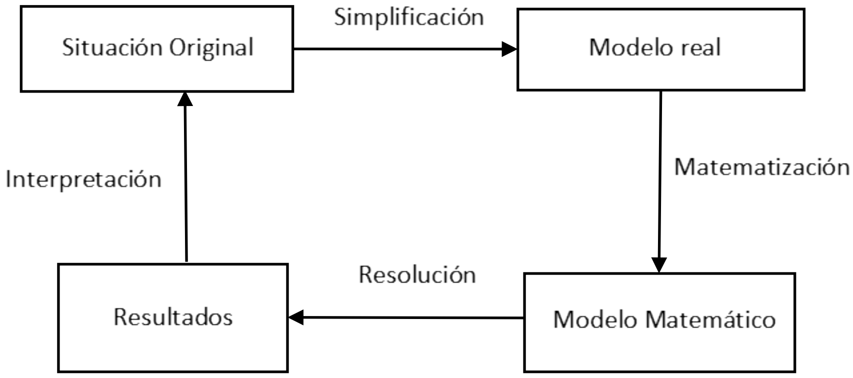


Figura 1. *Proceso de modelización adaptado de Blum y Niss (1991)*

La situación original o situación real es un extracto de un fenómeno real que pertenece a una realidad compleja y abierta. La transición de la situación original al modelo real depende del estilo de pensamiento de cada individuo. Esta transición se refiere a las simplificaciones inconscientes que se dan del problema, al establecimiento de ciertas hipótesis implícitas de la realidad, es decir, el individuo en esta fase toma decisiones que influyen la manera en la cual filtrará la información dentro del problema (Rodríguez, 2010).

El modelo real se establece sobre la base de representaciones externas del problema elaboradas por el individuo (Blum y Leiβ, 2007). En esta fase se precisan las variables, las reglas o supuestos que rigen el fenómeno, condiciones o hipótesis, todo en lenguaje natural, describiendo el comportamiento general del problema. La mayoría de autores coinciden en establecer esta fase previa al modelo matemático y algunos la han denominado estado de gestación (Cross y Moscardini, 1985), modelo empírico (Ríos y García, 1995) o modelo real (Blum, 2002; Blum y Niss, 1991; Ramos-Rodríguez et al., 2014; Gómez y Rico, 2002).

Para pasar a la siguiente fase, el sujeto debe "matematizar", esto es, traducir el modelo real en términos matemáticos para llegar a un modelo útil en la resolución del problema.

Según Blum y Niss (1991), el modelo real es matematizado, es decir, sus datos, conceptos, relaciones, condiciones y supuestos son trasladados a la matemática; así resulta un modelo matemático de la situación original. El modelo matemático, como fase del proceso de modelización establece relaciones o formalismos matemáticos que representan las propiedades e hipótesis del modelo. Dentro de esta fase, se incluye la escritura, en lenguaje matemático, de las relaciones establecidas entre las variables dadas por el problema. Esta fase, al ser de abstracción, su referencia a la realidad es menor. La fase de resultados, involucra una devolución a la situación real que permita validar e interpretar dichos resultados a partir de la situación originalmente planteada.

Errores en la modelización de problemas reales

En este trabajo se definen los errores en matemáticas como “intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (Matz, 1980, p. 94). Socas (1997) sitúa el origen del error en la modelización matemática en tres focos diferentes:

- Obstáculo. El alumno no cuenta con las herramientas matemáticas necesarias que están implicadas en la resolución del problema.
- Ausencia de sentido. El alumno o bien no es capaz de traducir el problema o los resultados obtenidos del problema matemático no tienen sentido en el mundo real.
- Actitudes afectivas y emocionales. Los errores o dificultades cometidos por los estudiantes están causados por despistes o falta de motivación.

GroBe (2014), en un análisis de las dificultades con problemas reales, señala los siguientes aspectos como origen de esas dificultades: (a) los estudiantes no manejan adecuadamente los conceptos matemáticos subyacentes al problema, encuentran muchas dificultades al plantear problemas matemáticos derivados del problema real porque no tienen herramientas o conocimiento para afrontarlos; (b) dificultades a la hora de extraer información relevante de la situación planteada. En este aspecto también coincide con los trabajos de Crouch y Haines (2007) y López et al. (2017), quienes señalan que los estudiantes que afrontan por primera vez un proceso de modelización no están acostumbrados a dedicar el tiempo suficiente en la primera fase para establecer el modelo real; y (c) que los estudiantes pueden verse abrumados por la cantidad de fases en un proceso de modelización, ya que en líneas generales están acostumbrados a realizar tan solo ejercicios de repetición de ciertos procesos

Como consecuencia de todo lo anterior, cuando el modelador se enfrenta al proceso de modelización de un problema real, tiene que tomar decisiones sobre las variables más relevantes a considerar en el problema real, así como las restricciones y supuestos para elaborar el modelo real. El modelador deberá establecer también las relaciones entre esas variables para establecer el modelo matemático y emplear las propiedades y herramientas matemáticas para trabajar en él. Finalmente, la solución obtenida debería ser validada y evaluada en el contexto del problema real estableciendo los límites de validez del modelo matemático empleado. Todos y cada uno de estos momentos se constituye en una dificultad para quiénes modelizan un problema real con independencia de la mayor o menor experiencia en modelización. En el caso de futuros profesores de matemáticas, que tendrán que desarrollar la competencia de modelización en sus estudiantes, cabe preguntarse: ¿cuáles son los principales errores cometidos al modelizar una situación real? ¿En qué fase del proceso de modelización se concentran esos errores?

