

La medida del *Λείμμα* en la música griega antigua

Pedro REDONDO REYES
I.E.S. "Fray Luis de Granada"

Resumen

La proporción musical 256:243 era conocida por los antiguos tratadistas de armónica como *leimma*. Algunos teóricos intentaron determinar esta magnitud con relación a otros intervalos.

Abstract

The musical *ratio* 256:243 was known by ancient greek harmonics as *leimma*. Some theorist tried to settle its magnitude with regard to other intervals.

Palabras clave: Música, armónica, *leimma*.

Una de las características más notables de la teoría musical griega antigua, conocida como *ἀρμονικὴ ἐπιστήμη*, y que ha sorprendido por su precisión a los investigadores modernos, es la medida de la magnitud de los intervalos musicales. Al igual que ocurre hoy día en la música árabe o india, la griega de época antigua contemplaba la *microtonalidad*, es decir, la capacidad para producir y percibir intervalos menores que lo que hoy conocemos como semitono. Estos intervalos mínimos, que nuestro sistema actual ha eliminado en un largo proceso de ajuste al aceptar históricamente consonancias no consideradas tales por los griegos, se podían extraer de los instrumentos musicales; consecuentemente, los griegos eran capaces de determinar perceptivamente las sutilezas de esta microtonalidad, una facultad perdida para la mayoría de los músicos occidentales de hoy día¹.

1. No obstante, *vid.* las reticencias de Th. J. MATHIESEN, *Apollo's Lyre. Greek Music and Music Theory in Antiquity and the Middle Ages*, University of Nebraska Press 1999, p.476 n.212 sobre la pretendida exactitud en la emisión y percepción de estos intervalos.

Aunque se ha avanzado en el estudio del grado en que un auditorio antiguo discernía intervalos tan pequeños y de cómo eran obtenidos con las técnicas organológicas de la época, nuestro objetivo aquí es la breve consideración que de uno de estos microintervalos hizo la *teoría* musical griega, una faceta de la actividad musical que se alejó de la práctica real de los instrumentistas para indagar en el lenguaje matemático interno de la ἄρμονική. Exenta de las imperfecciones en la construcción de instrumentos², la teoría investigó a fondo intervalos muy pequeños que no podía encomendar a la αἰσθησις debido a la poca fiabilidad de ésta³. El intervalo conocido como λείμμα (leima) es uno de los más estudiados por los teóricos griegos, sobre todo por las implicaciones metafísicas que tuvo desde el *Timeo* de Platón.

Los λόγοι de la ciencia musical

Los griegos reconocieron que la ἄρμονική ἐπιστήμη nació con el descubrimiento de Pitágoras en una herrería⁴. Según nuestras fuentes, el maestro habría descubierto la "relación" numérica⁵ entre dos sonidos que al emitirse a la

2. Cf. las críticas de Aristóxeno (*Harm.* 49.1 ss. da Rios), Ptolomeo (*Harm.* 5.24 ss. Düring) y otros testimonios (Porph. *in Harm.* 26.13-14 Düring) a los instrumentistas. Para la relación entre teóricos y constructores de instrumentos, *vid.* las conclusiones de E. FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Darmstadt 1962, pp.11-12, J. A. PHILIP, *Pythagoras and early Pythagoreanism*, University of Toronto Press 1966, p.129 n.4 y A. BARKER, *Euterpe. Ricerche sulla musica greca e romana*. A cura di Franca Perusino e Eleonora Rocconi, Pisa 2002, pp.80-81.

3. La investigación musical pitagórica prescindió de los datos de la percepción como criterio: *vid.* los testimonios de Ptolemaide citados por Porfirio (*in Harm.* 22.22 ss.). La posición contraria es la de la escuela aristoxénica (*cf.* Aristox. *Harm.* 42.8 ss. da Rios; A. BÉLIS, *Aristoxène de Tarente et Aristote: Le Traité d' Harmonique*, Paris 1986, pp.209 ss.); su contraposición alimentó la polémica de los κριτήρια de conocimiento de las escuelas helenísticas.

4. Sobre esta anécdota, *vid.* Nicom. *Harm.* cap.6, Boeth. *Mus.* I 10 y las fuentes reunidas por A. BARKER en *Greek Musical Writings. Vol.II: Harmonic and Acoustic Theory*, Cambridge University Press 1989, pp.30 ss. *Cf.* además Philip, *op.cit.*, p.125 ss. y F. R. LEVIN, *The Manual of Harmonics of Nicomachus the Pythagorean*, Phanes Press 1994, pp.86 ss.

5. En la teoría musical, la "razón" (λόγος) como relación entre dos números que designan longitudes de cuerda diferentes es la forma principal de entender el διάστημα o

vez se mezclan, produciendo un nuevo sonido agradable, la συμφωνία o consonancia. Dos sonidos son producidos por dos cuerdas de longitud distinta, o por dos secciones de tubo (de αὐλός, por ejemplo), o por dos martillos al golpear un yunque, etc. El descubrimiento destaca que las razones entre los números siempre son idénticas para las mismas consonancias e independientemente de los instrumentos que las produzcan⁶: 2:1 (διπλάσιος) para la consonancia de octava, 3:2 (ἡμιόλιος) para la quinta, 4:3 (ἐπίτριτος) para la cuarta y 9:8 (ἐπόγδοος) para el tono (que no es una consonancia, pero es la diferencia entre 3:2 y 4:3). Se podía, entonces, buscar las causas del carácter estético de la mezcla (κρῆσις) consonante en la forma de su razón o λόγος: así, por ejemplo, Teón de Esmirna, en su *Exposición de las matemáticas útiles para leer a Platón* (76.3 ss. Hiller), nos transmite un pasaje del peripatético Adrasto de Afrodiasias (siglo I d.C.), quien enumera los tipos de λόγοι: οἱ μὲν πολλαπλάσιοι, οἱ δὲ ἐπιμόριοι, οἱ δ' ἐπιμερεῖς, οἱ δὲ πολλαπλασιεπιμόριοι, οἱ δὲ πολλαπλασιεπιμερεῖς, κτλ., "unos son múltiples, otros superparticulares, otros superpartientes, otros múltiples-superparticulares, otros múltiples-superpartientes, etc⁷."

Pero no todos estos tipos son propios de las consonancias: como dice, entre otros, la euclidiana *Sección del Canon* (149.15-16 Jan = 116.2 Barbera), sólo las razones πολλαπλάσιοι y ἐπιμόριοι son las adecuadas: τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπιμόριοι ἐνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους. Este ἓν ὄνομα ha sido explicado como la posibilidad de estas dos razones para expresar mediante una denominación única la relación entre dos números cualesquiera, a diferencia de otras que serán denominadas ἄριθμὸς πρὸς

intervalo. Para que haya tal intervalo hacen falta dos sonidos desiguales cuya comparación "produce una razón por el exceso de cantidad" al decir de Ptolomeo (*Harm.* 10.22, παραβολὴν ποιεῖ τινα λόγον ἐκ τοῦ ποσοῦ τῆς ὑπεροχῆς; cf. Euc. ap. Porph. in *Harm.* 90.24-91.3 y la definición de διάστημα de Aristóxeno en *Harm.* 20.20). Vid. A. SZABÓ, *Anfänge der Griechischen Mathematik*, München-Wien 1969, pp.139 y 221-223.

6. Es conocido desde V. Galilei y M. Mersenne que el experimento de los pesos suspendidos de cuerdas no arrojan los λόγοι pitagóricos, sino sus cuadrados.

7. Adoptamos la traducción "superparticular" y "superpartiente" para las denominaciones ἐπιμόριος y ἐπιμερής, siguiendo las traducciones latinas (por ejemplo, Boeth. *Ar.* 65.1 Friedlin, *Mus.* 192.26 Friedlin), si bien no recogidas por el Diccionario de la Real Academia de la Lengua. Normalmente podemos leer en la literatura castellana especializada "epimórico", "epítrito" (ἐπίτριτος), etc. Igualmente, traducimos ἐπόγδοος por "sesquioctavo" y ἡμιόλιος por "sesquiáltero".

