

# INTERVENCIONES EN EL TRABAJO CON UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN QUE INVOLUCRA LAS FORMAS DIRECTA E INVERSA DE UNA FUNCIÓN EN SEXTO DE PRIMARIA

Diana Hidalgo-Moncada y María C. Cañadas

*En este artículo describimos las intervenciones de un entrevistador ante errores en los que incurren estudiantes de 6° de educación Primaria durante el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función afín y representada mediante configuraciones puntuales. Realizamos entrevistas individuales a ocho estudiantes. Entre los resultados, presentamos diferentes tipos de errores en los que incurren los estudiantes y las intervenciones del entrevistador ante dichos errores. El error más frecuente se produjo en el patrón expresado. La intervención más frecuente del entrevistador fue proponer al estudiante volver a un caso particular.*

**Términos clave:** Errores; Generalización; Intervenciones; Pensamiento funcional

**Interventions when Working with a Generalization Task which Involves the Direct and Inverse Forms of a Function in Sixth Grade of Primary**

*In this article we describe the interventions implemented by an interviewer in response to sixth graders' errors when solving a generalization task that involves the direct and the inverse forms of an affine function represented by point configurations. We implemented individual interviews to eight students. Among the results, we present different types of students' errors and the interviewer's interventions to those errors. The most frequent error was the pattern expressed. The most frequent interviewer's intervention was to propose the student coming back to a previous particular case.*

**Keywords:** Errors; Functional thinking; Generalization; Interventions

En los últimos años diversos investigadores han centrado su interés en la generalización desde un enfoque funcional del pensamiento algebraico en educación primaria. Aspectos como las relaciones funcionales, la generalización, las estrategias o representaciones han sido algunos de los focos de atención de estos estudios (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2016; Schliemann, Carraher y Brizuela, 2012).

Por otra parte, menor atención ha recibido los errores y las dificultades que presentan los estudiantes en este ámbito, así como las intervenciones del docente ante esas dificultades y, particularmente, cómo influyen en la generalización que evidencian los estudiantes (Cañadas, Morales y Bautista, en revisión). Como sucede en otros ámbitos, ciertas acciones del docente pueden influir en las actuaciones de los estudiantes. Warren (2006) afirma que las acciones del docente pueden guiar al estudiante a identificar y expresar la generalización mediante simbolismo algebraico. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) observan que la intervención del profesor ayuda a los estudiantes a interpretar un problema en términos de relación entre variables. Tras nuestra revisión de literatura, compartimos con Warren (2006) que hay pocos estudios centrados en las intervenciones o acciones del docente en contextos de generalización.

Abordamos la generalización en un contexto funcional del *early algebra*. Asumimos los logros de los estudiantes desde edades tempranas en tareas vinculadas al contexto funcional. Sin embargo, también reconocemos que los estudiantes presentan dificultades, algunas de las cuales se evidencian a través de errores (Cañadas et al., en revisión; Hidalgo y Cañadas, 2017). Consideramos que las intervenciones del docente cobran especial relevancia cuando los estudiantes manifiestan errores.

En este artículo describimos las intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización por estudiantes de sexto de primaria (11-12 años) en un contexto funcional del pensamiento algebraico. Estas intervenciones se producen cuando el entrevistador que les propone la tarea observa errores o dificultades.

## PENSAMIENTO FUNCIONAL

El pensamiento algebraico es “una aproximación a situaciones cuantitativas que enfatiza los aspectos de la relación general con expresiones que no son necesariamente propias del simbolismo algebraico” (Kieran, 1996, p. 275). “El pensamiento funcional es un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 212). Estas autoras añaden que el enfoque funcional permite trabajar contenidos como el concepto de función, relación y variación entre cantidades, contenidos fundamentales para el desarrollo del pensamiento funcional y algebraico.

Blanton, Levi, Crites y Dougherty (2011) definen función como “una relación especial entre dos conjuntos, en la cual cada elemento de un conjunto, llamado dominio, está asociado únicamente a un elemento del segundo conjunto, llamado codominio” (p. 48). Además, en una función los valores de una variable varían según los valores de la otra, siendo la primera la variable dependiente y la segunda la independiente. Merino, Cañadas y Molina (2013) distinguen dos tipos de relaciones entre variables: directa si se conoce el valor de la variable independiente, e inversa, si el valor conocido es de la variable dependiente.

El uso de patrones es uno de los aspectos indagados del pensamiento funcional. Warren y Cooper (2006) desarrollan una serie de lecciones, que tienen por objetivo utilizar patrones repetitivos para indagar en el pensamiento funcional. Las lecciones propuestas se presentaron a un grupo de 25 estudiantes con una edad promedio de 9 años. Los autores destacan que los niños pequeños no solo manifiestan pensamiento funcional, sino que también lo representan de formas inesperadas para su edad.

Distintos estudios muestran que cuando los estudiantes trabajan con la forma inversa de una función les produce mayor dificultad. MacGregor y Stacey (1995), investigan cómo 143 estudiantes (14-15 años) desarrollan ejercicios que involucraban funciones directa e inversa. Sus resultados mostraron que un 63% de las respuestas de los estudiantes fue correcta al trabajar con la forma directa de la función y un 43% al trabajar con la forma inversa de la función. Otro estudio que da cuenta de esta dificultad es Pinto y Cañadas (2018). Estos autores muestran cómo 24 estudiantes de quinto de primaria (10 a 11 años) percibieron la función inversa al resolver problemas de generalización, señalando que solo cinco estudiantes lograron generalizar la forma inversa de la función.

La generalización es uno de los elementos clave del pensamiento funcional. Definimos generalización, como el “proceso que consiste en pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado” (Pólya, 1990, p. 97). Merino et al. (2013) señalan que trabajar con tareas de generalización implica “la búsqueda de patrones, lo cual pretende hallar un elemento a partir de otros dados o conocidos” (p. 27).

## ERRORES Y DIFICULTADES

Los errores son una parte inevitable y necesaria del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Matz (1980) señala que, “los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 94). Para Fernández (2016) “los errores son síntomas mediante los cuales un alumno manifiesta sus conflictos y problemas de aprendizaje relativos a un determinado contenido matemático escolar” (p. 195). Socas (2007) define el error como “la presencia en un alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o despiste” (p. 31). Además,

son datos objetivos que se encuentran en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y constituyen un elemento estable de dichos procesos (Rico, 1995). Entre otras características, este autor señala que: (a) los errores pueden permanecer ocultos para el profesor y emerger en determinados momentos, (b) se resisten a cambiar llegando a necesitar una reorganización del conocimiento del alumno para cambiarlos, (c) pueden ser sistemáticos o por azar y (d) el que incurre en un error no considera el significado de los símbolos y conceptos con los que trabaja.