Metodología

Esta investigación sigue una metodología descriptiva y exploratoria según la definición de Sampieri et al. (2014) y por tanto, el estudio de los datos será cualitativo. La fuente en la que se basa la investigación la forman las producciones escritas de los sujetos participantes del estudio. Este se centra en analizar de forma cualitativa los errores identificados en futuros profesores de matemáticas de Secundaria en una tarea que involucra un proceso de modelización.

El estudio se desarrolló con 27 estudiantes del Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato de la especialidad de Matemáticas. Para acceder a este máster, es necesario que tengan una titulación en la que las Matemáticas tienen un papel relevante. Así, tienen acceso a este máster los graduados en Matemáticas, en Física y también Ingenieros.

Estos estudiantes FPM no habían recibido formación previa en el máster sobre el concepto de modelización. Se toma como instrumento un cuestionario con la siguiente tarea:

> *"Se quiere colocar un parque de bomberos para cubrir las necesidades de tres pueblos. ¿Dónde situarías el parque de bomberos?". Primero, describe las decisiones que vas a tomar y el procedimiento que vas a utilizar para resolverlo.*

La tarea fue presentada en una situación de clase donde los estudiantes interpretaron la resolución del cuestionario utilizado como parte de una tarea de clase. Una vez realizada se analizaría el trabajo realizado con el fin de aprender sobre las diferentes fases del proceso de modelización y confrontar sus dificultades con las esperadas en sus futuros estudiantes. La elección de la tarea se justifica atendiendo a las cuatro fases mostradas en la figura 1. Se presenta una situación original que no suele ser abordada en los contenidos curriculares, si bien para su resolución necesita únicamente de conocimientos de geometría básicos (Liébana et al., 2018). Para reconocer el modelo real es necesario simplificar distintas condiciones particulares relativas a restricciones geográficas, infraestructuras, economía, etc. El proceso de matematización requiere formular matemáticamente la función objetivo y las restricciones correspondientes para constituir el modelo matemático. En caso de querer minimizar el tiempo necesario para acudir desde el parque de bomberos a cualquier incendio en los pueblos, la resolución requiere de un estudio de condiciones geométricas asociadas a los puntos notables de un triángulo, más allá de estudiar los mínimos locales de una función (Liébana et al., 2018). Finalmente, en la interpretación se presta a discutir la validez de la solución atendiendo al tipo de triángulo que forman los tres pueblos, puesto que varía en el caso de los obtusángulos o cuando los tres puntos están alineados. En los casos acutángulos, el punto que minimiza la máxima distancia del parque a los tres pueblos es el circuncentro, mientras que en los obtusángulos se alcanza en el punto medio del lado mayor. Cuando los tres puntos están alineados, la solución se sitúa en el punto medio de los extremos.

Previo a la resolución de la tarea, los estudiantes tenían que redactar las decisiones que tomaban para resolverla y describir el procedimiento que iban a llevar a cabo. Los sujetos dispusieron de dos horas para la realización de la tarea de forma individual, sin recibir ningún tipo de información más allá del enunciado de la tarea.

Analizamos las respuestas escritas como solución a una tarea de modelización. El análisis no se realiza en términos de rendimiento en comparación con una solución determinada, sino en la coherencia de los modelos presentados y los pasos del proceso de modelización. La unidad de análisis es la respuesta completa al cuestionario y para el análisis se diseña un sistema de categorías sobre los errores recogidos en la literatura de investigación que se describe a continuación.

Sistemas de categorías

Se ha elaborado un sistema de categorías a priori basado en el análisis de los modelos de modelización y en la revisión de antecedentes. Estos últimos señalan principalmente cuatro competencias entorno a las cuales vamos a organizar los errores: simplificar, matematizar, resolver e interpretar.

En este sistema de categorías se han seguido los trabajos de Crouch y Haines (véase por ejemplo, Crouch y Haines (2007)), según los cuales no siempre los errores se pueden identificar con etapas específicas del ciclo de modelización, sino que a menudo se refieren a la transición entre dos o más etapas: por ejemplo, pasar del mundo real al modelo, especificar el modelo, elegir variables, construir ecuaciones, mover de las matemáticas al mundo real. Como señala Galbraith (2007), los procesos que involucran transiciones entre el mundo real y el matemático son especialmente difíciles para los estudiantes.

Las categorías se construyen teniendo como referencia las fases del proceso de modelización vistas anteriormente. Los valores de las categorías son fruto de las investigaciones previas sobre errores y dificultades a la hora de modelizar problemas reales. De este modo se construye el siguiente sistema de categorías:

1. Error de simplificación. La primera competencia en el proceso de modelización es la de simplificar el problema real para construir un modelo real. Aquí se incluyen los errores que se producen en el reconocimiento y comprensión del problema real y su paso al modelo real. Establecemos los siguientes valores para esta categoría:

   1.1. Modelo real incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la realidad: No se identifican las variables del modelo, se considera que faltan datos, se establece un análisis parcial de las variables del modelo o no se considera toda la información dada en el problema inicial.