ἀριθμόν⁸; otros autores van más allá e intentan justificar el privilegio de estas razones por el tipo de ὑπεροχή entre sus excesos: Ptolomeo, en *Harm.* 11.13-17. Düring, recuerda que los pitagóricos establecieron tres tipos de razones para expresar los intervalos: "una, la de las llamadas superpartientes y 'número a número', y otra, la de las superparticulares y múltiples, siendo mejor también ésta que la de aquéllas por la simplicidad de la comparación"⁹. De este modo, según Ptolomeo, es la calidad de la diferencia establecida lo decisivo: para él, cuanto más se acerque ésta a la ἰσότης (que vendría dada por el λόγος 1:1, un unísono en música), más consonante será el intervalo¹⁰. Efectivamente, en la expresión matemática de estas razones se puede ver el tipo de diferencia entre los términos, ya sea en los más bajos o en sus múltiplos (cf. *Euc. El.* VIII 8): la razón πολλαπλάσιος o múltiple tiene la forma (mn):n, mientras que la ἐπιμόριος o "superparticular" se expresa mediante (n+1):n y la ἐπιμερής o "superpartiente" con (n+m):n siendo m>1. Barker ha explicado muy claramente a qué se refiere Ptolomeo: en la razón múltiple el término mayor del λόγος "es un número exacto de veces el tamaño del menor, y éste proporciona una 'medida' en términos de la cual puede expresarse el mayor"¹¹. En cambio, en el caso de las superparticulares, "esta medida está constituida por la diferencia entre los términos, que es una 'parte simple' de cada uno". Este carácter matemático de la relación tiene su contrapartida en el plano perceptivo¹², pues la αἴσθησις aprehende con exactitud

8. Cf. L. LALOY, "Un passage d'Euclide mal interprété", *RPh* 24 (1900), pp.236-241; A. BARKER, "Methods and Aims in the Euclidean *Sectio Canonis*", *JHS* 101 (1981), pp. 1-16, esp. pp. 2-3 y *Greek Musical Writings...*, p. 192 n.6. Una revisión del problema se lee en A. BARBERA, *The Euclidean Division of the Canon. Greek and Latin Sources*, University of Nebraska Press 1991, pp. 55-58. Cf. *Ptol. Harm.* 14.1.

9. Μία μὲν ἡ τῶν λεγομένων ἐπιμερῶν καὶ ὡς ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἑτέρα δὲ ἡ τῶν ἐπιμορίων τε καὶ πολλαπλασίων, ἀμείνων καὶ αὐτὴ τῆς ἐκείνων κατὰ τὴν ἀπλότητα τῆς παραβολῆς, ὅτι μέρος ἐστὶν ἀπλοῦν ἐν αὐτῇ τῶν μὲν ἐπιμορίων ἢ ὑπεροχῆ, τῶν δὲ πολλαπλασίων τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονος; *vid.* I. DÜRING, *Ptolemaios und Porphirios über die Musik*, Göteborg 1934, pp. 176 ss.

10. La "simplicidad" de la comparación entre los términos es una explicación desarrollada por Ptolomeo en *Harm.* I 7, donde las mejores razones son las que dividen más aproximadamente igual, y por tanto la diferencia entre las mitades es mínima.

11. A. BARKER, *Scientific Method in Ptolemy's 'Harmonics'*, Cambridge University Press 2000, p. 61; cf. Theo Sm. 78.6.

12. Cf. BARKER, *Greek Musical Writings...*, p. 285, n. 49.

las partes simples en una comparación, pero no su acumulación, que lleva al error: "ciertamente, tal inferioridad de los sentidos para reconocer lo que es absolutamente diferente o lo que no lo es para ellos, no se desviaría mucho de la verdad, ni tampoco para observar los excesos de aquellas cosas que se diferencian entre sí, al menos tomadas en partes más grandes de lo que son. Pero en las comparaciones con partes más pequeñas se acumularía más, y ya sería manifiesta en ellas; y aún más en las divisiones mucho menores" (Ptol. *Harm.* 4.10-15)¹³. Al ser más simple la diferencia en el caso de la razón múltiple, ésta queda asignada, en su forma doble (διπλάσιος) a la octava 2:1, más consonante que la quinta y cuarta (ἡμιόλιος y ἐπίτριτος respectivamente, ambas ἐπιμόριοι).

Con este criterio, es evidente que la razón ἐπιμερής¹⁴ o de "número a número" será asignada a aquellos intervalos muy alejados de las consonancias. Es el caso del leima, como veremos más adelante.

La división en dos partes iguales del λόγος ἐπιμόριος.

Los pitagóricos descubrieron que una razón interválica de tipo ἐπιμόριος no puede dividirse en dos intervalos de igual tamaño; en otras palabras, la media geométrica no es capaz de dividir el intervalo¹⁵. Según los testimonios, es Arquitas

13. Καὶ τοίνυν ἡ τοιαύτη τῶν αἰσθήσεων ἔνδεια πρὸς μὲν τὸ γνωρίσαι τὸ διάφορον ἀπλῶς ἢ τὸ μὴ πρὸς αὐτάς, οὐ παραπολύ ἂν διαμαρτάνοι τῆς ἀληθείας, οὐδ' αὖ πρὸς τὸ θεωρῆσαι τὰς τῶν διαφερόντων ὑπεροχὰς τὰς γούν ἐν μείζοσι μέρεσιν ὧν εἰσι λαμβανομένας. ἐπὶ δὲ τῶν κατὰ ἐλάττονα μόρια παραβολῶν πλείων ἂν συνάγοιτο καὶ ἤδη κατάφωρος αὐταῖς καὶ μᾶλλον ἐπὶ τῶν μᾶλλον λεπτομερεστέρων; cf. *Alm.* IX 2, 208.13 ss. Heiberg.

14. Se suele identificar las razones ἐπιμερεῖς con las de ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν (cf. Plat. *Ti.* 36b y Porph. in *Harm.* 117.14) pero Teón las explica como diferentes (78.6-23 y 80.7-4, respectivamente), siendo la de "número a número" aquella en que no se cumple ninguna de las circunstancias que se dan en las demás razones.

15. Sobre las μέσαι (o μεσότηται), cf. Archyt. *fr.* 47B12 D.-K., Plat. *Ti.* 35-36, Iambl. in *Nic.* 100.19-24, 118.19 ss. Pistelli-Klein, Ps. Plut. *de Mus.* 1138D, por ejemplo; vid. Th. L. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Oxford 1921 (reimp. New York 1981), vol. I, pp. 85-86. Las medias utilizadas en música son la aritmética ($c=[a+b]:2$) y la harmónica ($c=2[ab]:[a+b]$), pues la media geométrica ($c=\sqrt{ab}$) no da un resultado aceptable. ZANONCELLI (*La manualistica musicale greca*, Milano 1990, p. 65 n.3) recuerda que la expresión ἀνάλογον en referencia a la media proporcional se refiere a la media geométrica según Theo Sm. 106.16-17 y Nicom. *Ar.* II 24: cf. SZABÓ, *op.cit.*, pp. 197 ss.

quien la proporcionó (*vid.* Boeth. *Mus.* III 11 = *fr.* 47A19 D.-K.)¹⁶, si bien de forma *nimum fluxa*, al decir de Boecio. Mejor expresión recibe la prueba en la euclidiana *Sección del Canon* (prop. 3, 152.1-153.4 Jan = 124-126 Barbera): puesto que la ὑπεροχή entre los términos más bajos de la razón es 1 y la unidad es indivisible en números enteros, se alcanza la conclusión: ἐπιμορίου διαστήματος οὐδείς μέσος, οὔτε εἷς οὔτε πλείους ἀνάλογον ἔμπεσείται ἀριθμός (lo que es válido también para la razón que no esté en sus términos más bajos, según Euc. *El.* VIII 8).