De forma más específica, en el ámbito del álgebra, Santagata (2005) da a conocer la naturaleza de una serie de errores en los que incurren los estudiantes durante el proceso de aprendizaje del álgebra en el aula. Esta autora propone la siguiente clasificación de errores que describimos a continuación.

- ◆ Conceptual: conexiones erróneas entre conceptos matemáticos.
- ◆ Procesal: error en la ejecución de procedimientos; por ejemplo, en la aplicación de algoritmos o formulas.
- ◆ Dibujo: error al dibujar una figura.
- ◆ Computacional: error aritmético.
- ◆ Distracción: error debido a la distracción. Se suele identificar el error y responder correctamente justo después.
- ◆ Principio, propiedad y definición: no se reconoce un principio matemático o una propiedad por su nombre, o se define un concepto matemático o una propiedad incorrectamente.
- ◆ Otro: todos los errores diferentes a los anteriores.

Cañadas et al. (en revisión) describen el trabajo de ocho estudiantes de segundo de educación primaria (7-8 años) en la resolución de una tarea de generalización que involucra la función  $f(x) = x + 5$  y cuyo contexto es “una abuela le da a su nieto un cofre de dinero con 5 €. Después de eso, todos los domingos, ella le da un euro”. Los autores identificaron errores previos y posteriores a la intervención de un entrevistador. Previas a la intervención: (a) agregar la cantidad de la variable independiente a la última cantidad conocida de la variable dependiente, (b) respuesta sin sentido, (c) suma cinco a la última cantidad conocida de la variable dependiente, (d) no considera la cantidad constante en la función, (e) error aritmético y (f) sin respuesta. Posteriores a la intervención: (a) agregar la cantidad de la variable independiente a la última cantidad conocida de la variable dependiente, (b) respuesta sin sentido, (c) sin respuesta y (d) igualar la cantidad de euros con la cantidad de domingos y sumar las dos cantidades. Tanto antes como después de la intervención, los autores identifican que el error más frecuente fue, agregar la cantidad de la variable independiente a la última cantidad conocida de la variable dependiente y el menos frecuente fue sin respuesta.

## INTERVENCIÓN DOCENTE

El docente es uno de los protagonistas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto justifica el interés por conocer su rol en distintos momentos del aprendizaje del estudiante en las distintas situaciones que se generan y observar los resultados de cada intervención.

Algunas investigaciones se han centrado en describir los tipos de intervenciones que ayudan a los estudiantes a avanzar en el aprendizaje de las matemáticas (e.g., Anghileri, 2006; Dekker y Elshout-Mohr, 2004; Dominik y Bernd, 2005). Dekker y Elshout-Mohr (2004) se centran en dos tipos de intervenciones docentes dirigidas a ayudar a los estudiantes a elevar su nivel matemático: ayuda de proceso y la ayuda de producto. El primer tipo de ayuda se refiere a la interacción entre estudiantes, se busca fomentar la regulación entre ellos a través de la reflexión, explicación y argumentación. La ayuda de producto se centra en el contenido matemático de las tareas y se basa en que el docente de pistas matemáticas a los estudiantes cuando estos muestren inseguridad o no comprendan alguna parte del problema. Los autores observaron que los estudiantes en condición de ayuda de proceso elevaron su nivel matemático más que los estudiantes en condición de ayuda de producto. Aunque aseguran que se necesita más investigación en este ámbito.

Desde la teoría tecnológica del aprendizaje, Horner, Bellamy y Colvin (1984) consideran que, si un comportamiento no se da o no se logra, es debido a que no se han entregado los estímulos suficientes o adecuados. En este sentido, asumimos que ciertas acciones del profesor son claves para que el estudiante generalice. En nuestra investigación la intervención la realiza un entrevistador y lleva cabo ciertas acciones, que consideramos un medio para guiar a los estudiantes en el proceso de generalización.

Estudios como los de Ames y Archer (1988) y Nicholls, (1984) muestran que las interacciones profesor-estudiante con motivo de errores, influyen en la motivación y el rendimiento de los estudiantes.

Santagata (2005) señala que escasos estudios se han centrado en las distintas interacciones profesor-estudiante que ocurren en los entornos reales del aula y cuándo se produce un error. En ocasiones los errores no podrán ser previstos por el docente, por lo cual la intervención que realiza el profesor debe ser espontánea y efectiva para que el estudiante avance en el proceso de aprendizaje. La autora compara las lecciones de álgebra y geometría de un grupo de profesores estadounidenses con un grupo de profesores italianos, analizando los errores en los que incurren los estudiantes y la primera respuesta del docente ante los mismos. Uno de los resultados de este estudio es una categorización de los tipos de respuestas de los docentes ante los errores de los estudiantes, que son los que describimos a continuación. (a) Corregir: el profesor corrige el error proporcionando la respuesta correcta. (b) Sugerir al mismo estudiante: el profesor refina la pregunta, agregando una pista para ayudar al estudiante que cometió el

error para llegar a la respuesta correcta. (c) Repetir la pregunta al mismo estudiante: el profesor repite la pregunta o menciona al estudiante que cometió el error que su respuesta no es correcta. (d) Explicar: el profesor pide al estudiante que cometió el error que le explique cómo llegó a esa respuesta. (e) Sugerir a otro estudiante: el profesor refina la pregunta añadiendo una pista y abriendo la pregunta a otros estudiantes o redirigiendo la pregunta a otro estudiante en particular. (f) Redireccionar la pregunta: el profesor dirige la pregunta a otro estudiante. (g) Seleccionar la respuesta correcta: los estudiantes dan respuestas múltiples y el profesor escoge la correcta y no agrega ningún comentario. Luego pasa a la siguiente pregunta. (h) Preguntar a la clase: el profesor pide a los estudiantes que identifiquen el error cometido por un compañero de clase, o que evalúen la corrección de algo que fue hecho o dicho por un compañero de clase. (i) Coevaluar: el error es corregido por otro estudiante antes de que el profesor haga su comentario. (j) Otro: todas las respuestas no incluidas en las categorías anteriores.