   1.2. Modelo real incompleto por incoherencias en las relaciones entre los elementos de la realidad considerados: Se muestran incoherencias en las suposiciones respecto a la decisión tomada o búsqueda del procedimiento más fácil provocando un modelo incompleto.

   1.3. No elabora una función objetivo para el modelo real que después pueda ser expresada en términos matemáticos.

   1.4. No construye un modelo real

2. Errores en el proceso de matematización. Se trata de errores cometidos cuando se aplica un modelo matemático inapropiadamente respecto al modelo real. Establecemos los siguientes tres valores para esta categoría:

   2.1. Modelo matemático incoherente con el real: No se estructura bien el proceso de modelización, se utiliza un modelo incorrecto que no se ajusta al problema real o no se justifica la utilización del modelo elegido.

   2.2. Modelo matemático incompleto: Utilización de un modelo que se ajusta, pero está incompleto porque no se consideran diferentes elementos del modelo real.

   2.3. No construye ningún modelo matemático

3. Errores en el proceso de resolución. Desarrollo inapropiado de los conceptos y/o procedimientos matemáticos.

   3.1. Errores conceptuales: falla en relación con el objeto o foco matemático asociado.

3.2. Errores de procedimiento en los cálculos

3.3. Resuelve de manera incompleta el modelo matemático propuesto.

4. Error en la fase de interpretación o validación. Errores en la reflexión final sobre el modelo. Se distinguen los siguientes casos:

4.1. Los resultados obtenidos no se interpretan en base al modelo real propuesto.

4.2. No se reconocen las limitaciones del modelo matemático en la situación original.

La tabla 1 organiza las categorías definidas a priori.

Tabla 1

Sistema de categorías de errores en el proceso de modelización

Categoría	Valores de la categoría
Error de simplificación	Modelo real incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la realidad Modelo real incompleto por incoherencias en las relaciones entre los elementos de la realidad considerados No se elabora una función objetivo para el modelo real No construye un modelo real
Error de matematización	Modelo matemático incoherente con el real Modelo matemático incompleto No se construye un modelo matemático
Error de resolución	Errores conceptuales Errores procedimentales Resolución incompleta
Error de interpretación	No se interpretan los resultados No identificar o plantear posibles limitaciones del modelo

Descripción y discusión de resultados

El análisis de los resultados se ha llevado a cabo a partir de las respuestas de los estudiantes al problema de modelización entregado. Para proteger la identidad de los estudiantes, se hará referencia a las respuestas con la letra A seguida de un número, este número corresponde al orden en el que se han presentado las respuestas y su único propósito es el de enumerarlas. De este modo, por ejemplo, se hará referencia a la respuesta del quinto alumno o alumna como la respuesta A5. El análisis se realiza de manera independiente por dos de los investigadores, que posteriormente triangulan los resultados consensuando con un tercer investigador en los casos con diferente interpretación. No fue necesario incluir ninguna categoría a posteriori para completar el listado inicial.

La clasificación de las respuestas puede verse en la tabla 2. Antes de describir los resultados correspondientes a cada una de las categorías, se destacan varios aspectos relativos a una visión global de las respuestas.

Salvo cuatro estudiantes (A9, A20, A21, A22) que cometen errores en las fases de simplificación, matematización y validación pero no en resolución, todos los estudiantes analizados cometen algún tipo de error en todas las fases del proceso de modelización. Interpretamos este bajo rendimiento desde una doble perspectiva. Por un lado, en cuanto a la resolución matemática, el problema les resultó complejo. Aunque los FPM se mostraron familiarizados con los problemas de optimización basados en el cálculo de derivadas, mostraron poca disposición para abordar el problema aplicando propiedades geométricas conocidas, especialmente la equidistancia de los puntos de la mediatriz a los extremos de un segmento. Por otro lado, mostraron estar poco familiarizados con los procesos de modelización, especialmente con el proceso de trasladar la situación original a un modelo real y validar las soluciones.

Los errores cometidos con mayor frecuencia se corresponden, en este orden, a las fases de validación y simplificación, que son las fases en las que interviene la situación original. Todos los estudiantes manifiestan el error en la fase de validación relativo a no reconocer las limitaciones del modelo y, salvo dos estudiantes (A21 y A27), no interpretan los resultados obtenidos en base al modelo real propuesto. En la fase de simplificación, 20 de los 27 estudiantes presentan un modelo real incompleto asociado a la falta de consideración de elementos de la realidad. Cometieron menos errores en las fases de matematización y resolución, lo que muestra que una vez determinado el modelo matemático, aunque fuese de una manera incompleta, les resultaba más familiar el proceso de modelización en las fases correspondientes al mundo matemático.