Las consecuencias de la prueba matemática son notables en música. La imposibilidad de dividir en dos partes iguales un intervalo conlleva problemas en la afinación pitagórica, pues el círculo de quintas no se cierra; en otros términos, una octava no equivale exactamente a seis tonos ($2:1 < [9:8]^6$, *cf.* Ptol. *Harm.* I 11), ni siete octavas a doce quintas¹⁷. La división igual de los intervalos ha constituido un *desideratum* de los teóricos de la música, con la consecuencia de producir varios sistemas de afinación basados en el *temperamento*. Un intento *sui generis* e influyente del temperamento lo constituyó en Grecia Aristóxeno de Tarento, que expresamente desdeñó las investigaciones acústicas y matemáticas de los pitagóricos, por ser ajenas a la música (*Harm.* 17.4 ss. da Rios). Aristóxeno declaró que la consonancia de cuarta estaba formada por dos tonos y un semitono, en clara polémica con testimonios como el de Filolao; de ahí que el πυκνόν del tetracordio¹⁸ sea dividido en dos partes iguales, cuando la evidencia general, según Ptolomeo, es la de que el intervalo más grave de la cuarta es menor que el que le sigue (*Harm.* 32.23-27, 33.22 ss.).

El caso del tono 9:8

El intervalo llamado τόνος fue considerado en principio como la diferencia entre una quinta y una cuarta ($[(3:2):(4:3)]=[9:8]$); esta concepción fue

16. W.BURKERT, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press 1972, pp. 442-447; BARBERA, *op.cit.*, pp. 58-60; ZANONCELLI, *op.cit.*, p. 65 n.3.

17. *Vid.* J. J. GOLDÁRAZ GAÍNZA, *Afinación y temperamento en la música occidental*, Madrid 1992, pp. 26-27.

18. El πυκνόν es la suma de los dos intervalos más graves del τετράχορδον, suma que resulta menor que el intervalo restante; *vid.* S. MICHAELIDES, *The Music of Ancient Greece. An Encyclopaedia*, London 1978, *sub voce*.

compartida por otras escuelas como la aristoxénica¹⁹. Puesto que un intervalo επιμόριος no puede dividirse en dos partes iguales, tampoco lo será la razón επόγδοος 9:8: cf. Euc. Sect. Can. prop.16 (161.17-18 Jan = 170.1 ss. Barbera): ὁ τόνος οὐ διαιρεθήσεται εἰς δύο ἴσα οὔτε εἰς πλείω. De este modo, hablar de "semitono" -ἡμιτόνιον- como mitad del tono es algo erróneo: así lo afirma Panecio, por ejemplo, citado por Porfirio (in Harm. 65.26-29): "en música el llamado 'semitono' constituye un uso erróneo del nombre: quien piensa que el intervalo entre la agudeza y la gravedad se divide por una nota central es como quien afirma que el intervalo entre el blanco y el negro o lo caliente y lo frío puede dividirse"²⁰. No cabe duda de que estas palabras adquieren su pleno sentido si son referidas a los aristoxénicos que, desdeñando la investigación matemática de los fenómenos acústicos propia de los pitagóricos, aceptaron la división igual del tono en dos semitonos desde la prioridad del criterio de la αἰσθησις. De ellos y su ἡμιτόνιον hablaremos más adelante. Sin embargo, según Adrasto, hay que rendirse a la evidencia (ap. Theo Sm. 69.12-70.1): "...que este intervalo 256:243 (es decir, 13) es menor que el semitono, está claro. Pues siendo el tono sesquioctavo, el semitono, si se toma dos veces, hará un sesquioctavo, es decir 17:16. 13/243 está en una razón mayor que un dieciochoavo, que es una parte menor que un dieciseisavo. Y el sesquioctavo no admite una división, aunque lo piensan quienes juzgan no mediante la razón sino con el oído"²¹.

Desde el punto de vista de los pitagóricos -y ésta es una perspectiva que aceptaron después casi todos- la división geométrica del intervalo de tono origina dos intervalos desiguales: uno mayor llamado ἀποτομή (de razón 2187:2048) y

19. Vid. por ejemplo Euc. Sect. Can. prop. 8 (150.12 ss. Jan = 142.1-2 Barbera), Anon. Bellerm. III 75-76, Ptol. Harm. 16.26-27, Aristox. Harm. 27.15-16 da Rios, Philol. fr.44B6 D.-K.

20. Καὶ μετὰ μουσικὴν δὲ τὸ λεγόμενον ἡμιτόνιον καταχρήσις ἐστὶν ὀνόματος: ὁ γὰρ οἰόμενος τὸ μεταξὺ διάστημα ὀξέος καὶ βαρέος διχοτομεῖσθαι μέσῳ τινὶ φθόγγῳ ὁμοίῳς ἐστὶ τῷ μεταξὺ λευκοῦ καὶ μέλανος ἢ θερμοῦ καὶ ψυχροῦ διχοτομεῖσθαι λέγοντι; cf. Macr. Comm. II 1, 21; vid. Barker, *Greek Musical Writings...*, pp. 237 ss.

21. "Ὅτι δὲ τοῦτο τὸ διάστημα τὸ τῶν σνς' πρὸς σμγ', τουτέστι τὰ ιγ', ἔλαττον ἐστὶν ἡμιτονίου, δηλόν. τοῦ γὰρ τόνου επόγδοον ὄντος τὸ ἡμιτόνιον δις επόγδοον ἐσται, τουτέστιν εφεκκαιδέκατον. τὰ δὲ ιγ' τῶν σμγ' ἐστὶν ἐν λόγῳ πλείονι ὀκτωκαιδεκάτου, ὃ ἐστὶ μέρος ἔλαττον ἐκκαιδεκάτου. Οὐδὲ γὰρ οἶόν τε τὸ επόγδοον διαίρειν ἐπιδέξασθαι, εἰ καὶ οἱ μὴ λόγῳ ἀλλὰ τῇ ἀκοῇ ταῦτα κρίνοντες νομίζουσιν.

otro menor llamado λείμμα (256:243), de modo que $9:8 = (2187:2048) \times (256:243)$. El último intervalo toma su nombre del hecho de constituir el "resto" (λείμμα) una vez que a la cuarta le quitamos dos tonos ($[4:3]:[81:64]=256:243$)²². Aunque también, como veremos, Platón se refiere a él con la forma correspondiente del verbo λείπειν en el *Timeo*, los pitagóricos habían llamado δίεςις a los intervalos producto de la división del tono (Philol. *fr.* 46B6 D.-K.); no obstante, la designación que triunfó fue la de λείμμα, para la que se ofrecieron explicaciones como la de Aristid. Quint. 96.3-4 W.-I., ὄθεν καὶ λείμμα τοῦτο διάστημα διὰ τὸ δυστέκμαρτον τῆς ἰσότητος ἐκάλησαν οἱ παλαιοί, o Gaud. *Harm.* 343.8-10 Jan, ἔλαττον ἄρα τὸ λεγόμενον ἡμιτόνιον τοῦ ἀληθῶς ἡμιτονίου, διόπερ λείμμα ἐκλήθη.

Procediendo de este modo, se advierten las consecuencias a las que ya hemos aludido: es inexacto afirmar, como hace Aristóxeno, que una cuarta 4:3 esté constituida por "dos tonos y un semitono": *cf.*, por ejemplo, *Harm.* 31.1-3 da Rios, ὡς φαινομένου δ' ἐκείνου (*scil.* τοῦ διὰ τεσσάρων) δύο τόνων καὶ ἡμίσεος, κείσθω τοῦτο ἂν εἶναι τὸ μέγεθος (*cf. ibid.* 70.2 ss.). Pero el sistema pitagórico tal y como es expresado en diferentes autores es claro al respecto: por ejemplo, Euc. *Sect. Can.* prop. 15 (161.4-6 Jan = 166.2 Barbera) τὸ διὰ τεσσάρων ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου, καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου; Ptolomeo, en *Harm.* I 10 (el epígrafe reza ὅτι οὐχ ὑγιῶς τὴν διὰ τεσσάρων συμφωνίαν δύο καὶ ἡμίσεος ὑποτίθενται τόνων), refutó para siempre este pilar de la teoría aristoxénica, si bien partiendo de unos κριτήρια ἁρμονίας diferentes a los del tarentino. El proceder del Demiurgo en la creación del alma del mundo según Platón concederá el nivel que corresponde a esta división de la cuarta.