En un contexto funcional, Carraher et al. (2008) afirman que ciertas intervenciones del profesor ayudan a los estudiantes a interpretar un problema en términos de relación entre variables. Warren (2005) identificó cuatro intervenciones docentes que ayudaron a mejorar la comprensión de los estudiantes de 4° de educación primaria (9-10 años) en el proceso de generalización. Las intervenciones fueron: usar material concreto, ilustrar patrones explícitos de la relación entre el patrón y la posición, hacer preguntas explícitas para relacionar el patrón con su posición y aumentar gradualmente el valor de la posición. Warren (2006) identifica dos nuevas intervenciones docentes que ayudan a los estudiantes de 5° de educación primaria a establecer vínculos entre descripciones verbales y simbólicas de generalización. Las intervenciones fueron introducción por parte del docente de un lenguaje específico para ayudar a describir el patrón visual en términos generales y pedir frecuentemente a los estudiantes que expresen de forma simbólica algebraica sus descripciones verbales.

Ureña, Ramírez y Molina (2019) describen el papel de la mediación de una entrevistadora en las representaciones de las generalizaciones realizadas por ocho alumnos de cuarto de educación primaria (9-10 años) cuando resuelven una tarea que involucra una relación funcional lineal. Esta mediación la describen y analizan en términos de acciones realizadas por la entrevistadora. Las acciones que describen son los siguientes: reafirmación, sugerencia de procesos, corrección, cambio de rumbo, repetición de información y aclaración. Los resultados reafirman la importancia de la mediación para que los estudiantes mejoren su capacidad de reconocer, representar y generalizar las relaciones funcionales. Por ejemplo, la acción de mediación de sugerencia de procesos permitió a los estudiantes consolidar ideas sobre la forma de la relación funcional y la operación involucrada. Por otra parte, la acción de mediación cambiar de rumbo, alentó a los estudiantes a identificar, definir y expresar la relación funcional. La categorización de acciones descrita por Ureña et al. (2019) se origina de una reinterpretación de

las acciones de interacción que propone Soller (2001) y Mata-Pereira y da Ponte (2017).

## OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de este artículo es describir las intervenciones de un entrevistador en el trabajo con una tarea de generalización por estudiantes de sexto de primaria (11-12 años). Esta tarea involucra una función afín, en sus formas directa e inversa. El entrevistador interviene cuando observa errores o dificultades durante el trabajo de los estudiantes. Los objetivos específicos de investigación que contribuyen al objetivo general son:

- ◆ Identificar los errores y dificultades de los estudiantes.
- ◆ Describir las intervenciones que realiza el entrevistador al observar errores o dificultades.

## MÉTODO

El estudio sigue un enfoque mixto de naturaleza descriptiva y exploratoria (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 546).

### Sujetos

Los sujetos participantes en este estudio son los estudiantes y el entrevistador. Los estudiantes son ocho alumnos de 6° de educación primaria (11-12 años) de un centro educativo de línea 1, que incluye educación infantil y educación primaria, ubicado en los alrededores de Granada. Los estudiantes constituían un subgrupo heterogéneo en cuanto a calificaciones académicas en matemáticas. Estos estudiantes fueron seleccionados de entre un grupo más numeroso que el curso anterior había participado en cuatro sesiones de un experimento de enseñanza. El objetivo de estas sesiones fue describir el pensamiento funcional de estudiantes de quinto de educación primaria. En él se trabajó con tareas contextualizadas que involucraban funciones lineales del tipo  $ax + b$ , con  $a$  y  $b$  números naturales o cero. Por tanto, los estudiantes tenían alguna experiencia con problemas que pretendían promover el pensamiento funcional, pero no habían trabajado con configuraciones puntuales que, como describiremos en detalle más adelante, es la representación con la cual se plantea la tarea en nuestro estudio.

El entrevistador es parte del equipo de investigación y fue el encargado de realizar las entrevistas. También participó en las sesiones de gran grupo desarrolladas el curso anterior, por lo que conocía a los estudiantes, el trabajo que habían realizado previamente y era próximo al tema de investigación. Su consigna durante la realización de las entrevistas fue realizar las preguntas y prestar ayuda a los estudiantes cuando ellos no sabían seguir o presentaban dificultades. No les facilitó información sobre la corrección o no de sus respuestas.

### Recogida de datos

Realizamos entrevistas semiestructuradas a los ocho estudiantes, definidas como “guía de asuntos o preguntas, donde el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información sobre los temas deseados” (Hernández et al., 2010, p. 418). El equipo de investigación lo constituyeron, un entrevistador y un encargado de grabación con la videocámara. Las entrevistas fueron grabadas en video. Diseñamos las entrevistas para desarrollarlas durante el tiempo que necesitara cada estudiante. Finalmente, todas las entrevistas tuvieron una duración entre 10 y 30 minutos y se llevaron a cabo en horario habitual de clases, en un espacio del centro escolar.

Por ser una entrevista semiestructurada, había un guion con preguntas preestablecidas y otras surgieron durante el desarrollo de las entrevistas, en función de las respuestas de cada estudiante. Todas las preguntas siguieron el modelo de razonamiento inductivo definido Cañadas y Castro (2007), partiendo de preguntas relacionadas con casos particulares, hasta llegar al caso general. Además, las preguntas abordan la forma directa de la función, así como su forma inversa. La formulación de las preguntas considera la edad, el nivel y lo que se había trabajado con ellos el curso anterior. Más adelante presentamos algunas preguntas como ejemplos. Cabe mencionar que el entrevistador no le informa al estudiante que su respuesta o argumento es inadecuado, desde una visión constructivista del aprendizaje, pretendemos que sea el estudiante quien, tras darse cuenta de su error, se autocorrija.

### Tarea planteada

Durante la entrevista, presentamos a los estudiantes una tarea de generalización contextualizada que involucra la función afín  $y = f(x) = 4x + 1$  mediante configuraciones puntuales. Una función afín queda expresada como  $y = mx + n$  (con  $m$  y  $n$  distintos de 0). Gráficamente,  $m$  es la pendiente de la recta que representa y  $n$  es la ordenada en el origen. Por tanto, la recta que representa una función afín no pasa por el origen de coordenadas (0,0). La función fue seleccionada con base en el trabajo realizado en el contexto del proyecto en el que se enmarca esta investigación y en los antecedentes citados en este trabajo.