Tabla 2

Errores cometidos por FPM en cada categoría

	Simplificar				Matematizar			Resolver			Validar	
	1.1	1.2	1.3	1.4	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2
A1		X			X			X			X	X
A2			X				X	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A
A3	X				X			X		X	X	X
A4				X	X					X	X	X
A5	X	X			X					X	X	X
A6	X	X				X				X	X	X
A7		X			X					X	X	X
A8	X	X				X		X			X	X
A9	X		X			X					X	X
A10	X	X				X				X	X	X
A11	X		X			X				X	X	X
A12	X	X				X				X	X	X
A13	X	X				X				X	X	X
A14	X					X				X	X	X
A15				X		X		X		X	X	X
A16				X		X		X			X	X
A17	X		X			X		X			X	X
A18	X	X				X				X	X	X
A19	X	X					X			X	X	X
A20	X			X		X					X	X
A21	X			X		X						X
A22	X	X			X						X	X
A23	X	X					X			X	X	X
A24	X	X				X				X	X	X
A25		X					X			X	X	X
A26	X	X			X			X			X	X
A27	X	X				X		X				X
Total	20	16	4	5	7	16	4	8	0	16	24	26
%	74	59	15	19	26	59	15	30	0	59	89	96

Nota: N/A: No Aplica, porque el estudiante no responde a este apartado

Error de simplificación

Los errores cometidos en el proceso de simplificación se debieron principalmente a presentar un modelo real incompleto, bien por no considerar determinados elementos de la realidad (74%) y/o manifestar incoherencias en las relaciones de los elementos considerados (59%). En este sentido, algunos estudiantes mostraban de manera intuitiva la relevancia en el problema de variables asociadas a la distancia entre los pueblos, la extensión, número de habitantes, etc., pero eran incoherentes o imprecisos al establecer relaciones entre ellas, como por ejemplo en estas dos respuestas:

> A1: *Más próximo al pueblo con mayor número de viviendas habitadas, pero no exactamente en él para que no se encuentre excesivamente alejado de los otros.*
>
> A6: *Saber cuál de los tres pueblos tiene más habitantes y extensión, consideramos el que más tenga, será el que necesitará más servicios.*

Una vez que determinaban las variables y sus relaciones en el modelo real, no presentaron muchas dificultades para enunciar, de manera verbal, la función objetivo del problema, siendo únicamente cuatro estudiantes (A2, A9, A11 y A17) los que no llegaron a elaborar una función objetivo para el modelo real que después expresaron en lenguaje matemático.

> A2: *Tengo que tener en cuenta lo siguiente: las posiciones de los pueblos, las carreteras que unen los pueblos, el tráfico de dichas carreteras. Obtener la información que necesito para poder tomar la mejor decisión.*

Cinco estudiantes (A4, A15, A16, A20 y A21) no construyen el modelo real, es decir no llegan a simplificar las numerosas variables, restricciones o criterios que intervenían en la situación original. Aunque aludían a determinadas variables a considerar en sus decisiones para resolverlo, no las tenían en cuenta en el procedimiento para construir el modelo, como se ejemplifica en la siguiente respuesta:

> A4: *Decisiones: Ver la población de cada pueblo y la distancia entre estos pueblos. Estudiaría el índice de incendios en cada pueblo (si es proporcional a la población). Procedimiento: Sería colocar el parque de bomberos lo más cercano a la mayoría de la población, y en caso de que una minoría (en un pueblo muy pequeño) esté muy alejado intentar "mediar" la situación, es decir, alejarlo un poco de la mayoría de la población intentando que esta minoría no quede muy discriminada.*

Estos resultados muestran que, en el problema planteado, los FPM analizados han mostrado dificultades para simplificar la situación original y construir el modelo real, principalmente por hacerlo de un modo incompleto, no teniendo en cuenta variables relevantes o no estableciendo relaciones entre ellas para elaborar un modelo útil y manejable. Ha sido frecuente que los estudiantes mostrasen inconsistencias o incoherencias en estas relaciones, como plantear procedimientos no factibles:

> A24: *Colocaremos el parque de bomberos teniendo en cuenta la población de cada uno de los tres pueblos. Lo colocaremos de forma proporcional a la población más cerca del pueblo que tenga mayor población, después del segundo que tenga más población y, finalmente, estará más lejos del pueblo con menos población (intentando que esté lo más cerca posible de los tres pueblos, dentro de que cumpla lo anterior).*

En cambio, han sido menos frecuentes los errores relativos a plantear la función objetivo a optimizar sobre el modelo real construido, aunque sea de manera incompleta. Esta situación pone de manifiesto que mayoritariamente los estudiantes no estaban familiarizados con la fase de modelización correspondiente a la simplificación, siendo frecuente que directamente aludieran al modelo matemático sin considerar las variables a tener en cuenta ni restricciones y priorizando la utilización directa de un contenido escolar para resolver el problema, como evidencia esta respuesta únicamente basada en la obtención de un punto notable:

> *A21: El parque ha de estar a igual distancia de los tres pueblos. Desde un punto de vista geométrico, podemos calcular el circuncentro de un triángulo, donde los vértices son cada uno de los pueblos.*

Error de matematización

En relación con el proceso de matematización, los estudiantes han cometido errores principalmente por elaborar un modelo matemático incompleto (59 %). El resto, o bien ha presentado un modelo matemático incoherente con el real (26%), o no ha conseguido construir dicho modelo (15%).

Se han evidenciado dos motivos principales para presentar un modelo incompleto: (a) utilizan un modelo que se ajusta, pero que no considera todos los casos posibles. Por ejemplo, es el caso de aquellos estudiantes que utilizan como criterio la equidistancia, pero no consideran la situación de que los tres puntos estén alineados (figura 2); y b) no llegan a completar el modelo por falta de concreción en las condiciones planteadas en el modelo real, como es el caso de A8 que no termina de definir cómo sería la relación de proporcionalidad inversa que propone.