El leima: música y metafísica

Pitagóricos como Filolao de Crotona y Timeo de Locros, y después de ellos Platón, dispusieron la configuración del κόσμος según la armonía. Así se expresa Timeo: λόγοι δ' οἶδε πάντες ἐντὶ κατ' ἀριθμῶς ἁρμονικῶς συγκεκραμένοι, "todas estas razones están mezcladas conforme números armónicos" (208.18 Marg). Por tales λόγοι hay que entender, por supuesto, las

22. *Cf.* Adrasto (*ap.* Theo Sm. 70.2-6), τὸ δὲ λεγόμενον λείμμα εἰ τις ἐρωτῶν τίνος ἐστὶ λείμμα, δεῖ εἰδέναι ὅτι ἐστὶ τοῦ διὰ τεσσάρων: τῷ γὰρ διὰ τεσσάρων λείπει πρὸς τὸ γενέσθαι δύο ἡμισυ τόνων τελείων.

razones armónicas que expresan matemáticamente los intervalos musicales. Según Filolao, los que primero conciernen a la φύσις son aquellos que encontró Pitágoras: ἄρμονία (octava), συλλαβὰ (cuarta) y δι' ὄξειάν (quinta), de acuerdo al fr. 46B6 D.-K. Conforme a sus razones numéricas, se concluye que en el alma del mundo una cuarta está formada por dos tonos y un semitono, y éste ni tendrá forma ἐπιμόριος ni será la mitad justa de un tono. Filolao y Timeo no repiten la prueba de Arquitas, pero las magnitudes de sus semitonos son otra expresión de ella. Filolao es coherente cuando habla de la magnitud de la cuarta: συλλαβὰ δὲ δὺ' ἐπόγδοα καὶ δίεσις (44B6, p.410.3 D.-K.)²³; esta δίεσις es de razón 256:243. Pero según Boecio (*Mus.* III 5, 276.15 ss. Friedlin = 44A26 D.-K.) Filolao ya habría dividido el tono en dos intervalos desiguales, esto es, la δίεσις y el ἀποτομή: *ex hoc igitur Philolaus duas efficit partes, unam quae dimidio sit maior, eamque apotomen vocat, reliquam quae dimidio sit minor eamque rursus diesin; cf. ibid.* III 8²⁴. Igualmente, se habría ocupado de las divisiones aún menores como la coma o diferencia entre un ἀποτομή y un leima, de razón 531441:524288. Es importante notar, además, que Filolao parece ser el responsable de la identificación entre λόγος y ὑπεροχή, al entender el número 13 como expresión del leima ($13 = 256-243$)²⁵.

La última sistematización desde la armonía del alma del mundo antes de Platón la ofrece Timeo de Locros. Su κόσμω ψυχᾶ se configura en 36 números que van desde el 384 hasta el 10368, guardando entre sí todos las razones armónicas según una cuarta pitagórica ($4:3 = [9:8] \times [9:8] \times [256:243]$). Lo que Filolao había llamado, según Boecio, δίεσις y ἀποτομή, es llamado por Timeo, respectivamente, ἔλαττον ἀμιτόνιον y μείζον ἀμιτόνιον (211.6 ss.) La razón del λείμμα con los ὄροι o términos más bajos es, según su serie, 5 12:486, pero

23. Sobre los problemas, incluso de atribución, del fragmento filolaico, *vid.* FRANK, *op.cit.*, pp. 263-277; *cf.* Macr. *Comm.* II 1, 23. Para el uso de δίεσις por Aristóxeno, *vid.* A. BÉLIS, *op.cit.*, p. 69; δίεσις, relacionada con δίημι, hace referencia al paso del aire por el agujero del ἀβλόξ: BÉLIS, *op.cit.*, p. 183.

24. Boeth. *Mus.* III 8 (278.11-13), *Philolaus igitur haec atque his minora spatia talibus definitionibus includit. Diesis, inquit, est spatium quo maior est sesquitertia proportio duobus tonis.*

25. *Vid.* M. L. WEST, *Ancient Greek Music*, Oxford University Press 1992, pp. 235-236. Filolao extrae también el número 13 al considerar (o confundir) el tono como 27, siendo así 13 el leima, 14 el apotomé y 1 su diferencia o κόμμα; *cf.* Plut. *an. procr. in Ti.* 1017F2 ss.; *vid.* FRANK, *op.cit.*, pp. 265 ss.

Timeo se refiere expresamente a ambos semitonos cuando llega a las razones 2187:2048 (ἀποτομή) y 2048:1944 (δίεσις ο λείμμα). Las dos son referidas, como hemos dicho, con el término común ἀμιτόνιον: ἐπόγδοος ὁ βῆρπζ' τοῦ ιζ, μείζον ἀμιτονίου διέχων ἀπὸ τοῦ ιη': ἔλαττον δὲ ἀπὸ τοῦ κ': ἐπεὶ γὰρ τόνον μὲν αὐτὸς ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ιζ', ὁ δὲ ιζ' ἀπὸ τοῦ ιη' τὸ λεγόμενον ἔλαττον ἀμιτονίον (211.6-8).

La δίεσις de Filolao y el ἔλαττον ἀμιτόνιον de Timeo, es decir, la razón 256:243, será llamada a partir de Platón λείμμα, denominación que finalmente quedará. Platón sigue en su *Timeo* los pasos del pitagórico homónimo aunque con su propia división del alma del mundo basada en la célebre doble serie de cuadrados y cubos. El leima aparece cuando intervienen los tonos de razón sesquioctava (ἐπόδοι) dividiendo la cuarta (*Ti.* 36a6-b5): "Después de que entre los anteriores intervalos surgieran de estos enlaces los sesquiálteros, sesquitercios y sesquioctavos, llené todos los sesquitercios con uno sesquioctavo, dejando una parte de cada uno de ellos, quedando como resto este intervalo de 'número a número' que tenía los términos de doscientos cincuenta y seis a doscientos cuarenta y tres²⁶". Platón se refiere a la razón con la denominación que le corresponde, pues no es ni πολλαπλάσιος ni ἐπιμόριος, sino ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, "número a número" (36b3): la expresión διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν ya hace referencia a la noción de "resto", λείμμα, como denominación definitiva. A la vez, Platón establece el valor "normal" de la razón ya apuntado por Timeo y confirma así la división conocida como "pitagórica" en el género diatónico. No obstante la dimensión cosmológica de tal división, no parece que todos los pitagóricos se sintiesen obligados a seguirla: un caso conocido es el de Arquitas, quien en su género diatónico no acepta el intervalo más grave con el valor del leima, sino un semitono 28:27 (además de

26. Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπίτριτον καὶ ἐπογδῶν γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδῶου διαστήματι τὰ ἐπίτρια πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἐκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμόν ἐχούσης τοῦς ὄρους ἕξ καὶ πενήκοντα καὶ διακοσίω πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. *Vid.*, en general, B. KYTZLER, "Die Weltseele und der musikalische Raum (Platon Timaios 35a ff.)", *Hermes* 87 (1959), pp. 393-414 y E. MOUTSOPOULOS, *La musique dans l'œuvre de Platon*, Presses Universitaires de France 1959², pp. 352 ss.

rechazar el dítano 81:64 ($=[9:8]^2$) por una dulce tercera 5:4²⁷. Otros autores abundan en esta diferencia, como Ptolomeo. No obstante, el mismo Ptolomeo aceptó la división pitagórica llamándola διατονικὸν διατονιαῖον, y según el alejandrino ésta es la división diatónica de Eratóstenes.

El leima y el semitono aristoxénico

Como ya hemos dicho, Aristóxeno rechazó el criterio racional y la investigación acústica propia de los pitagóricos –si bien la escuela peripatética sí se ocupó de tales estudios– y desde la αἰσθησις postuló un semitono entendido como la mitad exacta del tono²⁸. Desde la asunción de la magnitud del leima y del axioma de la imposibilidad de división igual de un intervalo επιμόριος (*vid. supra*), Ptolomeo emprendió la medición exacta del semitono aristoxénico (el alejandrino califica de "ingenua", εὐηθες, la expresión aristoxénica): "Pues ya que no se divide en dos razones iguales ni la sesquioctava ni ninguna otra de las superparticulares, y que como razones más aproximadamente iguales producen 9:8 las de 17:16 y 18:17, se encontraría en la razón intermedia a éstos el semitono, es decir mayor que 18:17 pero menor que 17:16. Pero también es 15 una parte mayor que 1/17 de 243, pero menor que 1/16, de modo que si unimos 243 y 15, el semitono estaría en una razón muy cerca de 258:243. Y se mostró también la razón del leima, 256:243; entonces, el semitono diferirá del leima en la razón 258:256, que es 129:128" (*Harm.* 24.10-19)²⁹. Obsérvese que Ptolomeo no afirma que el

27. Cf. Ptol. *Harm.* I 13; sobre la división de Arquitas y otros, *vid.* R. P. WINNINGTON-INGRAM, "Aristoxenus and the Intervals of Greek Music", *CQ* 26 (1932), pp. 195-208; Düring, *op.cit.*, pp. 249 ss., y BARKER, *Greek Musical Writings...* pp. 46-52.