En el contexto del problema la variable independiente es el número de minutos y la variable dependiente el número de puntos. De esta forma, conforme pasan los minutos, el número de puntos que constituyen una configuración puntual aumenta. Al comienzo de la entrevista, se presentó un folio en blanco al estudiante en el que el entrevistador plantea la siguiente tarea: “Tenemos un punto (se dibuja el punto para cero minutos). Cuando ha pasado un minuto ocurre esto (se dibujan los puntos para un minuto), luego cuando pasan dos minutos ocurre lo siguiente (se dibujan los puntos para dos minutos)”.

Desde ese momento el entrevistador plantea al estudiante preguntas como las siguientes:

- ◆ ¿Podrías dibujar lo que ocurre con los puntos a los 3 minutos?

- ◆ ¿Podrías dibujar lo que ocurre con los puntos a los 4 minutos?
- ◆ Si yo te diera los puntos, ¿podrías saber cuántos minutos han pasado?
- ◆ Si pasaran 10 minutos, ¿cuántos puntos tendría el dibujo?
- ◆ Si pasaran 100 minutos, ¿cuántos puntos tendría el dibujo?
- ◆ Si tenemos 21 puntos, ¿cuántos minutos han pasado?
- ◆ Para cualquier número de minutos, ¿cómo calcularías la cantidad de puntos?
- ◆ Si utilizaras una letra que represente la cantidad de minutos, ¿podrías expresar cómo se calcula el número de puntos?

Como se observa, la mayoría de las preguntas (1, 2, 4, 5, 7 y 8) tienen que ver con la forma directa de la función (se conoce el número de minutos, variable independiente y se quiere conocer el número de puntos, variable dependiente); y otras preguntas (3 y 6) responden a la forma inversa de la función (se conoce el número de puntos y se busca conocer el número de minutos).

Para cada una de las preguntas anteriores, el entrevistador pidió a los estudiantes que justificaran sus respuestas. Adicionalmente, el entrevistador intervino mediante ciertas acciones o proponiendo acciones cuando identificó una respuesta inadecuada por parte de los estudiantes, o bien cuando no sabían cómo responder. En este sentido, consideramos que el entrevistador está realizando algún tipo de intervención para guiar el avance de los estudiantes.

### **Categorías para el análisis de datos**

Para el análisis de los datos y partiendo del marco teórico y en los antecedentes de esta investigación (e. g., Radford, 2010; Santagata, 2005; Soller, 2001), definimos un primer sistema de categorías con base en los focos de esta investigación, centrado en errores y dificultades de los estudiantes e intervenciones del entrevistador. A continuación, ajustamos estas categorías según lo observado en los datos, ampliándolas o ajustándolas según lo observado en las respuestas de los estudiantes. Por tanto, nuestro estudio se apoya en la Teoría Fundamentada (Corbin y Strauss, 1990). Así hemos determinado para nuestro trabajo las siguientes categorías de errores y dificultades de los estudiantes e intervenciones del entrevistador. A partir de estas categorías definimos subcategorías que mostramos a continuación.

#### *Errores y dificultades*

En cuanto a los tipos de respuestas inadecuadas estos son:

- ◆ Error de conteo (E1): se realiza un conteo de forma errónea.
- ◆ Error de cálculo (E2): se realiza una operación matemática errónea.
- ◆ Error de caso (E3): se responde por otro caso al que se está preguntando (principalmente dibujando).
- ◆ Error numérico (E4): da como resultado un número y este es erróneo. No se sabe cómo procedió.

- ◆ Error de patrón (E5): se utiliza o se expresa un patrón no adecuado en el desarrollo de la respuesta.
- ◆ No hay avance: esta última subcategoría corresponde a la dificultad evidenciada en los estudiantes. Esta se identifica cuando se ve al estudiante confundido tratando de explicar algún procedimiento, mencionando variadas estrategias. También puede manifestar que no entiende la pregunta o no sabe cómo proceder.

### **Intervenciones del entrevistador**

Identificamos dos formas de intervenir: proponiendo acciones a realizar por el estudiante y a través de acciones propias del entrevistador.

Consideramos cuatro tipos de acciones a realizar por el estudiante mutuamente excluyentes.

- ◆ Volver al caso particular inicial (I1): se sugiere volver a revisar el proceso desde el inicio.
- ◆ Volver al caso particular anterior (I2): se sugiere volver al caso particular anterior trabajado, siendo este distinto del inicial.
- ◆ Volver a un caso particular cualquiera (I3): se sugiere volver a un caso particular cualquiera, pero distinto del anterior y del inicial.
- ◆ Volver sobre el mismo caso particular (I4): se sugiere pensar nuevamente el caso por el cual se está preguntando.

Consideramos cinco tipos de acciones que realiza el entrevistador, mutuamente excluyentes.

- ◆ Verbalizar el argumento o reflexión del estudiante (I5): se repite verbalmente un argumento o una reflexión realizada anteriormente por el estudiante.
- ◆ Repetir la pregunta (I6): se repite la pregunta realizada, ya sea que ve al estudiante confundido o porque ha incurrido en un error.
- ◆ Reformular la pregunta (I7): se plantea una pregunta ya realizada de otra manera.
- ◆ Calmar (I8): se calma al estudiante (por ejemplo, diciéndole que tiene tiempo para responder o que no hay prisa).
- ◆ Repetir respuesta y pedir argumento (I9): se repite la respuesta errónea del estudiante, sin mencionar que su respuesta no ha sido correcta y se realiza una pregunta de indagación de procedimiento. Por ejemplo, se pregunta, “¿por qué?” o “¿cómo obtuviste ese resultado?”.

## **RESULTADOS**

Presentamos los resultados con base en nuestros objetivos de investigación, distinguiendo las preguntas que se refieren a las formas directa e inversa de la función, respectivamente. Ejemplificamos las categorías con algunas respuestas de

los estudiantes durante la entrevista. Para preservar el anonimato de los estudiantes, les asignamos una codificación alfanumérica, con una A como alumnos y de 1 a 8 (ej. A1, A2, A3, etc.).