> A8: *Lo más importante que hay que tener en cuenta son dos aspectos: el número de habitantes de cada pueblo y la distancia entre el parque de bomberos y los pueblos. Teniendo en cuenta lo anterior, la probabilidad de que los bomberos tenga que intervenir en un pueblo es directamente proporcional al número de habitantes de ese pueblo. Por tanto, la distancia del parque de bomberos (a los pueblos) será inversamente proporcional.*

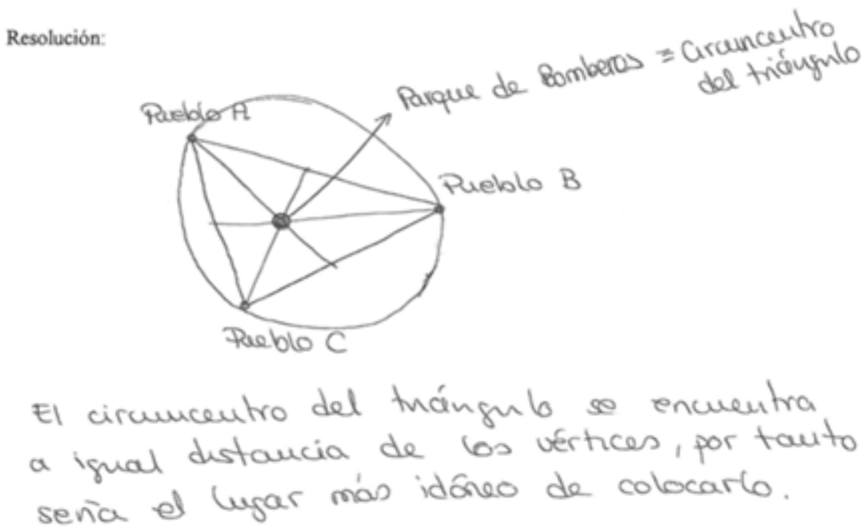


Figura 2: *Respuesta de A21*

En cuanto a las incoherencias entre los modelos, aparecen situaciones en las que no se consideran en el modelo matemático variables o condiciones que habían subrayado en el modelo real o aparecen desajustes entre ambos modelos, como se ejemplifica en la siguiente respuesta:

> *A7: Decisiones para resolverlo: Hay que tener en cuenta el número de habitantes, la distancia entre pueblos y tiempo que se tarda en llegar a ellos. Reducir tiempos de llegada.*
>
> *Procedimiento para resolverlo: Colocarlo más cerca del pueblo más habitado, teniendo en cuenta que el tiempo para llegar al siguiente más habitado sea un poco mayor que el primero y un poco menor que el tercero.*

Una vez analizados los errores relativos a la matemátización, se evidencia que el problema planteado ha resultado complejo en tres aspectos principales: (a) la presencia de numerosas variables y sus relaciones se tradujo en que los FPM tuvieran dificultades para traducirlas a lenguaje matemático, manifestando en la mayoría de ocasiones modelos incompletos o incoherentes; (b) la función objetivo subyacente asociada a minimizar el máximo tiempo posible les resultó poco familiar al no poder enunciarse como una función que puedan optimizar utilizando derivadas; y (c) la necesidad de distinguir casos particulares como pueblos alineados o triángulos obtusángulos donde el circuncentro no resolvía la situación original, fueron motivos para que los modelos matemáticos se presentaran de un modo incompleto.

Error de resolución

Cuatro estudiantes (A9, A20, A21 y A22) resuelven el modelo matemático que plantean de manera correcta. En los demás casos, los errores en esta fase se debieron en mayor frecuencia a presentar un proceso de resolución incompleto (59%). En la mayoría de las resoluciones incompletas se muestra que el estudiante abandona el proceso de resolución por desconocer las herramientas necesarias que aborden el modelo matemático que ha planteado o reconocer que los siguientes pasos son complejos. Por ejemplo, A3, una vez que ha determinado en coordenadas la distancia a cada uno de tres puntos seleccionados (figura 3), deja el proceso incompleto por no saber qué función objetivo utilizar para buscar el valor mínimo.

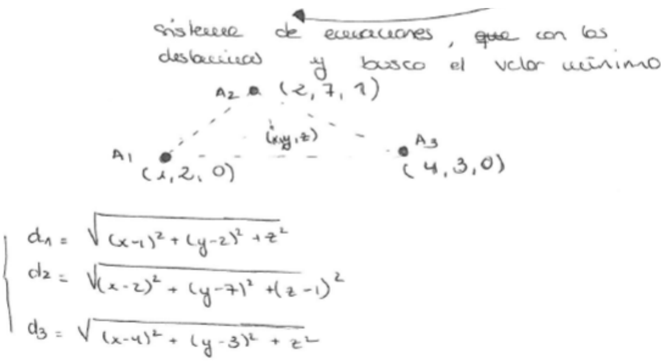


Figura 3. *Respuesta del sujeto A3*

Se destaca que ningún estudiante mostró errores procedimentales, si bien el 30% manifestó errores conceptuales. Como en el ejemplo anterior, el hecho de que muchos no continuaran con el proceso de resolución podría explicar la ausencia de errores procedimentales. En cambio, sí se detectaron errores conceptuales, mayoritariamente por: (a) confusión de las propiedades de los puntos notables, como considerar el baricentro el punto que equidista de los vértices (como por ejemplo en la respuesta de A7 en la figura 4) y (b) establecer situaciones de ponderaciones o proporcionalidad con errores en la propia noción de proporcionalidad (ejemplo de A8 en la figura 5)