28. Con el corolario de la posibilidad de tener un πυκνὸν dividido en dos partes iguales: *cf.* Ptol. *Harm.* 32.23 ss.

29. Επειδὴ γὰρ εἰς ἴσους μὲν δύο λόγους οὔτε ἐπόγδοος, οὔτε ἄλλος τις διαιρεῖται τῶν ἐπιμορίων, ἴσοι δὲ ἐγγιστα ποιοῦσι λόγοι τὸν ἐπὶ ἧ', ὃ τε ἐπὶ ις' καὶ ὃ ἐπὶ ις', εἴη ἂν κατὰ τὸν μεταξύ πως τούτων λόγον τὸ ἡμιτόνιον, τουτέστι τὸν μείζονα μὲν τοῦ ἐπὶ ις', ἐλάττονα δὲ τοῦ ἐπὶ ις'. ἔστι δὲ καὶ τῶν σμγ' τὰ ιε' μείζον μὲν μέρος ἢ ἐπτακαιδέκατον, ἐλαττον δὲ ἢ ἐκκαιδέκατον, ὥστε συντεθέντων αὐτῶν τοῦ σμγ' καὶ ιε' ἐν λόγῳ γίνεσθαι τὸ ἡμιτόνιον ἐγγιστα τῷ τῶν σνη' πρὸς τὰ σμγ'. ἐδείχθη δὲ καὶ τοῦ λείμματος ὁ λόγος ὁ τῶν σνς' πρὸς τὰ σμγ' καὶ τοῦ λείμματος ἄρα τὸ ἡμιτόνιον διοίσει τῷ τῶν σνη' λόγῳ πρὸς τὰ σνς', ὃς ἐστὶν ρκη'. *Vid.* BARKER, *Greek Musical Writings...*p. 297 n.90 y J. SOLOMON, *Ptolemy's Harmonics:*

semitono aristoxénico sea 258:243, sino que "estaría en una razón muy cerca" de ésta. Aunque más tarde (*Harm.* II 14) el alejandrino parece adaptar los intervalos aristoxénicos (expresados en μόρια) a las razones, aquí es evidente que sería incorrecto aspirar a una expresión "racional" de un intervalo que en su concepción original parte de la αἰσθησις y del postulado de la división igual de todo intervalo, entendido como "espacio", τόπος³⁰. El procedimiento de Ptolomeo, por su parte, se retrotrae al menos hasta Filolao. Una vez dividida la razón 9:8 en dos mitades desiguales mediante el método ya conocido por otros autores de la duplicación de sus ὄροι y establecer dos λόγοι ἐπιμόριοι ($9 \times 2 = 18$; $8 \times 2 = 16$; la serie 16, 17, 18 hace los λόγοι 17:16 y 18:17), se entiende que el semitono aristoxénico será mayor que 18:17 (semitono menor) pero menor que 17:16 (semitono mayor). Hemos visto cómo mucho antes Adrasto había supuesto como semitono 17:16 (*ap.* Theo Sm. 69.14-15). Ptolomeo sigue este camino, y mientras que Adrasto sólo operaba con esta razón, el alejandrino intenta hallar una cifra entre 17:16 y 18:17, una cifra entera que se añada a la ὑπεροχή 13: sólo es posible situar el 15 entre 1/16 de 243 y 1/17 de 243 (si el semitono está entre 17:16 y 18:17, tiene que hallarse entre 1/16 y 1/17 del denominador, esto es, 243)³¹.

Esta numerología sirve para demostrar que el semitono aristoxénico, unido a dos tonos, daría lugar a una cuarta ligeramente mayor que la correcta de razón 4:3. Ahora bien, aceptada la demostración del leima como "resto" de la cuarta una vez sustraídos dos tonos de razón 9:8, el camino de la tratadística musical griega hasta el final de la Antigüedad será el de situar exactamente la razón "número a número" del leima en la serie de λόγοι ἐπιμόριοι, con la intención evidente de aprehender la verdadera magnitud de este intervalo discolo, si no con un ἔν ὄνομα, sí al menos identificando los λόγοι exactamente mayores o menores que él.

La magnitud del leima respecto a otros intervalos

Ya hemos visto cómo Adrasto entendía 17:16 como el semitono, sin plantearse la imposibilidad de que su cuadrado resulte exactamente 9:8. De acuerdo con el texto que nos ofrece Teón ya mencionado *supra* (Theo Sm. 69.12-

Translation & Commentary, Leiden-Boston-Köln 1999, p. 34.

30. Cf. Aristox. *Harm.* 20.18, Cleonid. *Harm.* 192.13-15 Jan; asimismo Trasilo *ap.* Theo Sm. 48.9.

31. Cf. Boeth. *Mus.* III 5 = Philol. *fr.* 46A26 D.-K.

70.6), Adrasto es inexacto al admitir la imposibilidad de una media geométrica para 9:8 justo cuando sólo ofrece para el semitono una razón 17:16, de un modo que parece excluir que su complemento sea 18:17. En segundo lugar³², 13/243 –la ὑπεροχή del leima– es, según Adrasto, mayor que 1/18 de 243 (la ὑπεροχή de 19:18). Esto no es así: en realidad, $13/243 < 1/18$ de 243, pues $13 < 13,5^{33}$. Es notable este error, que de admitirse situaría al leima mayor que 19:18; el mismo tipo de confusión se lee en el texto de Teón un poco más adelante (87.1-3), en un pasaje que bien podría estar siguiendo a Trasilo, de cuya obra musical sólo tenemos noticias gracias a Teón: "Sesquitercio de éste (*scil.* 192) es 256, que con 243 hace la razón del leima, que es mayor que 19:18³⁴". No obstante la posibilidad de que el error se deba al propio Teón o a los problemas en la transmisión textual, gracias a estos dos pasajes es posible advertir el intento de situar el leima entre dos series de números diferentes. La primera es la progresión 16–17–18, que surge de la duplicación de los términos de 9:8 y de la inclusión de 17 para la consecución de λόγοι ἐπιμόριοι. Arístides Quintiliano retrotrae esta operación a los pitagóricos antiguos, referidos por él como οἱ πρῶτοι (94.5 W.-I.; la identidad es correcta, pues Arístides los refiere a los experimentos tradicionales de los pitagóricos): "también quisieron comprender la razón de los semitonos. Puesto que no se observaba ningún número entre 8 y 9, al duplicar estos términos obtuvieron 16 y 18; y en medio de ellos hallaron el 17. Con éste, dijeron, el tono se divide en semitonos. Pero descubrieron que éstos no son divididos en partes iguales, sino en una mayor y en otra menor; pues 17 respecto a 16 hace la razón 17:16 y 18 respecto a 17 la de 18:17, que no es igual sino menor" (95.19-29)³⁵.

32. Como señala BARKER, *Greek Musical Writings...*, p. 223 n.61.

33. En su traducción, R. y D. LAWLOR corrigen el error: *vid.* THEON OF SMYRNA, *ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ*. Translated by Robert and Deborah Lawlor, San Diego 1979, p. 45.