### Errores y dificultades de los estudiantes

Identificamos cinco tipos de errores: error de conteo, error de cálculo, error de caso, error numérico y error de patrón.

En la tabla 1 mostramos las frecuencias con las que los estudiantes presentaron diferentes errores. Para respuestas relativas a la forma directa de la función, el valor se muestra sin paréntesis y para respuestas relativas a la forma inversa, dentro del paréntesis.

Tabla 1

*Errores cometidos por los participantes*

A	Nº preguntas	Tipos de errores					Total
		E1	E2	E3	E4	E5	
1	9(1)	-	1	-	-	3	4
2	4(2)	2(1)	-	-	(1)	1(1)	3(3)
3	6(4)	-	3(1)	1	-	3(2)	7(3)
4	8(3)	1	-	1	2	2(1)	6(1)
5	5(3)	-	-	-	1(1)	-	1(1)
6	6(3)	-	-	-	1	2	3
7	5(2)	-	-	-	-	2	2
8	5(3)	3	-	1	-	1(3)	5(3)
<b>Total</b>	<b>48(21)</b>	<b>6(1)</b>	<b>4(1)</b>	<b>3</b>	<b>4(2)</b>	<b>14(7)</b>	<b>31(11)</b>

Nota. A = estudiante; E1 = error de conteo; E2 = error de cálculo; E3 = error de caso; E4 = error numérico; E5 = error de patrón; - = no presenta ese error.

A continuación, distinguimos entre preguntas que involucran las formas directa e inversa de la función, respectivamente.

### Errores en preguntas sobre la forma directa de la función

En general, en tabla 1 se observa que cada estudiante presenta entre uno y siete errores en preguntas que implican la forma directa de la función (valores fuera de los paréntesis). El error más frecuente es en el patrón que expresan (E5), que se presentó en 14 ocasiones y en siete de los ocho estudiantes. Los demás errores se presentaron entre tres y seis ocasiones en el grupo de estudiantes. El error de menor presencia fue el error de caso (E3), donde los estudiantes respondían sobre un caso distinto al que se pedía, que se observó en tres estudiantes (A3, A4 y A8).

Observamos algunas diferencias notables entre algunos estudiantes. Una diferencia se observa en el número de errores en los que incurre cada estudiante. Por ejemplo, A4, a quien se le plantearon ocho preguntas sobre la forma directa de la función, cometió todos los tipos de errores, excepto en el error de cálculo (E2). Por otro lado, A5, a quien se le plantearon cinco preguntas sobre la forma directa de la función solo cometió el error numérico (E4) en una ocasión.

Particularmente entre los estudiantes que solo presentaron errores al responder preguntas sobre la forma directa de la función (A1, A6 y A7), A1 se le plantearon nueve preguntas de este tipo y es quien presentó el mayor número de errores (4 errores del tipo E2 y E5) entre los tres estudiantes. En el fragmento siguiente presentamos el error de patrón (E5) de A1 (presentada en tres ocasiones), acompañada de un error de cálculo (E2), ante una pregunta que implicaba la forma directa de la función.

*Entrevistador:* Si yo te dijera aquí (indicando en la tabla la columna de los minutos) 100.

*Estudiante A1:* (La alumna realiza cálculos mentales y completa la tabla con 410) ... creo que es esto.

*Entrevistador:* ¿Por qué?

*Estudiante A1:* Porque he multiplicado 100 por 41, yo no sé.

En el fragmento anterior observamos el error del alumno A1. Ante la pregunta ¿cuántos puntos habrá a los 100 minutos?, A1 no utilizó el patrón adecuado, ya que, multiplicó el término encontrado anteriormente para los 10 minutos (41) por 100, además realizó un cálculo errado.

### **Errores en preguntas sobre la forma inversa de la función**

Como se desprende de la tabla 1, el grupo de estudiantes presentó entre uno y tres errores al responder a preguntas sobre la forma inversa de la función. El error que se presentó con mayor frecuencia es el error de patrón (E5), observado en siete ocasiones, mientras que el error de caso (E3) no se presentó en ninguna respuesta. De modo global, E5 se observó en cuatro de los ocho estudiantes, mientras que los demás errores se presentaron en uno o dos estudiantes.

Entre los estudiantes que presentaron mayor cantidad de errores se encuentra A8, quien presentó en tres ocasiones el error de patrón (E5). A este estudiante se le plantearon tres preguntas de relación inversa.

En el fragmento siguiente presentamos el error de patrón (E5) de A8, ante una pregunta que implicaba la forma inversa de la función.

*Entrevistador:* Ahora vamos a pensarlo al revés, imagínate que tengo 21 puntos, ¿sabes cuánto tiempo ha pasado?

*Estudiante A8:* Pues, 21 por cuatro es 84. Más el del centro, 8.

Observamos que el estudiante para preguntas sobre la forma inversa de la función utilizó el mismo procedimiento que para preguntas sobre la forma directa de la función, lo cual no es correcto.

En general el error de patrón (E5) fue el más frecuente cuando se trataban preguntas que implicaban la forma inversa de la función.

En la tabla 2 mostramos la frecuencia con la que los estudiantes presentaron la dificultad de no avanzar. Para respuestas relativas a la forma directa de la función, el valor se muestra sin paréntesis y para respuestas relativas a la forma inversa, el valor se observa dentro del paréntesis

Tabla 2  
*Resumen de dificultades de los estudiantes*

A	Nº preguntas	Dificultad
1	9(1)	3
2	4(2)	1(1)
3	6(4)	2(1)
4	8(3)	2(2)
5	5(3)	-
6	6(3)	1
7	5(2)	-
8	5(3)	1(2)
<b>Total</b>	<b>48(21)</b>	<b>10(6)</b>

Nota. A = código del estudiante; - = no se observa dificultad

De la tabla 2, en cuanto a respuestas ante preguntas que implican la forma directa de la función (48 en total en el grupo de estudiantes), podemos observar que la dificultad de no avanzar los estudiantes la presentaron entre cero y tres ocasiones y con una frecuencia total de 10. De modo global, la dificultad de no avanzar se presentó en seis de los ocho estudiantes.

De modo particular observamos algunas diferencias entre algunos estudiantes. Por ejemplo, A1 se le plantearon nueve preguntas sobre la forma directa de la función de las cuales presentó la dificultad de no avanzar en tres ocasiones.