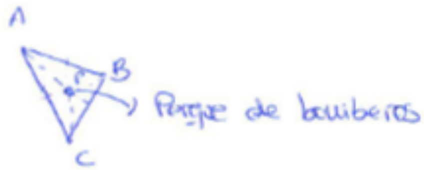
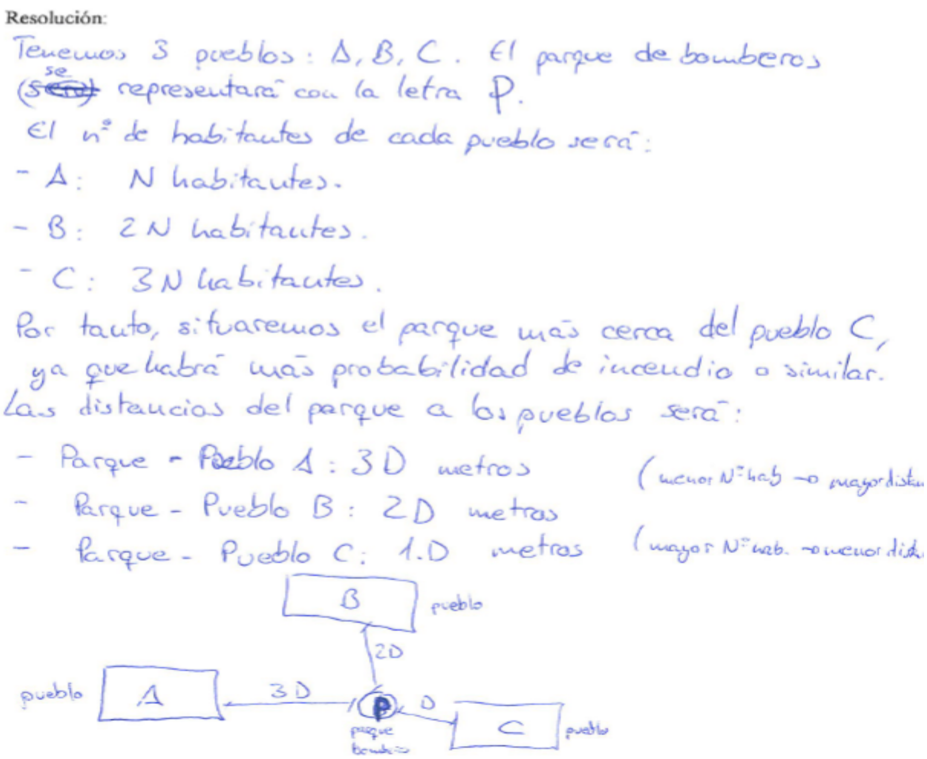


Figura 4. *Respuesta de A7*



Resolución:

Tenemos 3 pueblos: A, B, C. El parque de bomberos ~~(será)~~ se representará con la letra P.
El nº de habitantes de cada pueblo será:
- A: N habitantes.
- B: 2N habitantes.
- C: 3N habitantes.

Por tanto, situaremos el parque más cerca del pueblo C, ya que habrá más probabilidad de incendio o similar.
Las distancias del parque a los pueblos será:
- Parque - Pueblo A: 3D metros (menor Nº hab → mayor distan.
- Parque - Pueblo B: 2D metros
- Parque - Pueblo C: 1.D metros (mayor Nº hab. → menor dist.

Figura 5. *Parte de la respuesta del sujeto A8*

Errores de interpretación

Únicamente dos estudiantes (A21 y A27) añaden una valoración de la resolución que han obtenido, aunque en ambos casos se basan en constatar elementos del modelo matemático y no de la situación original de partida, por lo que no identifican posibles limitaciones de la solución encontrada.

> A21: *El circuncentro del triángulo se encuentra a igual distancia de los vértices, por tanto, sería el lugar más idóneo de colocarlo.*

A27: *No lo pondría en el baricentro del triángulo, sino un poco más cerca de A, y entre B y C, más cerca de B. La posición dependerá del número de habitantes del pueblo, será más cerca de A y más lejos de C.*

Los resultados evidencian que ningún estudiante interpreta la solución encontrada en relación a la situación original ni plantea posibles limitaciones del modelo. Interpretamos esta situación por dos motivos: a) la mayoría de los estudiantes mostraron un proceso de resolución incompleto, por lo no llegaron a obtener una solución que pudieran validar; y (b) aunque obtuviesen soluciones, no se mostraron familiarizados con la necesidad de validar sus resultados, considerando finalizada la tarea de modelización en el momento de mostrar la solución. Como hemos comentado, en los únicos casos en los que hicieron valoraciones, aludieron al modelo y no a la situación original.

Conclusiones

En este trabajo se han analizado los errores cometidos en una tarea de modelización por estudiantes del máster de formación del profesorado, detectando dificultades que posteriormente pueden manifestar en su futura profesión para implementar la modelización en el aula (Hein y Beimbengutt, 2006).