34. Τούτων ἐπίτριτα τὰ σὺς', ἅτινα πρὸς σμγ' ἔχει τὸν τοῦ λείμματος λόγον, ὃς ἐστὶ πλείων ἢ ἐποκτωκαίδεκατος. *Cf.* R. Y D. LAWLOR, *op.cit.*, p. 57

35. Εβουλήθησαν δὲ καὶ τὸν τῶν ἡμιτονίων κατανοῆσαι λόγον. μεταξὺ δὲ τοῦ ὀκτώ καὶ τοῦ ἐννέα μηδενὸς ἀριθμοῦ θεωρουμένου τοὺς προκειμένους ὄρους διπλασιάσαντες ἐποίησαν μὲν ἑκκαίδεκα καὶ ὀκτωκαίδεκα. τούτῳ δὲ εἰρήκασιν μερίζεσθαι τὸν τόνον εἰς ἡμιτόνια. εὕρισκεται δὲ ταῦτ' οὐκ εἰς ἴσα διαιρούμενα, ἀλλ' ἕξ τε μείζον καὶ ἑλάττων: ὁ μὲν γὰρ ἑπτακαίδεκα πρὸς τὸν ἑκκαίδεκα τὸν ἐφεκκαίδεκατον ἔχει λόγον, ὁ δὲ ὀκτωκαίδεκα πρὸς τὸν ἑπτακαίδεκα οὐκ ἴσον, ἀλλ' ἐλάττω τούτου τὸν ἐφεπτακαίδεκατον; *vid.* Th. J. MATHIESEN, *Aristides Quintilianus: On Music In Three Books*, Yale University Press

Este método, sin duda, procede de los mismos pitagóricos que intentaban evitar la desigualdad entre quintas y octavas, pero un texto tardío y muy contaminado, los *Excerpta Nicomachi* (416.12-16 Jan) indica que fue Eratóstenes quien habría hallado los dos semitonos con este sistema: ἔστι δὲ ἡ εὐρεσις τῶν τόνων καὶ τῶν ἡμιτονίων καὶ τῶν διέσεων κατὰ τῶν Ἐρατοσθένην ἡ' - τόνος- θ', καὶ ταῦτα δις ἰς' ἡμιτ.- ἰς' - ἡμιτ.- ἡ'. El crédito que merecen estos *Excerpta*, conocidos también como *Πτολεμαίου Μουσικά*, es muy limitado, sobre todo si atendemos a las profundas diferencias que hay entre el método de Eratóstenes aquí y la división de los géneros melódicos de este astrónomo conforme los transmite Ptolomeo³⁶.

La segunda serie es la muy conocida 192-216-243-256. Los números 192 y 256 establecen una razón epitritos (4:3). El pasaje citado de Teón (86.15-87.3) explica su consecución: multiplicación por sí mismos de los ὄροι 9:8 e inclusión de 72 (81, 72, 64); a continuación, son triplicados; finalmente, se añade 256, ἐπίτριτος de 192. En esta serie se advierte el leima en su razón 256:243. Son los números que tiene en cuenta Platón en el *Timeo* (36b), como dice Arístides Quintiliano: "Y quedan expuestos en sucesión los cuatro números, 192, 216, 243, 256, de los que ciertamente hace mención también el divino Platón en el *Timeo*, demostrando que la música sensible está muy por debajo en exactitud que la inteligible" (96.25-28)³⁷. Un eco de esta serie también se asocia a Eratóstenes en los *Excerpta*; son los números habituales para expresar los λόγοι internos de la cuarta diatónica pitagórica. Es notable, sin embargo, que la serie no es única, y que debió de estimarse la mejor, frente a otras como la de Timeo de Locros 284-432-486-512 también mencionada por Adrasto (Theo Sm. 68.12 ss., cf. Plut. *an. procr. in Ti.* 1020D4) o la de Gaudencio, que resulta de no triplicar la primera serie a partir de 9:8: "En efecto, sitúese una función de una nota en el número 64 y a éste añádase una nota a distancia de tono, es decir el número 72, y todavía añádase a éstos una tercera nota a distancia de tono de la segunda, es decir el número 81. La cuarta nota, tomada para completar el tetracordio, por fuerza consonante en cuarta con el primero, tendrá la razón sesquitercia con 64, es decir será el número 85 1/3"

New Haven-London 1983, p. 161.

36. ZANONCELLI, *op.cit.*, pp. 486 ss.

37. Εκκείνται δὲ καὶ κατὰ τὸ ἐξῆς ἀριθμοὶ τέσσαρες, ρθβ' σις' σμγ' σνς': ὧν δὴ καὶ ὁ θεῖος Πλάτων ἐν Τιμαίῳ μνημονεύει, τὴν αἰσθητὴν μουσικὴν τῆς νοητῆς ἀκριβεῖα πολὺ λείπεσθαι διελέγχων.

Flor. II., 14 (2003), pp. 295-314.

(*Harm.* 342.14-21 Jan)³⁸.

Esta segunda serie 192-216-243-256 muestra la cuarta pitagórica, pero los teóricos necesitan la primera, 16-17-18, para entender la situación del leima respecto a los λόγοι ἐπιμόριοι que forman. 17:16 y 18:17 son mitades desiguales del tono 9:8, si bien son eslabones de la sucesión de λόγοι ...16:17, 17:16, 18:17, 19:18, 20:19... ¿Dónde está el leima, entonces? Ptolomeo nos informa sucintamente de su magnitud relativa: "...pues los citaredos afinan de tal modo que se produce un tono tanto por AB como por ΒΓ, es decir, la razón 9:8, y es dejada a ΓΔ la de 256 a 243, que completa con las dos de 9:8 la de 4:3, resultando menor que 19:18 pero mayor que 20:19" (*Harm.* 44.1-5)³⁹. Que los citaredos estudiaran la situación exacta del leima es poco probable, pero aquí vemos ya cuál va a ser la sucesión correcta de intervalos, de mayor a menor: 19:18-leima-20:19 (en cents, 93, 90, 88 respectivamente). Ptolomeo no justifica sus cálculos, y este paso rápido por la comparación de magnitudes se ve igualmente en Gaudencio: "En efecto, 256:243 es menor que 18:17. Juntando dos 18:17 no completan un sesquioctavo, de modo que la razón 18:17 es menor que la mitad de un sesquioctavo" (*Harm.* 343.2-6)⁴⁰. Gaudencio es aún menos exacto que Ptolomeo: simplemente nos dice que es menor que 18:17, pero hay que recordar que incluso 19:18 -mayor que el leima, conforme a Ptolomeo- es menor que 18:17. El proceder para la comparación entre estos λόγοι ἐπιμόριοι y el leima ya lo hemos visto en el texto citado de Adrasto. Pero un matemático de más alto calado que Gaudencio como Proclo sí que habla de la operación, no sin

38. Εκκείσθω γάρ τις φθόγγου δύναμις ἐν ἀριθμῶ τῷ ζδ' καὶ τούτῳ παρακείσθω φθόγγος τόνον ἀπέχων, τουτέστιν ἀριθμῶν οβ', καὶ ἔτι τούτοις τρίτος παρακείσθω φθόγγος ἀπέχων τόνον ἀπὸ τοῦ δευτέρου, τουτέστιν ἀριθμῶν πα'. ὁ δὲ τέταρτος εἰς συμπλήρωσιν τοῦ τετραχόρδου λαμβανόμενος, ἀνάγκη τῷ πρώτῳ διὰ τεσσάρων σύμφωνος, λόγον ἔξει πρὸς τὸν ζδ' τὸν ἐπίτριτον, τουτέστιν ἀριθμῶν ἔσται πε' καὶ τρίτου.

39. Οὕτω γὰρ ἀρμόζονται οἱ κιθαρῳδοί, ὥστε τόνον ἀποτελεῖσθαι καὶ ὑπὸ τῶν ΑΒ καὶ ὑπὸ ΒΓ, τουτέστι τῶν ἐπὶ ἡ' λόγον, καὶ καταλείπεσθαι τοῖς ΓΔ τὸν τῶν σμγ' πρὸς τὰ σνς', ὃς συμπληροῖ τοῖς δυσὶν ἐπὶ ἡ' τὸν ἐπὶ γ', ἐλάττων μὲν γινόμενος τοῦ ἐπὶ ιη', μείζων δὲ τοῦ ἐπὶ ιθ'. *Vid.* SOLOMON, *op.cit.*, p. 64 n.19.