Por otro lado, ante preguntas que implicaban la forma inversa de la función (21 en total en el grupo de estudiantes), la dificultad de no avanzar se presenta entre cero y dos ocasiones en el grupo de estudiantes y con una frecuencia total de 6. De modo global, la dificultad de no avanzar se presentó en cuatro de los ocho estudiantes.

### Intervenciones del entrevistador

Identificamos nueve tipos de intervenciones del entrevistador, unas relativas a acciones a realizar por el estudiante: (I1) volver al caso particular inicial, (I2) volver al caso particular anterior, (I3) volver a un caso particular cualquiera, (I4) volver sobre el mismo caso particular y otras acciones a realizar por el entrevistador: (I5) verbalizar el argumento o la reflexión del estudiante, (I6) repetir la pregunta, (I7) reformular la pregunta, (I8) calmar y (I9) repetir respuesta y pedir argumento. En la tabla 3 mostramos las frecuencias de las intervenciones del entrevistador con cada estudiante. Los valores que se encuentran entre paréntesis corresponden a los resultados ante preguntas de la forma inversa de la función y los valores fuera de los paréntesis corresponden a resultados ante preguntas de relación directa.

Tabla 3  
*Resumen de intervenciones ante los errores*

A	Nº preguntas	Intervenciones									Total
		Acciones del estudiante				Acciones del entrevistador					
		I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	
1	9 (1)	2	-	2	-	1	-	1	1	-	7
2	4 (2)	2	1	2	(1)	(1)	1	(1)	-	1	7 (8)
3	6 (4)	(1)	-	2	1	2	2	-	-	-	7 (4)
4	8 (3)	1	-	1	-	-	4	1	-	-	7 (2)
5	5 (3)	-	-	-	-	-	-	(1)	-	1	1 (1)
6	6 (3)	1	-	2	-	2	2	2	-	-	9
7	5 (2)	-	-	-	-	1	-	-	-	1	2
8	5 (3)	(1)	-	3	-	(1)	(2)	2	(1)	1	6 (5)

Tabla 3  
*Resumen de intervenciones ante los errores*

A	Nº preguntas	Intervenciones									Total
		Acciones del estudiante				Acciones del entrevistador					
		I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	
Total	48	6	1	12	1	6	9	6	1	4	46
	(21)	(4)		(3)	(1)	(4)	(4)	(2)	(1)	(1)	(20)

Nota. A = código del estudiante; I1 = volver al caso particular inicial; I2 = volver al caso particular anterior; I3 = volver a un caso particular cualquiera; I4 = volver sobre el mismo caso; I5 = verbalizar argumento o reflexión del estudiante; I6 = repetir la pregunta; I7 = reformular la pregunta; I8 = calmar; I9 = repetir respuesta y pedir argumento; - = no hay intervención.

A continuación, distinguimos entre las intervenciones que el entrevistador realiza cuando los estudiantes responden a preguntas que involucran las formas directa e inversa de la función, respectivamente.

### **Intervenciones en preguntas sobre la forma directa de la función**

En general observamos que ante preguntas sobre la forma directa de la función (48 en total en el grupo de estudiantes) el entrevistador intervino entre dos y siete ocasiones. La intervención que realizó con mayor frecuencia (12 ocasiones) fue recomendar al estudiante volver a un caso particular cualquiera (I3), intervención que requería acciones del estudiante. La siguiente intervención por orden decreciente de frecuencia (9 ocasiones) fue repetir la pregunta (I6), correspondiente a una acción del entrevistador. También con una alta frecuencia (6 ocasiones) el entrevistador intervino verbalizando el argumento o reflexión del estudiante (I5), recomendando al estudiante volver al caso inicial (I1) o reformulando la pregunta (I7).

A continuación, mostramos un ejemplo de la intervención que se presentó con mayor frecuencia (I3). Una de las estudiantes que recibió esta intervención, anteriormente había trabajado con los valores 1, 2, 3, 4 y 10 para el número de minutos y había reconocido el patrón de multiplicar el número de minutos por cuatro y sumar uno. Al responder la pregunta ¿cuántos puntos habrá a los 100 minutos? la estudiante evidencia un error de procedimiento (R5). Considerando lo anterior el entrevistador interviene como mostramos en el siguiente fragmento.

*Entrevistador:* Si yo te dijera aquí (indicando en la tabla la columna de los minutos) 100

*Estudiante A1:* (La alumna realiza cálculos mentales y completa la tabla con 410) ... creo que es esto.

*Entrevistador:* ¿Por qué?

*Estudiante A1:* Porque he multiplicado 100 por 41, yo no sé.

*Entrevistador:* Entonces, ¿con ese criterio tú podrías haber calculado por ejemplo el 10?

En el diálogo se observa la intervención recomendar al estudiante volver a un caso particular cualquiera (I3). El entrevistador pregunta a la estudiante si el procedimiento que está utilizando para la pregunta relativa al número de puntos a los 100 minutos lo utilizó también para calcular el número de puntos a los 10 minutos. Esto le permitió a la estudiante recordar procedimientos anteriores y compararlos con el actual y así razonar respecto a la relación funcional que está involucrada.

Las intervenciones menos frecuentes fueron recomendar al estudiante volver al caso anterior (I2), volver sobre el mismo caso (I4) y calmar al estudiante (I8), evidenciándose en una ocasión cada una.

Observamos diferencias entre los estudiantes en términos de las intervenciones que realizó el entrevistador en un contexto de la forma directa de la función. A6 es quien recibió la mayor cantidad de intervenciones (9 ocasiones), estas fueron del tipo I1, I3, I5, I6 e I7, donde la mayoría correspondían a acciones a realizar por el entrevistador. En cuatro de los ocho estudiantes, contestar a una pregunta del entrevistador requirió más de una intervención. Por ejemplo, al estudiante A6 se le plantearon seis preguntas sobre la forma directa de la función y el entrevistador intervino en nueve ocasiones. Además, A6 solo requirió intervención en preguntas que implicaban la forma directa. En el otro extremo a A5 el entrevistador intervino en una ocasión, repitiendo la respuesta del estudiante y pidiéndole argumento (I9). A este alumno se le plantearon cinco preguntas sobre la forma directa de la función y requirió intervención en una ocasión.