Los resultados sugieren distinguir dos aspectos relevantes en la clasificación de los errores cometidos: la familiaridad con el proceso de modelización y la aplicación de los contenidos matemáticos.

En relación al proceso de modelización, los estudiantes han mostrado poca familiaridad con el propio proceso, especialmente en las fases asociadas al mundo no matemático, siendo las fases de simplificación y la de validación las que han propiciado la mayor frecuencia de errores. En este sentido, se perciben deficiencias en las conexiones que representan las características estructurales del fenómeno (Gómez y Rico, 2002). En la fase de simplificación, los FPM han cometidos errores al presentar un modelo real incompleto, por no considerar elementos de la realidad o mostrar incoherencias en las relaciones de los elementos considerados. La mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para identificar las variables que explicaban el modelo (Widjaja, 2013) e incluso algunos estudiantes no consideraban la fase de simplificación, partiendo directamente de un modelo matemático que no consideraba las variables del problema. La fase de validación ha sido la que más ha mostrado las deficiencias del proceso, puesto que ningún estudiante interpreta la solución encontrada en relación a la situación original ni plantea posibles limitaciones del modelo, coincidiendo con lo señalado en investigaciones previas (Kaiser et al., 2021; Zeytun et al., 2017).

En cuanto a la aplicación de los contenidos matemáticos, también se han localizado errores en las fases relativas a la matematización y la resolución. El error más frecuente en estas fases ha sido al elaborar un modelo matemático incompleto (Socas et al., 2016), principalmente por falta de concreción de las condiciones planteadas o no considerar todos los casos posibles en el modelo real. El problema propuesto resultó complejo por la imposibilidad de abordar la optimización mediante procedimientos más rutinarios como la utilización de derivadas. Los FPM evidenciaron dificultades para traducir al lenguaje matemático las relaciones entre las variables, lo que originó incoherencias entre el modelo real propuesto y un modelo matemático inapropiado (Crouch y Haines, 2007). En la fase de resolución, se han evidenciado dificultades relativas al desconocimiento de las herramientas matemáticas necesarias (Anaya et al., 2006; GroBe, 2014), presentando errores conceptuales relativos a contenidos curriculares escolares como las propiedades de los puntos notables o la proporcionalidad.

Estos resultados reafirman la idea de abordar la modelización matemática para establecer conexiones entre las matemáticas escolares y la resolución de problemas reales (OCDE, 2013). Además de su propia competencia para modelizar (Niss, 2003), la visión de la modelización educativa demanda que el FPM conozca el proceso de modelización como un elemento de conocimiento del profesor (Escudero-Ávila et al., 2015) para poder transmitirlo a sus estudiantes. Los errores localizados mayoritariamente en las fases de simplificación y validación, sugieren que es necesaria formación específica del proceso de modelización en los cursos de formación de FPM (Anhalt y Cortez, 2016; Villarreal et al. 2015). En este sentido, este trabajo puede aportar orientaciones formativas en dos dimensiones: (a) la utilización de problemas no rutinarios, abiertos, en los que intervengan numerosas variables permiten evidenciar errores en las fases asociadas al mundo real por lo que ayudan tanto al formador de profesores como al FPM a interpretarlos y salvar las posibles dificultades (Rico, 1995; Socas, 1997); y (b) la presentación de fenómenos que puedan ser representados con conceptos y propiedades del currículo escolar permite al FPM profundizar en los significados de los contenidos matemáticas escolares, más allá de procesos de modelización más complejos que pueden haber abordado en su formación en matemáticas superiores. Si los fenómenos, relaciones y sus conexiones (Gómez y Rico, 2002) pertenecen a las matemáticas escolares, los FPM se familiarizarán con los modelos que posteriormente podrán presentar en el aula.

Los resultados de este trabajo vienen limitados por la selección de un grupo que se enfrenta a una tarea determinada, pero se considera un aporte generalizable a otras investigaciones la determinación de las categorías de errores propuestas a partir de la revisión de antecedentes. El listado propuesto atiende tanto a los errores cometidos en las fases como en las conexiones entre ellas (Crouch y Haines, 2007) y puede operativizar la localización de dificultades en el proceso de modelización no solo de FPM sino también de estudiantes de los diferentes niveles educativos en otro tipo de tareas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Anaya, M., Cavallero, M. I. y Dominguez, C. (2006). Elaboración de estrategias para la modelización. Un estudio sobre los procesos involucrados. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 180-186). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Anhalt, C. y Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modelling in secondary teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(6), 523–545.

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores* (Tesis doctoral). Universidade Estadual Pulista, Rio Claro, Brasil.

Bautista, A., Wilkerson-Jerde, M. H., Tobin, R. G. y Brizuela, B. M. (2014). Mathematics teachers' ideas about mathematical models: A diverse landscape. *PNA, 9*(1), 1-28.

Biembengut, M. S., y Faria, T. M. B. (2011). Mathematical modelling in a distance course for teachers. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.) (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14*. (pp. 269-278). Springer.

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby, y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.

Blum, W. (2002). ICMI study 14th: Applications and modelling in mathematics education - Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1), 149-171.

Blum W. (2015) Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. En Cho S. (Ed.). *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W. y Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education.* Springer.