40. Ἐστὶ μὲν γὰρ ἐλάττων ἢ ἑφепτακαιδέκατος ὁ σνς' τοῦ σμγ'. δύο δὲ ἑφепτακαιδέκατοι συντιθέντες οὐ συμπληροῦσιν ἐπόγδοον, ὥστε ὁ μὲν ἑφепτακαιδέκατος λόγος λείπει ἡμισυς εἶναι ἐπογδόου; *vid.* MATHIESEN, *Apollo's Lyre...*p. 420.

corregir el error de Adrasto: "Y así pues, que es menor que 18:17, y éste menor que el semitono, lo muestra de la manera siguiente: sitúese, en efecto, 16 y su sesquioctavo 18. Al situarse en medio de éstos el 17, divide el sesquioctavo en razones desiguales que están cerca del intervalo del semitono, difiriendo por la unidad de los extremos. Y está claro que hará una razón mayor respecto al término menor: pues en toda media aritmética es mayor la razón en los términos más pequeños, de modo que 18:17 es menor que el semitono. Pero el leima es menor que 18:17, como está claro por los términos expuestos por Platón. En efecto, 256:243, al tener la razón del leima (como también mostraremos esto cuando probemos la razón del leima en estos números) es menor que 18:17 respecto a 243: pues le excede en 13 unidades, y 1/17 de 243 es mayor que 13. Entonces, por más motivo, la razón del leima es menor que el intervalo de semitono, de modo que el restante hasta el tono, que es la razón del *apotomé*, por fuerza es mayor que el semitono" (*in Ti. II 179.16-180.5 Diehl*)⁴¹. Al contrario que Adrasto, no sitúa el leima respecto a 19:18, sino respecto a 18:17, como Gaudencio (el semitono menor tras 17:16). No se trata de la lógica de la sucesión de λόγοι, sino la de la división del tono en dos semitonos desiguales; ahora bien, el procedimiento es igual al de Adrasto.

La misma conclusión que Ptolomeo es alcanzada por el autor de los *Anónimos de Bellermann*: "En la diferencia entre las consonancias simples queda el tono, y dividiendo con éste la primera consonancia, también encuentran el

41. Οτι δ' οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἐφεπτακαιδέκατος, οὗτος δὲ ἐλάσσων ἢ ἡμιτόνιον, δείκνυται οὕτως: ἐκκείσθω γὰρ ὁ ιζ', καὶ τούτου ἐπόγδοος ὁ ιη': τούτων δὴ μεταξὺ τεθεὶς ὁ ιζ' εἰς ἀνίσους διαιρεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγους σύνεγγυς ὄντας τοῦ ἡμιτονίου διαστήματος, μονάδι διαφέρων τῶν ἄκρων. καὶ δῆλον, ὅτι τὸν πρὸς τῷ ἐλάσσονι ὄρω μείζω ποιήσει λόγον: ἐν πάσῃ γὰρ ἀριθμητικῇ μεσότητι μείζων ἐστὶν ὁ λόγος ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὄροις, ὥστε ὁ ἐφεπτακαιδέκατος ἐλάσσων ἐστὶν ἡμιτονίου. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ λείμμα ἐλασσόν ἐστὶν ἢ ἐφεπτακαιδέκατον, ὡς ἀπὸ τῶν παρὰ Πλάτωνι κειμένων ὄρων δῆλον: ὁ γὰρ σνς' πρὸς τὸν σμγ' τὸν τοῦ λείμματος ἔχων λόγον, ὡς καὶ τοῦτο δεῖξομεν πυθμενικὸν ἀποδείξαντες τὸν ἐν τούτοις τοῖς ἀριθμοῖς τοῦ λείμματος λόγον, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἐφεπτακαιδέκατου πρὸς τὸν σμγ': ὑπερέχει μὲν γὰρ αὐτοῦ ιγ' μονάσιν, τὸ δὲ ἐπτακαιδέκατον τοῦ σμγ' πλειόνων ἐστὶν ἢ ιγ' μονάδων. πολλῶν ἄρα μᾶλλον ὁ τοῦ λείμματος λόγος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἡμιτονίου διαστήματος, ὥστε καὶ ὁ λοιπὸς εἰς τὸν τόνον, ὅς ἐστι τῆς ἀποτομῆς λόγος, ἐξ ἀνάγκης ἡμιτονίου μείζων ἐστὶν.

semitono mayor que $1/18$ pero menor que $1/19$ " (III 75-76)⁴². Éste es un texto importante porque el modo de operar es distinto al exhibido por Proclo: se comparan las *ὑπεροχαί* relativas –entendidas como segmentos de cuerda–, de modo que, igualmente, $19:18 > \text{leima} > 20:19$, o lo que es igual, $1/18 > 1/18,6 > 1/19$ ⁴³; al aumentar el denominador del *λόγος*, disminuye la *ὑπεροχή*.

Las matemáticas han logrado, finalmente, establecer una sucesión de "semitonos" de tipo *επιμόριοι* con la inclusión del leima. Pero puesto que el *λόγος* de éste es de tipo *επιμερής*, un último esfuerzo fue realizado para descubrir qué "diferencia" era la que separaba $19:18$ y $20:19$, los *λόγοι* que anteceden y suceden al leima. El resultado de estos cálculos es impresionante por su aproximación, y revelan el vigor de aquellos teóricos de la música que el mundo griego conoció como *κανονικοί*. Dice Arístides Quintiliano: "Este (*scil.* el leima) no tendrá respecto al tercero ni la razón $17:16$ ni la $18:17$, sino una próxima a la $20:19$ más $505:504$ " (96.22-25)⁴⁴. De modo que el leima *está próximo*, *σύνεγγυς* –pues Arístides o su fuente no establecen una identidad con el leima– a $(20:19) \times (505:504)$; en cents, $88,8 + 3,4$, frente a los $90,2$ del leima⁴⁵. El cálculo revela la exquisitez de la división del *κανών*, cuya sucesión numérica incluso hasta decenas de millar se puede ver en Ptol. *Harm.* 69.24 ss.

Pero la mejor aproximación de tipo *επιμόριος* es la que nos ofrece un pasaje del tratado *De Institutione Musica* de Boecio. El romano establece que el leima (al que llama "semitono menor") es menor que $19\frac{1}{2}:18\frac{1}{2}$, pero mayor que $20:19$. El resultado es que la sucesión de *λόγοι* es ahora más exacta: $19:18-19\frac{1}{2}:18\frac{1}{2}-\text{leima}-20:19$. Boecio demuestra las dos relaciones del leima con las magnitudes que le rodean, pero nos bastará ver cómo procede en el caso de $19\frac{1}{2}:18\frac{1}{2}$: "Si tal especulación se lleva al semitono menor, también encontraremos

42. *Ἐν δὲ τῇ παραλλαγῇ τῶν ἀπλῶν συμφωνιῶν ὁ τόνος κατείληπται, καὶ τούτῳ διαιροῦντες τὴν πρώτην συμφωνίαν καὶ τὸ ἡμιτόνιον εὐρήκασιν μείζον μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκάτῳ, ἔλαττον δὲ ἢ ἐννεακαιδεκάτῳ.*

43. D. NAJOCK, *Drei anonyme griechische Traktate über die Musik*, Göttingen 1972, p. 209.

44. *Οὗτος οὐχ ἔξει πρὸς τὸν τρίτον οὔτε ἑφεκκαιδέκατον οὔτε ἑπεπτακαιδέκατον, ἀλλὰ σύνεγγυς ἐπεννεακαιδέκατον καὶ ἐπιπεντακοσιοστῆτατον.*

45. La medida de intervalos en cents procede de A. J. Ellis en el apéndice a su traducción inglesa del tratado de Hermann HELMHOLTZ, *Die Lehre von den Tonempfindungen*, Braunschweig 1863 (*On the Sensations of Tone*, New York 1885), en las páginas 481 ss. Según esta unidad, una cuarta tiene 498 cents y un tono 204.

con facilidad su proporción, que está entre 256:243. Sea, pues, 256 (A) y 243 (B); su diferencia es 13 (C). Afirmo que A y B tienen una proporción menor que $19\frac{1}{2}:18\frac{1}{2}$. Mida C a A diecinueve veces y media, es decir, multiplíquese C por $19\frac{1}{2}$: son $253\frac{1}{2}$ (D), que al compararse con A es sobrepasado en $2\frac{1}{2}$; sea esta diferencia, $2\frac{1}{2}$, F. A su vez, que esta misma diferencia C mida al número B dieciocho veces y media, es decir, multiplíquese por $18\frac{1}{2}$: son $240\frac{1}{2}$ (E). Así pues, al compararse E con B es sobrepasado por el mismo F, es decir $2\frac{1}{2}$. De este modo, por la misma diferencia, F, son menores D que A y a su vez E que B. Restado F a A y B, resultan D y E; D y E, entre sí, contienen, pues, una proporción mayor que A y B. Pero D y E tienen entre sí la misma proporción que $19\frac{1}{2}$ y $18\frac{1}{2}$; así pues, A y B tienen una proporción menor que $19\frac{1}{2}:18\frac{1}{2}$ " (*Mus.* III 13, 291.15-292 Friedlin)⁴⁶. La operación de Boecio es semejante también a la que previamente había exhibido él mismo en *Mus.* I 7: multiplicación de la ὑπεροχή por los términos de la razón a la que se quiere igualar; esta igualación no resulta, en efecto, por la diferencia de 2,5, que separa $19\frac{1}{2}:18\frac{1}{2}$ del leima.