### **Intervenciones en preguntas sobre la forma inversa de la función**

En un contexto que implica la forma inversa de la función, el entrevistador intervino entre una y ocho ocasiones. Las intervenciones que mayormente se presentaron son volver al caso particular inicial (I1), verbalizar el argumento o reflexión del estudiante (I5) y repetir la pregunta (I6) (4 ocasiones cada una), de las cuales dos corresponden a intervenciones que requerían acciones del entrevistador. Las intervenciones del tipo I4, I8 e I9 se presentaron con una baja frecuencia (1 ocasión cada una), mientras que la intervención volver al caso particular anterior (I3) no se evidenció.

A continuación, mostramos un ejemplo de intervención que se presentó con mayor frecuencia (I5), correspondiente a verbalizar argumento o reflexión del estudiante y que pertenece al grupo de acciones a realizar por el entrevistador.

*Entrevistador:* Si te doy 21 puntos

*Estudiante A3:* ¿Totales?

*Entrevistador:* Sí.

- Estudiante A3:* Serían, 21 menos 5... a ver 21 menos 5 sería el primer minuto y entonces serían 16 puntos y si aquí lo hago por cuatro ahora sería 16 entre 4, entonces sería lo mismo solo que en vez de multiplicando es dividiendo, tengo 16 puntos entre cuatro para cuatro esquinas y luego eso más cinco. Entonces, sería 16 entre cuatro es 4 (realiza la operación en la hoja) ... más cinco es nueve, habrían pasado nueve minutos.
- Entrevistador:* ¿Pero los cinco no eran puntos?
- Estudiante A3:* ¡Ah! espera es verdad, serían cuatro más cinco nueve puntos. A ver espera que hay algo que fallo.
- Entrevistador:* Te di 21 puntos, a esos puntos le has quitado los cinco del primer minuto...
- Estudiante A3:* Sí.
- Entrevistador:* Ahora los 16 puntos que te han quedado lo has dividido entre cuatro...

En el ejemplo se observa que el entrevistador repitió en dos ocasiones el argumento dicho por el estudiante anteriormente, pero con menos palabras. Observamos que esta intervención permitió al estudiante ordenar sus ideas y seguir argumentando, reflexionar lo que había hecho anteriormente y decidir si es o no la respuesta adecuada y, en caso de no serlo, si debiese modificarla.

Observamos algunas diferencias entre los estudiantes en términos de las intervenciones que hace el entrevistador cuando se implica la forma inversa de la función. A2 es quien recibió la mayor cantidad de intervenciones (8 ocasiones), estas fueron del tipo I1, I3, I4, I5, I7 e I9, algunas correspondientes a acciones del estudiante y otras a acciones del entrevistador. Considerando que a este estudiante se le plantearon dos preguntas sobre la forma inversa de la función observamos que requirió más de una intervención por cada pregunta. Por otro lado, no hubo intervención por parte del entrevistador a los estudiantes A1, A6 y A7, debido a que no presentaron errores o dificultad al plantearles preguntas sobre la forma inversa. En general al grupo de estudiantes se le intervino en 20 ocasiones en contexto que implicaba la forma inversa de la función.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La información recogida de las entrevistas nos permitió dar respuestas a los objetivos planteados en este estudio. Hemos analizado dos aspectos ocurridos durante el proceso de generalización (errores e intervenciones) que desarrollaron ocho estudiantes de 6° de educación primaria y el entrevistador.

A los estudiantes no se les realizó el mismo número de preguntas en total y entre preguntas que involucraba la forma directa de la función y la forma inversa de la función, dado que se trataba de una entrevista semiestructurada. Por esto, en

este estudio no podemos realizar una comparación cuantitativa de estos dos tipos de preguntas. No obstante, mostramos lo ocurrido en cada caso.

Hemos identificado cinco tipos de errores en los que incurren estos ocho estudiantes al enfrentarse a la tarea que implica una relación funcional presentada con configuraciones puntuales: error de conteo, error de cálculo, error de caso, error numérico y error de patrón. Ante preguntas que implicaban la forma directa de la función observamos que los estudiantes incurren principalmente en el error de patrón, lo que deja ver que los estudiantes utilizan un patrón inadecuado en el desarrollo de sus respuestas. Por otro lado, ante preguntas que implicaban la forma inversa de la función los estudiantes de igual modo presentan frecuentemente el error de patrón. Este hecho coincide con uno de los resultados de Santagata (2005), quien señala que los estudiantes cometen con mayor frecuencia el error de procedimiento, al cual nosotros llamamos error de patrón, es decir, se utiliza un patrón inadecuado en el desarrollo de una respuesta. Consideramos algunos de los errores que esta autora ha identificado en su estudio, pero además contribuimos con otros, como el error de conteo y el error numérico, los cuales se adaptan a la tarea y contexto utilizado. Destacamos que a pesar de que la experiencia de estos estudiantes con tareas que implicaban una relación funcional era escasa, hubo estudiantes que casi no presentaron errores en el desarrollo de la tarea. Esto evidencia que alumnos de estos cursos son capaces de comprender y desarrollar el pensamiento funcional trabajando con tareas de patrones que impliquen relaciones funcionales.

Además, en relación con este aspecto hemos identificado, que los estudiantes presentaron la dificultad de no avanzar. Consideramos esta dificultad como un factor que obstaculiza el avance en el proceso de generalización. Con frecuencia los estudiantes presentaron esta dificultad durante el desarrollo de la tarea tanto en preguntas que implicaban la forma directa de la función como la forma inversa. Creemos que esto se puede deber a variados factores, pudiendo ser uno de ellos el ponerse nervioso ante una entrevista individual grabada en vídeo, la que además es probable que les causara distracción.

En general los estudiantes presentaron más dificultades al expresar y utilizar un patrón adecuado que, al realizar cálculos numéricos o conteo de puntos, ya sea porque no lograban encontrar el patrón que diera respuesta el acaso preguntado o porque utilizaban el patrón encontrado para preguntas que involucraban la forma directa de la función en preguntas que referidas a la forma inversa de la función. Esto ocurrió tanto para preguntas sobre forma directa de la función como de su forma inversa.