Blum, W. y Leiß, D. (2006). "Filling Up" – the Problem of Independence-preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. En M Bosch. (Ed). *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education*, (pp. 1623-1633). FUNDEMI IQS, Universidad Ramon Llull, y ERME.

Blum, W., y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 37-68.

Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales. El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia, 28*(2), 15-44.

Cross, M. y Moscardini, A. O. (1985). *Learning the art of mathematical modelling.* John Wiley y Sons, Inc.

Crouch, R. y Haines, C. (2007). Exemplar models: Expert-novice student behaviours. En C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling* (pp. 90-100). Horwood.

Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 69–78). Springer.

English, L. D., Ärlebäck, J. B. y Mousoulides, N. (2016). Reflections on progress in mathematical modelling research. En Á. Gutiérrez, G.C. Leder y P. Boero.

(Eds). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 383-413). Brill Sense.

Escudero-Avila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-76.

Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J. y Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. En C. Haines, P., Galbraith, W., Blum y S. Khan, (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 130-140). Horwood.

García, J. N. (1998). Historia y concepto de las dificultades de aprendizaje. En V. Santiuste y J. Beltrán (Eds.), *Dificultades de aprendizaje* (pp. 17-46). Síntesis.

Gastón, J. y Lawrence, B. (2015). Supporting teachers' learning about mathematical modeling. *Journal of Mathematics Research, 7*(4), 1–11.

Gómez-Urgellés, J., y Fortuny, J. M. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 31,* 7-23.

Gómez, P., Rico, L. (2002) *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Documento no publicado. Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/376/

GroBe, C. S. (2014). Learning to solve story problems - supporting transitions between reality and mathematics. *European Journal of Psychology of Education, 29*(4), 619-634.

Hein, N. y Biembengut, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. En M. Murillo (ed.), *Memorias del V festival internacional de matemática,* 1-25.

Henning, H., y Keune, M. (2007). Levels of modelling competence. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and aplications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 225-232). Springer.

Kaiser G., Schwarz B. y Tiedemann S. (2010) Future Teachers' Professional Knowledge on Modeling. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds). *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_37

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., y Stillman, G. (Eds.) (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14.* New York: Springer.

Liébana, E., Ramírez, R. y Moreno, A. (2018). Identificación de otros puntos notables de un triángulo a partir de la resolución de problemas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 23*(3), 589-607.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38*, 96–112. https://doi.org/10.1007/BF02655884

López, R., Molina, M., y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA, 11*(2), 75-96.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behaviour, 3*(1), 93-166.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE, 37,* 169-546.

Morgan, M. S. y Morrison, M. (1999). *Models as mediators*. Cambridge University Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Nelson, H., y Salett-Biembengut, M. (2004). Modelización matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modeling in mathematics curricula. En W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. D. Huntley, G. Kaiser y L. Profke (Eds), *Applications and modeling in learning and teaching mathematics* (pp. 22-31). Horwood.

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis, A y S. Papastavridis (Eds), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education.* (pp. 115–124). The Hellenic Mathematical Society.

Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. *Ems Newsletter, 86*, 49-52.

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3–32). Springer.

OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de Pisa 2012. Matemáticas, Lectura y Ciencias*. OECD e Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Pollak, H. O. (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. *New Trends in Mathematics Teaching IV.* (pp. 232-248). UNESCO

Ramos-Rodríguez, E. M., Flores, P., da Ponte, J. P. (2014). Análisis didáctico para estudiar la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra. En González, J. L.; Fernández-Plaza, J. A.; Castro-Rodríguez, E.; Sánchez, M. T.; Fernández, C.; Lupiáñez, J. L.; Puig, L. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 135-143). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-96). Grupo Editorial Iberoamérica.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(4-1), 191–210.

Sampieri, R. H., Collado, C. F. y Baptista L. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed*.), La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Socas, M. M., Ruano, R. M. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de modelización en alumnos de secundaria. *Avances de investigación en Educación Matemática, 9*, 21-41.

Stillman, G., Brown, J. P., Edwards, I. y Galbraith, P. L. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (Vol. 2, pp. 688-707). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Verschaffel, L., van Dooren, W., Greer, B. y Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 9-29.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas, 19*, 63-85.

Villarreal, M.E., Esteley, C.B. y Smith, S. (2015). Pre-service mathematics teachers' experiences in modelling projects from a socio-critical modelling perspective. En G. Stillman, W. Blum y M. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 567–578). Springer.

Villarreal, M.E., Esteley, C.B. y Smith, S. Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM Mathematics Education, 50,* 327–341 (2018). https://doi.org/10.1007/s11858-018-0925-5

Widjaja, W. (2013). The Use of Contextual Problems to Support Mathematical Learning. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education, 4*(2), 157-168.

Zeytun, A. Şen, Çetinkaya, B. y Erbaş, A. K. (2017). Understanding prospective teachers' mathematical modeling processes in the context of a mathematical modeling course. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(33), 691-722.

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada, España
amverdejo@ugr.es

Manuel Martín Arenas
IES Concha Méndez Cuesta
(Torremolinos, Málaga)
manumartinarenas@gmail.com

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada
rramirez@ugr.es

Recibido: 3 de marzo, 2021. Aceptado: 22 de marzo, 2021
doi: 10.30827/pna.v15i2.20746

ISSN: 1887-3987