Este capítulo de Boecio debe ser puesto en relación con el último pasaje citado de Aristides Quintiliano, puesto que si éste aumentaba el intervalo justamente menor al leima (20:19) al sumarle el minúsculo 505:504, Boecio

46. *Quod si ad semitonium minus talis speculatio convertatur, eiusque quoque proportionem facillime repperiemus, quae constat inter* •CCLVI• *et* •CCXLIII• *Sit igitur* •CCLVI• A., •CCXLIII• B. *Horum differentia* •XIII• C. *Dico, quoniam* •A• ad •B• *minorem retinet proportionem, quam* •XVIII S• ad •XVIII• *Metiatur enim* •C• *id, quod est* •A•, *decies novies semis, id est multiplicetur C decies novies semis, fiunt* •CCLIII S., *quod sit* •D•, *qui scilicet comparatus ad* •A• *eodem* •A• *duobus semisque transcenditur; sitque haec differentia* •F• *scilicet* •II S. *Rursus eodem* •C• *differentia* •B• *numerum metiatur octies decies semis id est multiplicetur octies decies semis, fient* •CCXL S•, *quod sit* •E• *Igitur* •E• *comparatus ad* •B• *eodem* •F• *transcenditur, id est duobus semis.* •D• *igitur ab eo, quod est* •A•, *et rursus* •E• *ab eo, quod est* •B•, *eadem* •F• *differentia sunt minores. Subtracto igitur* •F• *ab eo, quod est* •A• *atque* •B•, *facti sunt* •D• *atque* •E•; *maiolem igitur tenent proportionem inter se* •D• *atque* •E• *quam* •A• *atque* •B• *Sed* •D• *atque* •E• *eandem proportionem inter se retinent, quam* •XVIII S• ad •XVIII S. •A• *igitur ad* •B• *minorem retinet proportionem quam* •XVIII S• ad •XVIII S; *vid.* O. PAUL, *Des Ancius Manlius Severinus Boetius, fünf Bücher über die Musik*, Leipzig 1872, pp. 92-93. Otra aproximación que presenta el mismo Boecio, y que opera con la coma pitagórica—estudiada ya, según este autor latino, por Filolao—de razón 531441:524288 (26 cents), es la que sitúa al leima *major* que tres comas pero *menor* que cuatro comas; en cents, $96 > 90$ (leima) > 72 .

establece un nuevo λόγος más pequeño aún que 19:18 sin alcanzar aún el leima. La medida en cents nos permite comparar con mayor claridad el intervalo que Aristides propone (92 cents) con el de Boecio (91 cents); ambos constituyen el máximo acercamiento al leima (90 cents), y su semejanza en el intento de exactitud procedente de dos autores muy tardíos bien podría indicar qué tipo de cálculos eran desarrollados en la última canonística. Es así, pues, que las matemáticas griegas logran la secuencia final de intervalos, ordenados de mayor a menor, 19:18-([20:19] x [505:504]) -19½:18½-leima-20:19; en cents, 97-92-91-90-87.

Este esfuerzo de exactitud se debe a múltiples razones, no siendo la menor de ellas el tremendo prestigio de que gozaba el leima desde su presencia en la armonía del alma del mundo conforme al *Timeo*, y ya antes. Pero también se explica como un intento de enmarcar este intervalo de expresión matemática discolora en el modo aceptado desde los pitagóricos para los intervalos, es decir el λόγος ἐπιμόριος o razón superparticular. No obstante, la presencia del leima en los géneros melódicos diatónicos que nos han sido transmitidos no es tan frecuente. En el caso de Filolao, que es quien primero se refiere a él, el leima viene determinado por la sustracción a la cuarta 4:3 de los dos tonos 9:8, pero ésta es la consecuencia del establecimiento axiomático de las consonancias 3:2 y 4:3. Aparece también en la división del cromático "tenso" de Gaudencio (*Harm.* 344.1 ss.), (32:27) x (2187:2048) x (256:243)⁴⁷, pero esta división tiene un carácter meramente teórico. Sin embargo, en cuanto a los diatónicos de los diferentes tratadistas -sobre todo conforme a la transmisión de Ptolomeo-, un pitagórico como Arquitas prefiere, como ya vimos, el intervalo 28:27 en lugar del leima⁴⁸, y hallamos asimismo razones como 21:20 (diatónico suave de Ptolomeo) e incluso 20:19 (cromático de Eratóstenes) y 22:21 (cromático "tenso" de Ptolomeo), además del semitono no pitagórico 16:15, próximo al ἀποτομή y distante del leima por 81:80 (en Ptolomeo y Dídimo)⁴⁹. Pero el mismo Ptolomeo nos cuenta cómo los músicos prácticos preferían la afinación pitagórica ([9:8] x [9:8] x

47. Vid. MATHIESEN, *Apollo's Lyre...* pp. 504-505.

48. J. LOHMANN (*Musiké und Logos*, Stuttgart 1970, p. 86) establece las relaciones entre los intervalos: 256:243 = (28:27) x (64:63). Este intervalo 64:63 fue operativo en la división de la cuarta de Arquitas según Lohmann, pues el tono 8:7 que él utiliza es la suma de 9:8 y 64:63; además, (9:8) x (28:27) = 7:6, y este intervalo junto con 8:7 forman una cuarta.

49. Para estas divisiones de la cuarta, vid. Ptol. *Harm.* II 14.

[256:243] a la justa ([10:9] x [9:8] x [16:15]): "...excepto cuando cantan siguiendo el diatónico tenso expuesto, tal como puede verse a partir de la comparación entre las razones propias de él, afinan otro género próximo a aquél, aunque claramente de otra forma: pues producen dos tonos primeros y el intervalo restante, como ellos piensan, de semitono, pero como la razón supone, el llamado leima. Y les aprovecha tal cosa por no diferir en nada considerable ni la razón en las posiciones primeras, 9:8 de 10:9, ni en las últimas, 16:15 del leima" (*Harm.* 39.14-22)⁵⁰. Aún en los primeros tiempos de nuestra era, la armonía del alma del mundo podía escucharse en las cítaras de los músicos.

50. Πλήν καθ' ὅσον ἀῖδουσι μὲν ἀκολουθῶς τῷ δεδειγμένῳ συντόνῳ διατονικῷ, καθάπερ ἐξέσται σκοπεῖν ἀπὸ τῆς τῶν οἰκείων αὐτοῦ λόγων παραβολῆς. ἀρμόζονται δὲ ἕτερον γένος συνεγγίζον μὲν ἐκείνῳ, πρόχειρον δ' ἄλλως: δύο γὰρ ποιοῦσι τοὺς ἡγουμένους τόνους καὶ τὸ λοιπὸν, ὡς μὲν αὐτοὶ νομίζουσιν, ἡμιτόνιον, ὡς δὲ ὁ λόγος ὑποβάλλει, τὸ καλούμενον λείμμα. προχωρεῖ δ' αὐτοῖς τὸ τοιοῦτο διὰ τὸ μηδενὶ ἀξιολόγῳ διαφέρειν μήτε τὸν ἐν τοῖς ἡγουμένοις τόποις λόγον τὸν ἐπὶ ἧ' τοῦ ἐπὶ θ', μήτε τὸν ἐν τοῖς ἐπομένοις τὸν ἐπὶ ιε' τοῦ λείμματος.