Apoyados en diferentes autores (Santagata, 2005; Soller, 2001) y la información recogida, hemos descrito cada intervención que el entrevistador realizó con los estudiantes a través de ciertas acciones, las cuales podían requerir alguna acción del estudiante o solo del entrevistador. Describimos nueve tipos de intervenciones, de las cuales, I1, I2, I3, e I4 requerían que el estudiante manipulara o reflexionara sobre la tarea para dar una respuesta correcta a las preguntas

planteadas. Por otro lado, las intervenciones I5, I6, I7, I8 e I9 implicaban solo una acción del entrevistador, las cuales permitían al estudiante avanzar en el desarrollo de la tarea. Por ejemplo, el estudiante, al escuchar su propia reflexión o respuesta, mira desde otra perspectiva su forma de proceder o comprender. En ocasiones simplemente reformular la pregunta ayudaba al estudiante a responder, ya que es probable que las palabras utilizadas no fueran de su completa comprensión o la forma en que estas son expresadas hacia el estudiante.

Lo descrito en nuestros resultados referente a las intervenciones del entrevistador en un contexto que implicara la forma directa de la función, coinciden con los hallazgos de Santagata (2005) quien menciona que dentro de las intervenciones más utilizadas por el docente se encuentra la que hemos reformulado como “reformular la pregunta” al estudiante. Por otra parte, en un contexto que implicara la forma inversa de la función observamos que las acciones que primaron fueron, hacer que el estudiante volviera a trabajar con el caso inicial, verbalizar el argumento o reflexión del estudiante y repetir la pregunta. Creemos que estas acciones permitieron al estudiante cambiar su estrategia o la forma inadecuada en la que estaban entendiendo el patrón y la relación entre las variables implicadas en la tarea.

Este trabajo, junto con otros estudios como los de Cañadas et al. (en revisión), Ureña et al. (2019) y Warren (2006) contribuyen al conocimiento de acciones que se pueden llevar a cabo con los estudiantes para ayudarles a avanzar o promover el pensamiento funcional, la generalización y a su expresión mediante simbolismo algebraico.

Por otra parte, consideramos que hay evidencia de pensamiento funcional en este grupo de estudiantes, debido a cómo estos han mostrado ser capaces de identificar y trabajar con relaciones funcionales. Esto se podría desarrollar aún más con un trabajo constante en el aula de tareas que impliquen este tipo de relaciones. Estos hallazgos confirman otros resultados de investigaciones como las de Blanton y Kaput (2004) quienes muestran que estudiantes de los primeros niveles pueden trabajar y describir situaciones de pensamiento funcional y la relación entre variables. Además, considerando que la comprensión de estudiantes respecto a conceptos asociados a las funciones aún no está ampliamente documentada, este estudio contribuye y busca ampliar un poco más la investigación con respecto al pensamiento funcional en estos estudiantes.

Destacamos la intervención del entrevistador, el cual a través de acciones contribuye en el proceso de generalización de los estudiantes. En otros estudios el entrevistador pudiera corresponder al docente a cargo del grupo de estudiantes. Además, creemos que, en una investigación futura, que conste de igual número de preguntas que involucran la forma directa de la función, como aquellas que involucran la forma inversa de la función, se podría realizar un análisis de comparación de los resultados obtenidos, tanto de errores como de intervenciones.

## AGRADECIMIENTO

Este trabajo se ha realizado en el proyecto EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). La primera autora agradece también el apoyo de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID)/ Programa becas/ Doctorado becas Chile/ 2019-72200072.

## REFERENCIAS

- Ames, C. y Archer, J. (1988). Achievement goals in the classroom: Students' learning strategies and motivation processes. *Journal of Educational Psychology*, 80, 260-267.
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 33-52.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 69-81.
- Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.
- Cañadas, M. C., Morales, R. y Bautista, A. (en revisión). Second graders functional thinking in a generalization task: responses and interventions.
- Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40(1), 3-22.
- Corbin, J. M. y Strauss, A. (1990). A tierra la teoría de la investigación: procedimiento, cánones y criterios de evaluación. *Sociología Cualitativa*, 13(1), 3-21.
- Dekker, R. y Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 39-65.
- Dominik, K. y Bernd, K. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM*, 37(3), 240-245.

- Fernández, A. (2016). Errores y dificultades. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de secundaria* (pp. 195-207). Madrid, España: Pirámide.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación (5ª ed.). México, DF: McGraw-Hill.
- Hidalgo, D. y Cañadas, M. C. (2017). Generalización de estudiantes de 6º de Educación Primaria: dificultades, ayudas y efectos. Trabajo presentado en grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM. En XXI simposio de investigación en Educación Matemática. Zaragoza, España.
- Horner, R. H., Bellamy, G. T. y Colvin, G. T. (1984). Responding in the presence of nontrained stimuli: Implications of generalization error patterns. *Journal of the Association for Persons with Severe Handicaps*, 9(4), 287-295.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th international congress on mathematical education: Selected lectures* (pp. 271-290). Sevilla, España: SAEM Thales.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on Students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, 7(1), 69-85.
- Mata-Pereira, J. y da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4>
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375). Málaga, España: SEIEM.
- Nicholls, J. G. (1984). Conceptions of ability and achievement motivation. En R. Ames, y C. Ames (Eds.), *Research on motivation in education: Student motivation* (Vol. 1, pp. 39-73). New York, NY: Academic Press.
- Pinto, E. y Cañadas, M. (2018). Structures and generalisation in a functional approach: the inverse function by fifth graders. En D. M. Gómez (Ed.), *proceedings of the first PME regional conference: South America* (pp. 89-96). Santiago, Chile: PME.
- Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad de México, MEX: Trillas.

- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.
- Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Documento no publicado (informe). Granada, España: Universidad de Granada.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491-508.
- Schliemann, A., Carraher, D. y Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. *RDM*, Vol. especial, 107-122.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores, M. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: SEIEM.
- Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 12, 40-62.
- Ureña, J., Ramírez, R., y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation/Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. Chick y J. Vincent (Eds.), *proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305- 312). Melbourne, Australia: Program Committee.
- Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *proceedings of the 30th conference of PME* (Vol. 5, pp. 377-384). Praga, República Checa: PME.
- Warren, E. y Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14.

Diana Hidalgo-Moncada  
Universidad de Barcelona  
diana.mat.comp@gmail.com

María C. Cañadas  
Universidad de Granada  
mconsu@ugr.es

Recibido: 27/10/2019. Aceptado: 25/04/2020  
doi: 10.30827/pna.v14i3.11378



ISSN: 1887-3987